

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO - ESCOLA DE MINAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

**FORMULAÇÃO DA ANÁLISE DINÂMICA DE SISTEMAS DE MÚLTIPLOS
GRAUS DE LIBERDADE NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA EM COORDENADAS
FÍSICAS**

AUTOR: ALDO SANTOLIN

ORIENTADOR: Prof. Dr. Antonio Maria Claret de Gouveia

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte integrante dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências da Engenharia Civil, área de concentração: Construção Metálica.

Ouro Preto, Dezembro de 2006.

Agradecimentos

À minha família, pelo apoio e pelos valores transmitidos.

À Camila pelo carinho, companheirismo, paciência e ajuda indispensáveis à conclusão deste trabalho.

Ao professor Antonio Maria Claret de Gouveia pelas orientações e ensinamentos, tanto acadêmicos quanto para a vida.

Aos amigos do mestrado pela companhia, amizade e ajuda em todas as horas.

A Deus, por tudo.

Resumo: Neste trabalho uma formulação matricial implícita para a resposta dinâmica no domínio da frequência de sistemas de um e de vários graus de liberdade em coordenadas nodais é apresentada. A formulação proposta é baseada no método da Transformada Implícita de Fourier em coordenadas modais, apresentada por Claret (1991) e Venâncio-Filho e Claret (1995). Nesta formulação o número N de frequências não necessita ser par e a base modal não é usada para desacoplar as equações dinâmicas de equilíbrio. Desta forma o método proposto é recomendado para sistemas dotados de amortecimento não proporcional. Condições iniciais de deslocamentos e velocidades são consideradas na formulação. Exemplos numéricos são apresentados.

Palavras Chave: Domínio da frequência, Método da Transformada Implícita de Fourier, Análise dinâmica, Coordenadas nodais.

Abstract. In this work, a matrix implicit formulation of the frequency domain dynamic response of single and multiple degree of freedom systems in nodal coordinates is presented. The proposed formulation is based on the implicit Fourier Transform method on modal coordinates firstly presented by Claret (1991) and Venâncio-Filho and Claret (1995). In this formulation, the number N of discrete frequencies is not necessarily even and the modal basis is not used to decouple the dynamic equilibrium equations. This way, the proposed method is well suited for dynamic non-proportional damped systems. Initial conditions in displacements and in velocities are considered in the formulation. Numerical examples are presented.

Keywords: Frequency domain; Implicit Fourier Transform method; Dynamic analysis, Nodal coordinates.

AGRADECIMENTOS	II
RESUMO.....	III
ABSTRACT.....	IV
ÍNDICE	V
ÍNDICE DE FIGURAS	VIII
CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	1
1.1 Importância e Objetivos.....	1
1.2 Descrição da Dissertação.....	3
CAPÍTULO 2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	5
2.1 Introdução	5
2.2 Revisão da Literatura.....	5
CAPÍTULO 3 - ANÁLISE DINÂMICA NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA - FORMULAÇÃO CLÁSSICA E O MÉTODO IMFT	9
3.1 Introdução	9
3.2 Solução da Equação Dinâmica no Domínio da Frequência.....	10
3.3 A Transformada Discreta de Fourier	14
3.4 O algoritmo FFT.....	19
3.5 O método ImFT	20
3.5.1 Introdução	20
3.5.2 Formulação Matricial	21

CAPÍTULO 4 - ANÁLISE DINÂMICA NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA EM COORDENADAS FÍSICAS.....	29
4.1 Introdução	29
4.2 Resposta dinâmica de sistemas de um grau de liberdade	29
4.2.1 Formulação Matricial	32
4.2.2 Produto matricial não convencional	33
4.2.3 Condições iniciais	35
4.2.4 Implementação computacional	38
CAPÍTULO 5 - RESPOSTA DINÂMICA DE SISTEMAS DE MÚLTIPLOS GRAUS DE LIBERDADE.....	40
5.1 Introdução	40
5.2 Sistemas com amortecimento proporcional	40
5.3 Sistemas com amortecimento não-proporcional.....	44
5.4 Formulação da resposta de sistemas de vários graus de liberdade.....	46
5.4.1 Formulação Matricial	49
5.4.2 Produto Matricial não convencional.....	50
5.4.3 Condições iniciais.....	52
5.4.4 Implementação computacional	55
CAPÍTULO 6 - EXEMPLOS DE APLICAÇÃO	61
6.1 Introdução	61
6.2 Exemplo 1	61
6.3 Exemplo 2	64
6.4 Exemplo 3	66
6.5 Exemplo 4	68
6.6 Exemplo 5	70
6.7 Exemplo 6	75
6.8 Exemplo 7	79
6.9 Exemplo 8	84
CAPÍTULO 7 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES	97

7.1	Conclusões	97
7.2	Sugestões.....	98
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	99

Índice de figuras

Figura 3.1 -	Sistema massa-mola-amortecedor	10
Figura 3.2 -	Função impulso unitário.	11
Figura 3.3 -	Processo de discretização no tempo.	15
Figura 3.4 -	Fenômeno de aliasing.	16
Figura 4.1 -	Sistema submetido a condições iniciais	35
Figura 6.1 -	Reservatório elevado e carregamento atuante.	62
Figura 6.2 -	Histórico de deslocamentos.	63
Figura 6.3 -	Parte imaginária dos deslocamentos.	63
Figura 6.4 -	Shear building e carregamento.	64
Figura 6.5 -	Histórico de deslocamentos para o shear building.	65
Figura 6.6 -	Parte imaginária dos deslocamentos.	65
Figura 6.7 -	Shear building e carregamento ressonante.	66
Figura 6.8 -	Histórico de deslocamentos para o shear building.	67
Figura 6.9 -	Parte imaginária dos deslocamentos.	67
Figura 6.10 -	Histórico de deslocamentos.	68
Figura 6.11 -	Parte imaginária dos deslocamentos	69
Figura 6.12 -	Shear Building e carregamento atuante.	70
Figura 6.13 -	Histórico de deslocamentos - grau de liberdade 1.	71
Figura 6.14 -	Histórico de deslocamentos - grau de liberdade 2.	72
Figura 6.15 -	Histórico de deslocamentos - grau de liberdade 3.	72
Figura 6.16 -	Parte imaginária dos deslocamentos - grau de liberdade 1.	73
Figura 6.17 -	Parte imaginária dos deslocamentos - grau de liberdade 2.	73
Figura 6.18 -	Parte imaginária dos deslocamentos - grau de liberdade 1.	74
Figura 6.19 -	Histórico de deslocamentos – grau de liberdade 1.	76
Figura 6.20 -	Histórico de deslocamentos – grau de liberdade 2.	76
Figura 6.21 -	Histórico de deslocamentos – grau de liberdade 3.	77
Figura 6.22 -	Parte imaginária dos deslocamentos - grau de liberdade 1.	77
Figura 6.23 -	Parte imaginária dos deslocamentos - grau de liberdade 2.	78
Figura 6.24 -	Parte imaginária dos deslocamentos - grau de liberdade 3.	78
Figura 6.25 -	Shear building com amortecedor discreto e carregamento atuante.	79
Figura 6.26 -	Histórico de deslocamentos - grau de liberdade 1.	81
Figura 6.27 -	Histórico de deslocamentos - grau de liberdade 2.	81
Figura 6.28 -	Histórico de deslocamentos - grau de liberdade 3.	82
Figura 6.29 -	Parte imaginária dos deslocamentos - grau de liberdade 1.	82
Figura 6.30 -	Parte imaginária dos deslocamentos - grau de liberdade 2.	83
Figura 6.31 -	Parte imaginária dos deslocamentos - grau de liberdade 3.	83
Figura 6.32 -	Shear building e carregamento atuante.	84
Figura 6.33 -	Histórico de deslocamentos - grau de liberdade 1	86
Figura 6.34 -	Histórico de deslocamentos – grau de liberdade 2.	87

<i>Figura 6.35 -</i>	<i>Histórico de deslocamentos - grau de liberdade 3.</i>	87
<i>Figura 6.36 -</i>	<i>Histórico de deslocamentos - grau de liberdade 1.</i>	88
<i>Figura 6.37 -</i>	<i>Histórico de deslocamentos - grau de liberdade 2.</i>	89
<i>Figura 6.38 -</i>	<i>Histórico de deslocamentos - grau de liberdade 3.</i>	89
<i>Figura 6.39 -</i>	<i>Histórico de deslocamentos - grau de liberdade 1.</i>	90
<i>Figura 6.40 -</i>	<i>Histórico de deslocamentos - grau de liberdade 2.</i>	91
<i>Figura 6.41 -</i>	<i>Histórico de deslocamentos - grau de liberdade 3.</i>	91
<i>Figura 6.42 -</i>	<i>Histórico de deslocamentos - grau de liberdade 1.</i>	92
<i>Figura 6.43 -</i>	<i>Histórico de deslocamentos - grau de liberdade 3.</i>	93
<i>Figura 6.44 -</i>	<i>Histórico de deslocamentos - grau de liberdade 3.</i>	93
<i>Figura 6.45 -</i>	<i>Histórico de deslocamentos - grau de liberdade 1.</i>	94
<i>Figura 6.46 -</i>	<i>Histórico de deslocamentos - grau de liberdade 2.</i>	95
<i>Figura 6.47 -</i>	<i>Histórico de deslocamentos - grau de liberdade 3.</i>	95

1.1 Importância e Objetivos

Os métodos de análise dinâmica podem ser classificados, de uma maneira geral, em métodos no domínio do tempo e métodos no domínio da frequência, sendo que ambos podem ser resolvidos utilizando-se técnicas de superposição modal ou de integração direta. Os métodos de superposição modal calculam a resposta a partir da superposição das respostas modais e envolvem inicialmente o cálculo das frequências naturais e modos normais do sistema estrutural. Nos métodos de integração direta a resposta é calculada por esquemas de integração numérica a partir das equações de equilíbrio dinâmico em coordenadas nodais. Os métodos no domínio da frequência baseiam-se na resposta do sistema estrutural submetido a uma excitação harmônica e fundamentam-se em técnicas de Transformadas de Fourier.

Os métodos no domínio do tempo são muito conhecidos e têm sido há muito tempo utilizados. Os métodos no domínio da frequência têm se tornado competitivos com os métodos no domínio do tempo desde o aparecimento do algoritmo FFT (Fast Fourier Transform), devido à Cooley e Tukey (1965).

Devido à grande variedade de problemas dinâmicos existentes na prática, torna-se de extrema importância a pesquisa de métodos de análise que permitam a modelagem realística do comportamento dinâmico das estruturas. A introdução de materiais viscoelásticos na engenharia de estruturas exige a pesquisa de métodos para análise dinâmica não-linear, considerando especialmente amortecimento dependente da frequência e amortecimento não-proporcional.

Métodos no domínio do tempo, notadamente integração direta e também superposição modal tem sido amplamente utilizados em análise dinâmica não-linear. Por outro lado, só recentemente métodos no domínio da frequência têm sido utilizados neste tipo de análise.

Em certos sistemas estruturais, as propriedades de rigidez e amortecimento podem depender das frequências de excitação. Isto ocorre, por exemplo, em sistemas solo-estrutura e fluido-estrutura, nos quais as forças de interação são dependentes da frequência. Já em sistemas dotados de amortecimento não proporcional, há um acoplamento das equações modais de movimento, impossibilitando a utilização do método de superposição modal tradicional na solução do problema.

Apesar da complexidade da natureza das forças de amortecimento, seu efeito sobre as estruturas é um assunto vastamente explorado. A consideração de tais forças é de fundamental importância no controle da amplitude das vibrações, a fim de se evitar fenômenos como a ressonância e a falta de conforto. Faz-se necessária, portanto, a pesquisa de novos métodos de análise, a fim de se tratar adequadamente o problema dinâmico com amortecimento não-proporcional ou dependente da frequência.

O presente trabalho de pesquisa tem por objetivo propor um método de análise para sistemas estruturais com vários graus de liberdade dotados de amortecimento não-proporcional, submetidos a excitações dinâmicas. Este método pode ser considerado uma variação da formulação tradicional para a análise dinâmica de estruturas no domínio da frequência, que utiliza as Transformadas Discretas de Fourier (DFT). Na formulação proposta, através de operações matriciais, as Transformadas Discretas de Fourier são realizadas implicitamente, e a resposta do sistema estrutural é calculada no domínio da frequência em coordenadas nodais. Desta forma, evita-se a resolução do problema de autovalor, que em sistemas de múltiplos graus de liberdade pode onerar sobremaneira a análise, devido ao elevado número de operações necessárias à extração dos autovalores.

Para dar suporte aos resultados analíticos obtidos, um programa computacional em linguagem FORTRAN 90 foi desenvolvido. Este programa, além da implementação das equações propostas, permitiu a comparação do método proposto com outros já estabelecidos.

1.2 Descrição da Dissertação

No Capítulo 2, referente à revisão bibliográfica, faz-se um resumo de algumas publicações sobre a análise dinâmica não-linear de estruturas no domínio da frequência e sobre a análise dinâmica de estruturas dotadas de amortecimento não-proporcional. São discutidos ainda aspectos relevantes em relação às propostas e/ou conclusões dos autores.

A formulação tradicional para a solução da equação diferencial de movimento e a formulação matricial do método ImFT (Implicit Fourier Transform) desenvolvido por Claret (1991) e posteriormente ampliado por Ribeiro (1998), para a solução de sistemas de um grau de liberdade, é apresentada no Capítulo 3. Neste capítulo são ainda descritos os conceitos básicos das Transformadas Discretas de Fourier (DFT) e do algoritmo FFT (Cooley e Tukey, 1965).

No Capítulo 4 apresenta-se a formulação para a análise de sistemas de um grau de liberdade no domínio da frequência em coordenadas físicas. O *produto matricial não convencional*, desenvolvido para embasar matematicamente a formulação é apresentado. A formulação proposta é ampliada para sistemas submetidos à condições iniciais. Discutem-se ainda alguns detalhes a respeito da formulação e da implementação computacional realizada.

O Capítulo 5 estende a formulação proposta a sistemas de múltiplos graus de liberdade dotados de amortecimento não proporcional. Detalhes sobre o *produto matricial não convencional* aplicado a tais sistemas são discutidos. Apresentam-se aspectos acerca da implementação computacional realizada.

No Capítulo 6 são fornecidos exemplos numéricos de estruturas analisadas a partir do método proposto. As soluções obtidas são comparadas com as fornecidas por métodos de análise já consagrados. O Capítulo 7 resume as conclusões da pesquisa e apresenta sugestões para futuros trabalhos.

2.1 Introdução

Este capítulo tem por objetivo apresentar resumidamente algumas publicações sobre análise dinâmica não-linear de estruturas no domínio da frequência e sobre a análise dinâmica de estruturas dotadas de amortecimento não-proporcional.

2.2 Revisão da Literatura

O desenvolvimento de métodos numéricos voltados à análise dinâmica de estruturas tem atraído a atenção de pesquisadores em todo o mundo. Tal fato pode ser atribuído, por um lado, aos avanços tecnológicos, que disponibilizam equipamentos computacionais cada vez mais adequados à abordagem de sistemas estruturais mais complexos, e de outro às necessidades dos engenheiros estruturais de considerarem em suas análises novos materiais e novas formas geométricas, exigindo assim novas bases na modelação estrutural. Aspectos econômicos e de segurança, seja das populações ou do ambiente, também têm exigido que estruturas como plataformas marítimas, edifícios altos e usinas nucleares adotem modelos estruturais dinâmicos mais realísticos e sofisticados.

Assim, a análise dinâmica de estruturas pode ser feita no domínio do tempo ou no domínio da frequência. A escolha do método mais adequado depende das características físicas do sistema em estudo e da excitação a que ele estiver submetido.

Métodos no domínio do tempo utilizam geralmente processos de integração passo a passo. Em tais métodos a precisão depende fortemente da grandeza do intervalo de tempo adotado (Bathe, 1982). Dentre esses métodos, pode-se citar o método de Newmark- β (Newmark, 1959) e o método de Wilson- θ (Wilson, 1973). Clough e Penzien (1993) e

Craig (1982) fornecem comparações entre as diferentes técnicas de integração numérica no tempo utilizadas para a solução de sistemas estruturais dinâmicos.

Para os casos onde as propriedades físicas do sistema são dependentes da frequência de excitação, faz-se necessário o cálculo da resposta dinâmica no domínio da frequência. Isto ocorre, por exemplo, em sistemas onde há interação solo-estrutura ou fluido-estrutura. As estruturas modeladas com amortecimento histerético também são tratadas mais adequadamente no domínio da frequência (Clough e Penzien, 1993).

A análise dinâmica linear no domínio da frequência tornou-se uma alternativa à análise no domínio do tempo com o surgimento do algoritmo FFT (Fast Fourier Transform), devido a Cooley e Tukey (1965). Hall (1982) propôs modificações no algoritmo FFT original, a fim de utilizá-lo em dinâmica estrutural. Nesta modificação, o número de termos necessários passa a ser uma potência inteira de 2 multiplicada por 2 ou 3, ao invés de ser uma potência inteira de 2 como no algoritmo original.

Claret e Venâncio Filho (1991) apresentam a formulação matricial para a análise dinâmica de sistemas lineares de um grau de liberdade no domínio da frequência, onde as transformadas de Fourier, discreta e inversa, são realizadas implicitamente. Esta abordagem foi posteriormente estendida por Claret (1991), Venâncio Filho e Claret (1995) e Ribeiro (1998), para sistemas com vários graus de liberdade, tanto lineares como não-lineares.

No aprimoramento dos modelos estruturais ocorrido nos últimos anos, notadamente a partir do surgimento do método de análise por elementos finitos, a modelação do amortecimento estrutural tem sido relegada a um segundo plano, devido à dificuldade que representa e para facilidade na obtenção da solução das equações de movimento.

Em sistemas onde o amortecimento é considerado como distribuído pela estrutura de forma semelhante à massa e a rigidez, ele é dito proporcional ou de Rayleigh. Sistemas com amortecimento proporcional utilizam a técnica de transformação modal para desacoplar as equações de movimento. Assim, a resposta em coordenadas físicas pode ser

obtida pela superposição da resposta em coordenadas modais, tanto no domínio do tempo como no da frequência (Clough e Penzien, 1993). Em sistemas com características mais complexas de amortecimento, a matriz de amortecimento não é mais proporcional à massa e a rigidez do sistema. Diz-se então que o amortecimento é não-proporcional. Amortecimentos do tipo não-proporcional e ou dependente da frequência são predominantes em sistemas dinâmicos solo-estrutura.

A partir dos anos setenta, pesquisadores em todo o mundo como Veletsos e Wei (1971), Novak e Sachs (1973) e Bielak (1975), passaram a considerar o amortecimento não proporcional como variável na modelagem dos sistemas estruturais. Atualmente, o estudo do amortecimento encontra grande interesse no campo do controle de vibrações, seja em estruturas de edifícios altos ou em aeronaves.

A pesquisa e a utilização de novos materiais na engenharia de estruturas torna necessária a pesquisa de métodos para a análise dinâmica não-linear. Assim, é de suma importância a consideração dos amortecimentos do tipo não-proporcional e dependente da frequência. O amortecimento não proporcional é representado por uma matriz que não é ortogonal à matriz modal. Portanto, o sistema de equações não é desacoplável com a utilização da transformação modal. Hurty e Rubinstein (1964) utilizam modos complexos para desacoplar as equações de movimento de sistemas dinâmicos dotados de amortecimento não-proporcional. No entanto, o problema de autovalor para este caso é duas vezes maior que o convencional, e os modos complexos dificultam a interpretação física da resposta do sistema. Ainda assim, este método foi empregado por Singh e Suarez (1980), Veletsos e Ventura (1976), Singh e Ghafory-Ashtiany (1986) e Chen e Taylor (1987), variando entre um e outro autor o processo utilizado para a extração dos modos complexos e na superposição para o cálculo da resposta.

Uma possibilidade de se utilizar o método de superposição modal clássico na obtenção de uma solução aproximada para sistemas com amortecimento não-proporcional, dada por Thomson *et al* (1974) e Warburton e Soni (1977), é desprezar os elementos fora da diagonal da matriz de amortecimento generalizada. No entanto este processo pode levar

à resultados pouco exatos quando as frequências de excitação são próximas da frequência de ressonância.

Outro procedimento utilizado na resolução de sistemas dotados de amortecimento não-proporcional, e que pode ser utilizado para sistemas com quaisquer tipos de não-linearidades é o método das pseudo-forças. Neste processo, os termos não-lineares são transferidos para o lado direito das equações modais de movimento e tratados como pseudo-forças. O sistema resultante é resolvido por um processo iterativo, no domínio do tempo como propôs Claret e Venâncio Filho (1991) e Ibrahimbegovic e Wilson (1989), ou no domínio da frequência, como faz Jangid e Datta (1993). Há ainda processos híbridos tempo-frequência, como os de Kawamoto (1983), Wolf (1987) e Darbre e Wolf (1986).

O método das pseudo-forças é amplamente discutido por Claret e Venancio-Filho (1991), que introduzem os conceitos de índice de convergência e índice de acoplamento, para caracterizar o grau de não-proporcionalidade do sistema. Chen e Taylor (1990) utilizam uma base de vetores de Ritz para desacoplar as equações de movimento e utilizar a técnica de superposição modal na obtenção da resposta.

Capítulo 3 - Análise Dinâmica no Domínio da Frequência - Formulação Clássica e o método ImFT

3.1 Introdução

A análise da resposta dinâmica de sistemas estruturais submetidos a excitações dinâmicas pode ser feita no domínio do tempo ou da frequência. A superioridade de uma abordagem em detrimento à outra dependerá fortemente do problema em questão.

Os métodos baseados no domínio do tempo normalmente utilizam processos de integração passo a passo, tais como o método da aceleração linear, da aceleração média constante ou o método Wilson- θ . Estes métodos podem ser aplicados a sistemas com qualquer tipo de não linearidade. No entanto, a estabilidade e a precisão do processo dependem do intervalo de tempo adotado (Bathe, 1982). Desta forma, um esforço computacional elevado pode ser exigido na solução de sistemas que exijam um intervalo de tempo pequeno na análise.

Os métodos no domínio da frequência podem utilizar intervalos de tempo maiores que os geralmente utilizados nos métodos de integração do domínio do tempo. Tal fato decorre em razão de que os métodos no domínio da frequência utilizam como ferramenta matemática as transformadas de Fourier, cuja estabilidade permite que intervalos de tempo maiores sejam utilizados. Além disso, em sistemas onde as características físicas são dependentes da frequência de excitação, a análise no domínio da frequência é a única forma efetiva de solução. Sistemas modelados com amortecimento histerético e sistemas que envolvem domínios infinitos, tais como sistemas solo-estrutura ou fluido-estrutura só podem ser tratados adequadamente no domínio da frequência (Hall, 1982).

Este capítulo apresenta a formulação clássica para a análise dinâmica de sistemas de um grau de liberdade no domínio da frequência, sendo a resposta obtida através das transformadas discretas de Fourier (DFT). São discutidos os aspectos básicos envolvidos nas transformadas discretas de Fourier e no algoritmo FFT. Apresenta-se ainda a formulação do método ImFT (Implicit Fourier Transform), proposto por Claret (1991) e posteriormente estendido por Ribeiro (1998).

3.2 Solução da Equação Dinâmica no Domínio da Frequência

O sistema de um grau de liberdade mostrado na figura 3.1 está sujeito a um carregamento $p(t)$ aplicado à massa m , a partir do tempo $t = 0$

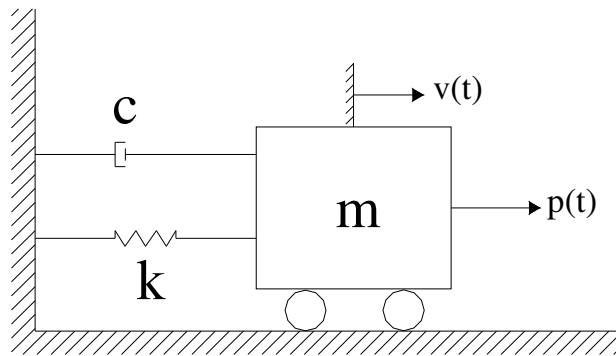


Figura 3.1 - Sistema massa-mola-amortecedor

A equação de movimento é:

$$m \ddot{v}(t) + c \dot{v}(t) + k v(t) = p(t) \quad (3.1)$$

onde c é o amortecimento viscoso, k a rigidez e $\ddot{v}(t)$, $\dot{v}(t)$ e $v(t)$ a aceleração, velocidade e deslocamento da massa, respectivamente.

Para sistemas lineares com condições iniciais nulas, a resposta $v(t)$ pode ser determinada no domínio do tempo através da seguinte integral de convolução (Clough e Penzien, 1993),

$$v(t) = \int_0^t p(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (3.2)$$

sendo t o tempo, τ a variável de integração. e $h(t)$ a função resposta impulso unitário (nula para $t < 0$), ou seja, $h(t - \tau)$ é a resposta da massa a um impulso de magnitude unitária aplicado no tempo $t = \tau$.

A função impulso unitário, figura (3.2) é definida matematicamente como

$$\begin{cases} \delta(t - a) = 0, \text{ para } t \neq a \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - a) dt = 1 \end{cases} \quad (3.3)$$

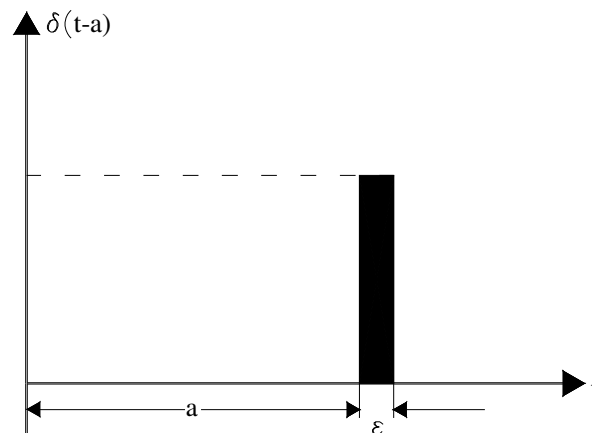


Figura 3.2 - Função impulso unitário.

Deve-se observar que o intervalo de tempo em que função é diferente de zero é, por definição, infinitamente pequeno, ou seja, ε tende a zero no limite, e a amplitude da função neste intervalo de tempo é indefinida. A área sob a curva é definida e igual a unidade.

Como a integral dada na equação (3.3) é adimensional, a unidade da função impulso unitário é s^{-1} .

Para um sistema sub-amortecido, tem-se

$$h(t - \tau) = \frac{1}{m \omega_D} \sin[\omega_D(t - \tau)] \exp[-\xi \omega(t - \tau)] \quad (3.4)$$

onde ω a frequência natural dos sistema, ξ a taxa de amortecimento e ω_D a frequência natural amortecida. Em muitos sistemas, tais como os que envolvem domínios infinitos, não é possível determinar $h(t)$, o que se resolve no domínio da frequência.

Para se resolver a equação (3.1) no domínio da frequência, considera-se o sistema dado na figura (3.1) submetido a uma excitação harmônica unitária $\bar{\omega}$ dada por:

$$p(t) = \exp(i\bar{\omega} t) \quad (3.5)$$

Esta excitação levará a uma resposta da forma:

$$v(t) = H(\bar{\omega}) \exp(i\bar{\omega} t) \quad (3.6)$$

$$\dot{v}(t) = i\bar{\omega} H(\bar{\omega}) \exp(i\bar{\omega} t) = i\bar{\omega} v(t) \quad (3.7)$$

$$\ddot{v}(t) = -\bar{\omega}^2 H(\bar{\omega}) \exp(i\bar{\omega} t) = -\bar{\omega}^2 v(t) \quad (3.8)$$

onde $H(\bar{\omega})$ é uma função da frequência de excitação cuja expressão deseja-se encontrar.

Levando as equações (3.5) a (3.8) na equação (3.1), tem-se

$$(-\bar{\omega}^2 m + i\bar{\omega} c + k) H(\bar{\omega}) = 1 \quad (3.9)$$

Logo,

$$H(\overline{\omega}) = \frac{1}{(-\overline{\omega}^2 m + i\overline{\omega}c + k)} \quad (3.10)$$

A função $H(\overline{\omega})$ é conhecida como função complexa de resposta em frequência. É definida como a resposta do sistema a uma carga harmônica complexa unitária na frequência $\overline{\omega}$. Pode-se demonstrar que $h(t)$, função resposta impulso unitário, e $H(\overline{\omega})$ formam um par de transformadas de Fourier. Assim, caso a primeira seja conhecida, pode-se escrever a segunda como:

$$H(\overline{\omega}) = \int_0^{\infty} h(t) \exp(-i\overline{\omega}t) dt \quad (3.11)$$

ou

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\overline{\omega}) \exp(i\overline{\omega}t) d\overline{\omega} \quad (3.12)$$

A transformada de Fourier do carregamento $p(t)$ da equação (3.1) é:

$$P(\overline{\omega}) = \int_0^{\infty} p(t) \exp(-i\overline{\omega}t) dt \quad (3.13)$$

O teorema da convolução (Wilie e Barret, 1995) define que a convolução no tempo de duas funções e o produto de suas transformadas de Fourier formam um par de transformadas de Fourier. Tomando-se então as equações (3.2), (3.11) e (3.13) e tendo em vista o teorema da convolução, conclui-se que $v(t)$ e o produto $H(\overline{\omega}) P(\overline{\omega})$ formam um par de transformadas de Fourier. Por transformação inversa de Fourier obtém-se

$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\overline{\omega}) H(\overline{\omega}) \exp(i\overline{\omega}t) d\overline{\omega} \quad (3.14)$$

A equação (3.14) é solução da equação (3.1) através de análise no domínio da frequência e usando-se as transformadas de Fourier. Na equação (3.14), a função complexa de resposta em frequência pode ser obtida através da transformação direta de $h(t)$, equação (3.11), ou, quando não existir expressão para esta última, através da solução da equação do movimento para uma carga harmônica unitária, conforme as equações (3.9) e (3.10).

3.3 A Transformada Discreta de Fourier

Na maior parte das situações práticas, a carga $p(t)$ não é tratada de maneira contínua, mas através de uma série de pontos discretos $p(t_i)$. Da mesma forma, a resposta $v(t)$ também é obtida nesses pontos, gerando-se um vetor de resposta $v(t_i)$.

Assim, as equações (3.10), (3.11), (3.13) e (3.14) devem ser modificadas, com as integrais de Fourier sendo substituídas por suas formas discretas, as transformadas discretas de Fourier. As transformadas discretas de Fourier são uma aproximação das transformadas contínuas de Fourier e, como em todas as aproximações, estão sujeitas à erros que devem ser minimizados tanto quanto possível. Esses erros são inerentes ao processo de transformação que envolve três etapas: Discretização no domínio do tempo; truncamento no domínio do tempo e discretização no domínio da frequência (Meirovitch, 1986; O'Brigham, 1974)

A transformação de uma função contínua no tempo em uma função equivalente, discretizada em intervalos iguais a T pode ser vista na figura (3.3). No processo descrito pela figura (3.3), utiliza-se um resultado da teoria das funções generalizadas, segundo o qual o produto de uma função contínua em $t = T$ e uma função impulso vale:

$$f(t) = \delta(t - T) = f(T)\delta(t - T) \quad (3.15)$$

A discretização da função original $f(t)$ da figura (3.3a) é feita multiplicando-a pelo trem de impulsos unitários espaçados pela distância T (figura 3.3b), gerando como

resultado uma função discreta no tempo formada por infinitos pontos (figura 3.3c). A transformada de Fourier da função dada em (3.3c) é obtida pelo Teorema da convolução de funções, conforme exposto em 3.1. A transformada de Fourier de $f(t)$, $F(f)$ está representada em (3.3a), e a transformada do trem de impulsos unitários é dada por outro trem de impulsos $\Delta(f)$ (O’Brigham, 1974), de magnitude igual a $1/T$, espaçados pela distância $1/T$ (figura 3.3b). A convolução dessas duas transformadas se mostra na figura (3.3c), de onde se conclui que a transformada de Fourier da função discretizada a cada intervalo T é uma função periódica, com período igual a $1/T$, igual à função $F(f)$ exceto pela amplitude, que é dividida por T .

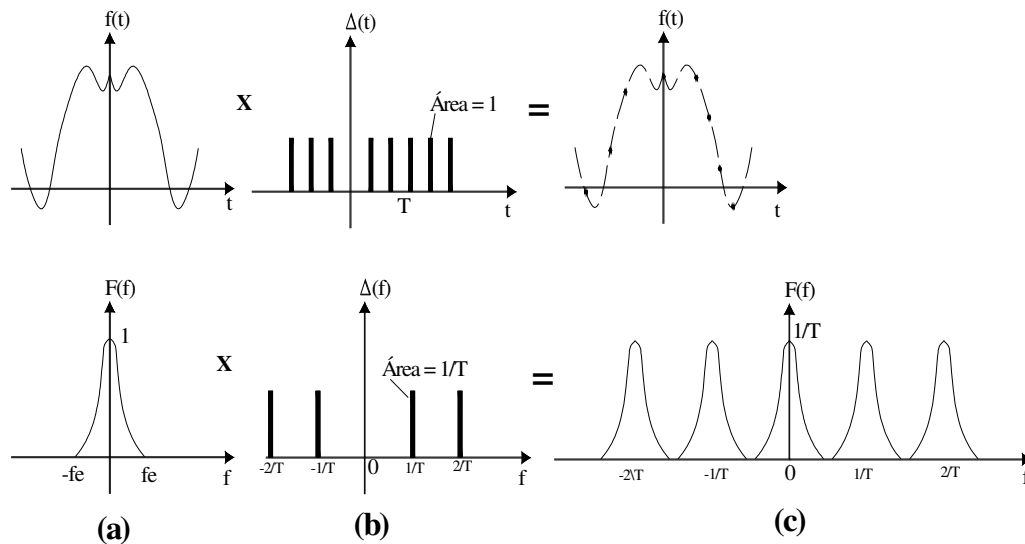


Figura 3.3 - Processo de discretização no tempo.

O processo anteriormente descrito e ilustrado na figura (3.3c) partiu da premissa que o intervalo de discretização T foi pequeno o suficiente para que na figura (3.3c) um período não se misturasse com o outro. Se, no entanto, o intervalo T aumenta, os impulsos $\Delta(f)$ se aproximam, o que pode causar uma superposição nas funções $F(f)$.

Logo, a transformada de Fourier de uma função discretizada com uma taxa de discretização baixa, sofre uma distorção em relação àquelas discretizadas com uma taxa mais alta. Esta distorção é conhecida como *aliasing*, e pode ser entendida como uma

superposição de freqüências de um período sobre outro. Este fenômeno pode ser visualizado na figura (3.4).

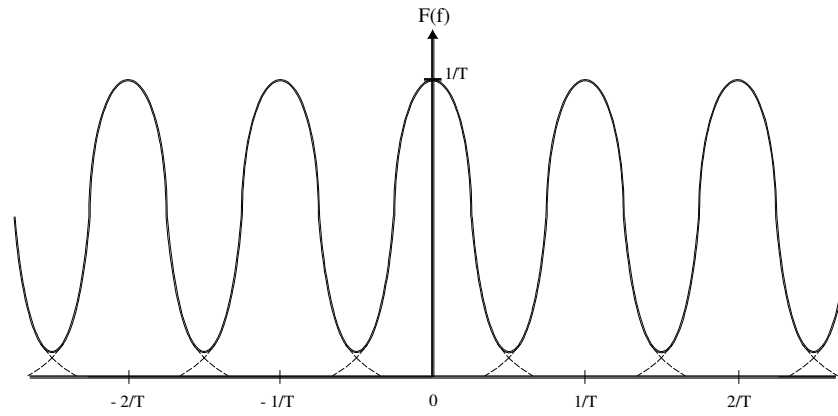


Figura 3.4 - Fenômeno de *aliasing*.

Da figura (3.3c) vê-se que a taxa mínima de discretização para evitar a superposição de freqüências é $T=1/(2f_c)$, sendo f_c a mais alta freqüência de $F(f)$. Portanto, a fim de se evitar esta distorção deve-se ter

$$T < \frac{1}{2f_c} = \frac{\pi}{\bar{\omega}_{\max}} \quad (3.16)$$

Retornando às equações que definem a análise da resposta no domínio da freqüência, (equações (3.11), (3.13) e (3.14), aqui repetidas)

$$H(\bar{\omega}) = \int_0^{\infty} h(t) \exp(-i\bar{\omega}t) dt \quad (3.11)$$

$$p(t) = \int_0^{\infty} p(t) \exp(-i\bar{\omega}t) dt \quad (3.13)$$

$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\overline{\omega}) H(\overline{\omega}) \exp(i\overline{\omega}t) d\overline{\omega} \quad (3.14)$$

as transformadas discretas que as substituem são

$$H(m\Delta\overline{\omega}) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} h(n\Delta t) \exp\left[-2\pi i \left(\frac{mn}{N}\right)\right] \quad m = 0, \dots, N-1 \quad (3.17)$$

$$P(m\Delta\overline{\omega}) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} p(n\Delta t) \exp\left[-2\pi i \left(\frac{mn}{N}\right)\right] \quad m = 0, \dots, N-1 \quad (3.18)$$

$$v(n\Delta t) = \frac{\Delta\overline{\omega}}{2\pi} \sum_{m=0}^{N-1} P(m\Delta\overline{\omega}) H(m\overline{\omega}) \exp\left[2\pi i \left(\frac{mn}{N}\right)\right] \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (3.19)$$

sendo $H(m\Delta\overline{\omega})$, $P(m\Delta\overline{\omega})$, $v(n\Delta t)$, $h(n\Delta t)$ e $p(n\Delta t)$ as funções $H(\overline{\omega})$, $P(\overline{\omega})$, $v(t)$, $h(t)$ e $p(t)$ discretizadas. Por motivos já mencionados, $H(m\Delta\overline{\omega})$ pode também ser obtida através da solução da equação (3.10) para valores discretos de $m\Delta\overline{\omega}$.

Nas equações acima, os intervalos de discretização Δt e $\Delta\overline{\omega}$ podem ser expressos em termos do período T e do número N de pontos discretos deste período, como:

$$\Delta t = T/N \quad (3.20)$$

e

$$\Delta\overline{\omega} = 2\pi/T \quad (3.21)$$

Nota-se que no somatório da equação (3.19) não existem frequências negativas, o que está aparentemente em desacordo com sua forma contínua, dada pela equação (3.14).

Porém, assumindo N par, essas frequências ocorrem no intervalo $N/2 < m < N$, como mostrado na tabela 3.1, devido a periodicidade das funções $P(m\Delta\bar{\omega})$ e $H(m\Delta\bar{\omega})$.

Tabela 3.1 - Relação entre m e $m\Delta\bar{\omega}$ para N par.

m	Frequência $m\Delta\bar{\omega}$ correspondente
0	0
1	$\Delta\bar{\omega}$
2	$2\Delta\bar{\omega}$
...	...
$N/2 - 1$	$(N/2 - 1)\Delta\bar{\omega}$
$N/2$	$(N/2)\Delta\bar{\omega}$
$N/2 + 1$	$-(N/2 - 1)\Delta\bar{\omega}$
...	...
$N-2$	$-2\Delta\bar{\omega}$

Sendo $p(n\Delta t)$ e $h(n\Delta t)$ reais, $P(m\Delta\bar{\omega})$ e $H(m\Delta\bar{\omega})$ tem seus valores em $m = N-j$ como complexos conjugados dos valores em $m = j$, para $j = 1, 2, \dots, N/2-1$. Para $m = 0$, os valores são reais e para $m = N/2$, aparece um termo imaginário. Neste caso, ou o termo imaginário é desprezado (Claret, 1991) ou apenas a parte real é utilizada nos cálculos (Hall e Beck, 1993).

A frequência máxima, ou frequência de Nyquist ocorre em $m = N/2$, isto é, $\Delta\bar{\omega}_{\max} = (N/2)\Delta\bar{\omega}$ ou

$$\Delta\bar{\omega}_{\max} = \frac{\pi}{\Delta t} \quad (3.22)$$

De forma análoga ao caso contínuo, onde o teorema da convolução estabelece a equivalência entre a equação (3.1) e as equações (3.11), (3.13) e (3.14), as equações (3.17), (3.18) e (3.19) equivalem a convolução discreta representada pela equação (3.23).

$$v(n\Delta t) = \Delta t \sum_{j=0}^{N-1} p(j\Delta t)h(n\Delta t - j\Delta t), \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (3.23)$$

onde as funções discretas $v(n\Delta t)$, $p(j\Delta t)$ e $h(n\Delta t - j\Delta t)$ são periódicas e de período igual a N , devido à periodicidade implícita às transformadas discretas de Fourier.

Para que a equação (3.23) e também as equações (3.17), (3.18) e (3.19) forneçam uma boa aproximação das funções contínuas que representam, devem ser adotados valores adequados para T , Δt , $\Delta\bar{\omega}$ e $\bar{\omega}_{\max}$, sendo que a definição de duas dessas variáveis determina as outras duas. Determina-se inicialmente o valor T como o tempo necessário para o decaimento da resposta, o que já implica em um valor para $\Delta\bar{\omega}$. A seguir, escolhe-se um Δt suficientemente pequeno para se reduzir os erros causados pela discretização, conduzindo também a um valor adequado para $\bar{\omega}_{\max}$. Assim, os erros devido à superposição de períodos (*overlapping*), *aliasing* e ondulações (*ripples*) são minimizados (Ribeiro, 1998).

3.4 O algoritmo FFT

O cálculo das transformadas de Fourier exige N^2 multiplicações, o que para um número N elevado torna a tarefa dispendiosa em termos de tempo e memória computacional.

O surgimento do algoritmo FFT (*Fast Fourier Transform*) em 1965, (Cooley e Tukey) 1965 reduziu o número de multiplicações para um valor igual a $N \log_2 N$. Desta forma, inúmeros processos até então inviáveis tornaram-se possíveis, o que levou a um avanço em muitos campos científicos (Bracewell, 1990).

A transformada rápida de Fourier (FFT) é apenas um algoritmo para se calcular mais rapidamente as transformadas discretas de Fourier. O fato de as transformadas discretas de Fourier conterem o termo $\exp[2\pi i(mn/N)]$ e de se tomar N da forma $N = 2^j$ explica a eficiência do algoritmo.

Para a cálculo da resposta $v(n\Delta t)$, equação(3.19), calcula-se a soma da equação (3.18) por FFT, obtendo-se assim $P(m\Delta\overline{\omega})$. Em seguida, dois caminhos podem ser tomados: Repete-se o processo para o cálculo de $H(m\Delta\overline{\omega})$, equação(3.17), ou, o que é mais comum, calculam-se estes últimos valores pela equação(3.10). Em seguida realiza-se o produto $P(m\Delta\overline{\omega})H(m\Delta\overline{\omega})$, aplica-se novamente a FFT, equação(3.19) e chega-se a $v(n\Delta t)$.

Desde seu surgimento, várias versões do algoritmo FFT tem sido desenvolvidas, cada qual adaptando-o aos seus vários campos de aplicação. Em dinâmica estrutural, especificamente, cita-se o trabalho de Hall (1982), onde a condição de se tomar N igual a uma potência inteira de 2 modifica-se para adotar N como uma potência inteira de 2 multiplicada por 2 ou 3.

3.5 O método ImFT

3.5.1 Introdução

Apesar do grande avanço representado pelo surgimento do algoritmo FFT e da otimização do consumo de tempo computacional por ele propiciado, duas restrições que podem se tornar desvantagens são apresentadas pelo algoritmo quando do cálculo da resposta dinâmica de um sistema estrutural.

A primeira deve-se ao fato da imposição de que o número de pontos a serem usados na discretização das funções seja uma potência de 2, ou seja, $N = 2^j$, sendo j um número

inteiro. Desta forma, a cada aumento de precisão requerido, faz-se necessário dobrar o número de pontos necessários, com o conseqüente aumento do esforço computacional e da área de memória exigida.

Outro aspecto refere-se ao fato de que, com o uso da FFT, a resposta é calculada necessariamente em N pontos, enquanto que o comportamento do sistema geralmente pode ser descrito com um número bem menor deles.

Apresenta-se neste item a formulação do método ImFT, proposto por Claret (1991), e posteriormente ampliado por Venancio Filho e Claret (1995) e Ribeiro (1998). Neste método a análise dinâmica não apresenta exigência acerca do número N de termos no cálculo das transformadas discretas de Fourier, e a resposta pode ser calculada em um número arbitrário de pontos, desde que este número represente adequadamente o comportamento do sistema. Outra vantagem desta formulação é que as transformadas discretas de Fourier, direta e inversa são realizadas ao mesmo tempo, implicitamente, no procedimento que leva à resposta no domínio do tempo.

3.5.2 Formulação Matricial

A análise no domínio da frequência, da resposta de um sistema de um grau de liberdade submetido a uma excitação dinâmica, depende da avaliação das transformadas de Fourier expressas pelas equações (3.18) e (3.19), aqui repetidas.

$$P(m\Delta\overline{\omega}) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} p(n\Delta t) \exp \left[-2\pi i \left(\frac{mn}{N} \right) \right] \quad m = 0, \dots, N-1 \quad (3.18)$$

$$v(n\Delta t) = \frac{\Delta\overline{\omega}}{2\pi} \sum_{m=0}^{N-1} P(m\Delta\overline{\omega}) H(m\overline{\omega}) \exp \left[2\pi i \left(\frac{mn}{N} \right) \right] \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (3.19)$$

com $H(m\Delta\overline{\omega})$ sendo dado por:

$$H(m\Delta\overline{\omega}) = \frac{1}{-(m\Delta\overline{\omega})^2 m + i(m\Delta\overline{\omega})c + k}, \quad m = 0, \dots, N-1 \quad (3.24)$$

O carregamento e a resposta são dados em suas formas discretizadas, $p(n\Delta t)$ e $v(n\Delta t)$.

Para N par, contam-se as frequências de 0 a $N-1$, mas equivalem àquelas mostradas na tabela (3.1), devido à periodicidade inerente às transformadas discretas de Fourier.

Os intervalos Δt e $\Delta\overline{\omega}$, como definidos anteriormente, (e aqui repetidos) são

$$\Delta t = T/N \quad (3.20)$$

e

$$\Delta\overline{\omega} = 2\pi/T \quad (3.21)$$

sendo T o período adotado para o carregamento.

Tomando-se $P(m\Delta\overline{\omega})$ e $\mathbf{p}(n\Delta t)$ como os vetores

$$\mathbf{P} = \{P(m\Delta\overline{\omega})\} = \{P[0], P[\Delta\overline{\omega}], P[2\Delta\overline{\omega}], \dots, P[(N-1)\Delta\overline{\omega}]\} \quad (3.25)$$

$$\mathbf{p} = \{p(n\Delta t)\} = \{p[0], p[\Delta t], p[2\Delta t], \dots, p[(N-1)\Delta t]\} \quad (3.26)$$

e sendo $e^{-imn\alpha}$ o termo genérico da matriz \mathbf{E}^* , com

$$\alpha = 2\pi/N \quad (3.27)$$

tem-se

$$\mathbf{E}^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-i\alpha} & e^{-i2\alpha} & \dots & e^{-i(N-1)\alpha} \\ 1 & e^{-i2\alpha} & e^{-i4\alpha} & \dots & e^{-i2(N-1)\alpha} \\ 1 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-i(N-1)\alpha} & e^{-i2(N-1)\alpha} & \dots & e^{-i(N-1)^2\alpha} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Assim, as N equações expressas pela equação (3.18) podem ser colocadas sob a seguinte forma matricial.

$$\mathbf{P} = \Delta t \mathbf{E}^* \mathbf{p} \quad (3.29)$$

Tomando $\mathbf{v}(n\Delta t)$ como o vetor

$$\mathbf{v} = \{v(n\Delta t)\} = \{v[0], v[\Delta t], v[2\Delta t], \dots, v[(N-1)\Delta t]\} \quad (3.30)$$

e sendo $\mathbf{H}(m\Delta\omega)$ a matriz

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} H[0] & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & H[\Delta\omega] & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & H[2\Delta\omega] & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & H[(N-1)\Delta\omega] \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

as N equações expressas pela equação (3.19) podem ser colocadas sob a seguinte forma matricial

$$\mathbf{v} = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \mathbf{E} \mathbf{H} \mathbf{P} \quad (3.32)$$

sendo \mathbf{E} a matriz cujo termo genérico é dado por $e^{i m n \alpha}$, com α dado por (3.27).

Então,

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{i\alpha} & e^{i2\alpha} & \dots & e^{i(N-1)\alpha} \\ 1 & e^{i2\alpha} & e^{i4\alpha} & \dots & e^{i2(N-1)\alpha} \\ 1 & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & e^{i(N-1)\alpha} & e^{i2(N-1)\alpha} & \dots & e^{i(N-1)^2\alpha} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Substituindo-se a equação (3.29) na equação (3.32), tem-se

$$\mathbf{v} = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \Delta t \mathbf{E} \mathbf{H} \mathbf{E}^* \mathbf{p} \quad (3.34)$$

Considerando-se as equações (3.20) e (3.21), vem:

$$\frac{1}{N} = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \Delta t \quad (3.35)$$

Então,

$$\mathbf{v} = \frac{1}{N} \mathbf{E} \mathbf{H} \mathbf{E}^* \mathbf{p} \quad (3.36)$$

A equação (3.36) é a equação básica da formulação matricial para a análise dinâmica de sistemas de um grau de liberdade no domínio da frequência, da forma como foi originalmente proposta por Claret (1991). Nesta formulação está representada a transformada de Fourier do carregamento, o produto desta transformada pela função de

resposta complexa em frequência e a transformada inversa de Fourier deste produto, gerando a resposta no domínio do tempo.

Fazendo-se o produto matricial $\mathbf{E} \times \mathbf{E}^*$ tem-se para a linha j de \mathbf{E} e a coluna k de \mathbf{E}

$$\left(1, e^{ji\alpha}, e^{2ji\alpha}, \dots, e^{(N-1)ji\alpha}\right) \times \left(1, e^{-ki\alpha}, e^{-2ki\alpha}, \dots, e^{-(N-1)ki\alpha}\right) = \left(1 + e^{(j-k)i\alpha} + e^{2(j-k)i\alpha} + \dots + e^{(N-1)(j-k)i\alpha}\right)$$

Então,

$$\left(1 + e^{(j-k)i\alpha} + e^{2(j-k)i\alpha} + \dots + e^{(N-1)(j-k)i\alpha}\right) = \sum_{m=0}^{N-1} e^{m(j-k)i\alpha}$$

Uma série geométrica finita tem a seguinte soma (Wilie e Barret, 1995)

$$1 + Z + Z^2 + Z^3 + \dots + Z^{N-1} = \sum_{m=0}^{N-1} Z^m = \frac{1 - Z^N}{1 - Z} \quad (3.37)$$

Assim, para $Z = e^{(j-k)i\alpha}$, com $j \neq k$, tem-se,

$$\sum_{m=0}^{N-1} e^{m(j-k)i\alpha} = \frac{1 - e^{N(j-k)i\alpha}}{1 - e^{(j-k)i\alpha}} \quad (3.38)$$

Utilizando-se a equação (3.27) vem

$$e^{N(j-k)i\alpha} = e^{2\pi(j-k)i} \quad (3.39)$$

Portanto,

$$\sum_{m=0}^{N-1} e^{m(j-k)i\alpha} = \frac{1 - e^{2\pi(j-k)i}}{1 - e^{(j-k)i\alpha}} \quad (3.40)$$

Pela equação de Euler,

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta) \quad (3.41)$$

Assim,

$$e^{2\pi(j-k)i} = \cos[(j-k)2\pi] + i \sin[(j-k)2\pi] \quad (3.42)$$

Como

$$\cos(n 2\pi) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

e

$$\sin(n 2\pi) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Tem-se que

$$e^{2\pi(j-k)i} = 1 \quad (3.43)$$

Logo,

$$\sum_{m=0}^{N-1} e^{m(j-k)i\alpha} = 0 \quad \text{Para } j \neq k$$

e

$$\sum_{m=0}^{N-1} e^{m(j-k)i\alpha} = \sum_{m=0}^{N-1} e^0 = N \quad \text{Para } j = k$$

Combinando os dois casos, tem-se o elemento genérico do produto $\mathbf{E} \times \mathbf{E}^*$ dado por

$$\sum_{m=0}^{N-1} e^{m(j-k)i\alpha} = \begin{cases} N, & \text{se } j = k \\ 0, & \text{se } j \neq k \end{cases} \quad (3.44)$$

Conforme a equação (3.44), o produto das matrizes \mathbf{E} e \mathbf{E}^* será da forma:

$$\mathbf{E} \times \mathbf{E}^* = \begin{bmatrix} N & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & N & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & N & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

ou, escrevendo de forma alternativa:

$$\mathbf{E} \times \mathbf{E}^* = \begin{bmatrix} N & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & N & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & N & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Logo,

$$\mathbf{E} \times \mathbf{E}^* = N \times \mathbf{I} \quad (3.47)$$

ou

$$\mathbf{E} \times \mathbf{E}^* \times \frac{1}{N} = \mathbf{I} \quad (3.48)$$

Portanto, as matrizes \mathbf{E} e \mathbf{E}^* apresentam relações de inversibilidade.

Reescrevendo a equação (3.26), tem-se:

$$\mathbf{v} = \frac{1}{N} \mathbf{e} \mathbf{p} \quad (3.49)$$

Onde:

$$\mathbf{e} = \mathbf{E} \mathbf{H} \mathbf{E}^* \quad (3.50)$$

A equação (3.49) representa de forma sintética o cálculo da resposta, onde o vetor de cargas no domínio do tempo é transformado diretamente no vetor de respostas já no domínio do tempo, com todas as expressões intermediárias embutidas na matriz \mathbf{e} .

O produto matricial dado pela equação (3.50) ao ser realizado por operações no domínio da frequência e do tempo deve ser tomado de maneira que a equação (3.49) obedeça ao princípio da causalidade, o que deve ser seguido por todos os sistemas fisicamente realizáveis. A equação (3.49) será causal desde que a resposta $\mathbf{v}(t)$ em um instante t dependa da história prévia da excitação $\mathbf{p}(\tau)$, para $\tau < t$. (Crandall, 1969). Para que o princípio da causalidade seja obedecido, a matriz \mathbf{e} deve ser ter todos os elementos acima da diagonal principal nulos, ou seja, deve ser triangular inferior.

Capítulo 4 - Análise Dinâmica no Domínio da Freqüência em Coordenadas Físicas

4.1 Introdução

Será apresentada neste capítulo uma formulação alternativa para a análise dinâmica de sistemas estruturais com um grau de liberdade, onde o problema de autovalor não é resolvido, e não há exigência sobre o número N de pontos a serem adotados nas transformadas discretas de Fourier. A formulação apresentada será posteriormente expandida e utilizada na análise de sistemas dotados de amortecimento não proporcional. Tais sistemas não podem ser desacoplados pela transformação modal, uma vez que a matriz de amortecimento não é ortogonal à matriz de massa e à matriz de rigidez.

4.2 Resposta dinâmica de sistemas de um grau de liberdade

Seja um sistema com 1 grau de liberdade, cuja equação de movimento é dada pela equação (4.1),

$$m \ddot{v}(t) + c \dot{v}(t) + k v(t) = p(t) \quad (4.1)$$

Onde m, c e k são respectivamente a massa, o amortecimento e a rigidez da estrutura. $\ddot{v}(t)$, $\dot{v}(t)$ e $v(t)$ são a aceleração, a velocidade e o deslocamento, respectivamente. $p(t)$ é o carregamento atuante na estrutura.

A equação de equilíbrio dinâmico no instante t_n é

$$m \ddot{v}(t_n) + c \dot{v}(t_n) + k v(t_n) = p(t_n) \quad (4.2)$$

Pode-se escrever o carregamento como

$$p(t_n) = P(\omega_m) \exp(i\omega_m t_n) \quad (4.3)$$

e analogamente os deslocamentos como

$$v(t_n) = V(\omega_m) \exp(i\omega_m t_n) \quad (4.4)$$

para o instante t_n e a frequência ω_m , onde n e $m = 0, 2, \dots, N-1$.

Levando a equação (4.4) e suas derivadas na equação (4.1), tem-se

$$(-\omega_m^2 m + i \omega_m c + k) V(\omega_m) = P(\omega_m) \quad (4.5)$$

Na equação (4.5), o termo $(-\omega_m^2 m + i \omega_m c + k)$ é análogo àquele formulado para sistemas de um grau de liberdade, dado na equação (3.9).

Definire-se $G_m^{(m)}$ como

$$G_m^{(m)} = -\omega_m^2 m + i \omega_m c + k \quad (4.6)$$

Assim, substituindo-se a equação (4.6) na equação (4.5) tem-se

$$G_m^{(m)} V(\omega_m) = P(\omega_m) \quad (4.7)$$

A função $G^{(m)}$ dada nas equações (4.6) e (4.7), é aqui definida como **função complexa inversa de resposta em frequência**. Nota-se que esta função depende da frequência ω_m da força de excitação.

Efetuando-se a transformada inversa discreta de Fourier de $P(\omega_m)$, tem-se

$$p(t_n) = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sum_{m=0}^{N-1} P(\omega_m) \exp(mn i\alpha) \quad (4.8)$$

Substituindo-se a equação (4.7) na equação (4.8), tem-se

$$p(t_n) = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sum_{m=0}^{N-1} \exp(mn i\alpha) G_m^{(m)} V(\omega_m) \quad (4.9)$$

Tomando-se a transformada discreta de $V(\omega_m)$, vem

$$V(\omega_m) = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} v(t_n) \exp(-mk i\alpha) \quad (4.10)$$

Finalmente, substituindo-se a equação (4.10) na equação (4.9), obtém-se

$$p(t_n) = \frac{1}{N} \left[\sum_{m=0}^{N-1} \exp(mn i\alpha) G_m^{(m)} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \exp(-mk i\alpha) v(t_n) \right) \right] \quad (4.11)$$

onde

$$\frac{\Delta\omega \Delta t}{2\pi} = \frac{1}{N} \quad (4.12)$$

N é o número de pontos de discretização utilizados na transformada discreta de Fourier. Ressalta-se que o número N não necessita ser uma potência inteira de 2, como exigido no algoritmo FFT.

4.2.1 Formulação Matricial

Escrevendo a equação (4.11) em forma matricial, tem-se:

$$\mathbf{p} = \frac{1}{N} \mathbf{E} \mathbf{G}^{(m)} \mathbf{E}^* \mathbf{v} \quad (4.13)$$

Sendo \mathbf{p} o vetor histórico de carregamento, discretizado em N pontos, \mathbf{E} e \mathbf{E}^* as matrizes das transformadas de Fourier, $\mathbf{G}^{(m)}$ o vetor função complexa inversa de resposta em frequência e \mathbf{v} o vetor histórico de deslocamentos, incógnita do problema, discretizado em N pontos.

Uma forma compacta da equação (4.13) pode ser obtida a partir de transformações algébricas. Inicialmente, reescreve-se (4.13) como:

$$N \mathbf{p} = \mathbf{E} \mathbf{G}^{(m)} \mathbf{E}^* \mathbf{v} \quad (4.14)$$

Pré-multiplicando a equação (4.13) por \mathbf{E}^{-1} , tem-se

$$\mathbf{E}^{-1} N \mathbf{p} = \mathbf{E}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{G}^{(m)} \mathbf{E}^* \mathbf{v} \quad (4.15)$$

Tendo em vista a relação existente entre as matrizes \mathbf{E} e \mathbf{E}^* , dada na equação (3.48), pode-se escrever

$$\mathbf{E}^* \mathbf{p} = \mathbf{G} \mathbf{E}^{*(m)} \mathbf{v} \quad (4.16)$$

De acordo com a variação indicial estabelecida na equação (4.11) o produto matricial $\mathbf{G} \times \mathbf{E}^{*(m)}$ não é definido, ou seja, não pode ser realizado da forma tradicional. Faz-se necessário, então, definir operações matriciais que atendam às condições impostas pelo problema.

4.2.2 Produto matricial não convencional

A definição tradicional do produto de duas matrizes exige que o número de colunas da primeira seja igual ao número de linhas da segunda. Assim, considerando duas matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} , o produto \mathbf{AB} só poderá ser efetuado se o número de colunas de \mathbf{A} for igual ao número de linhas de \mathbf{B} . Diz-se então que \mathbf{A} e \mathbf{B} são *compatíveis para o produto \mathbf{AB}* .

Seja \mathbf{A} uma matriz de ordem $(m \times p)$, com elementos a_{ik} e \mathbf{B} uma matriz de ordem $(p \times n)$ com elementos b_{ik} . Então, \mathbf{A} e \mathbf{B} são compatíveis para o produto \mathbf{AB} , que é uma matriz \mathbf{D} de ordem $(m \times n)$ cujos elementos são dados por

$$d_{ik} = \sum_{s=1}^p a_{is} b_{sk} \quad (4.17)$$

Assim, o produto matricial $\mathbf{G} \times \mathbf{E}^{*(m)}$ dado na equação (4.11) não é definido, uma vez que o vetor $\mathbf{G}^{(m)}$, contendo as N frequências discretas ω_m é de ordem $(N \times 1)$ e a matriz \mathbf{E}^* é de ordem $(N \times N)$.

Seja $\mathbf{G}^{(m)}$ o vetor de ordem $(N \times 1)$, com elementos complexos G_m e \mathbf{E}^* uma matriz de ordem $(N \times N)$, com elementos complexos E_{mn}^* . Define-se o **produto matricial não**

convencional entre as matrizes $\mathbf{G}^{(m)}$ e \mathbf{E}^* , denotado por $[\cdot]$, como sendo uma matriz \mathbf{C} , de ordem $(N \times N)$, cujos elementos complexos são dados por

$$C_{mn} = G_m E_{mn}^* \quad (4.18)$$

onde n e $m = 0, 1, 2, \dots, N-1$.

A única condição imposta ao produto, que pode ser verificada pela equação (4.18) é a de que o número de linhas do vetor $\mathbf{G}^{(m)}$ deve ser igual ao número de linhas da matriz \mathbf{E}^* . Esta condição, no entanto é automaticamente satisfeita pela própria formulação, uma vez que o número N de pontos requeridos às transformadas de Fourier (embutidas nas matrizes \mathbf{E} e \mathbf{E}^*) é o mesmo utilizado na discretização das frequências, armazenadas no vetor $\mathbf{G}^{(m)}$.

Retornando a equação (4.16), tendo em vista a equação (4.18), tem-se

$$\mathbf{E}^* \mathbf{p} = \mathbf{C} \mathbf{v} \quad (4.19)$$

Fazendo-se

$$\mathbf{E}^* \mathbf{p} = \mathbf{B} \quad (4.20)$$

tem-se finalmente

$$\mathbf{B} = \mathbf{C} \mathbf{v} \quad (4.21)$$

A equação (4.21) representa, em forma sintética, o cálculo da resposta do sistema no domínio da frequência em coordenadas físicas, onde o vetor de cargas no domínio do tempo é transformado diretamente no vetor de respostas também no domínio do tempo.

Matematicamente, a equação (4.21) representa um sistema matricial de N equações complexas, cuja solução é o histórico de deslocamentos, discretizado em N pontos.

A relação dada na equação (4.21) mostra que o vetor histórico de deslocamentos \mathbf{v} é formado por N elementos, constituídos pela soma de um termo real e um termo complexo. Desta forma, cada elemento em \mathbf{v} terá uma parte real e uma parte imaginária. A resposta dada pela equação (4.21) deve ser real, uma vez que a parte imaginária dos deslocamentos não possui significado físico. Assim, a parte imaginária dos elementos de \mathbf{v} pode ser desprezada. Claret (1991) demonstra que a não consideração da parte imaginária não afeta a precisão da resposta, razão pela qual este procedimento será aqui adotado.

4.2.3 Condições iniciais

Seja agora um sistema de um grau de liberdade, submetido a uma excitação dinâmica, deslocado inicialmente de sua posição de equilíbrio. Aplica-se a este sistema uma velocidade inicial \dot{v}_0 , conforme mostra a figura 4.1. Desta forma, as condições iniciais são um deslocamento inicial v_0 e uma velocidade inicial \dot{v}_0 .

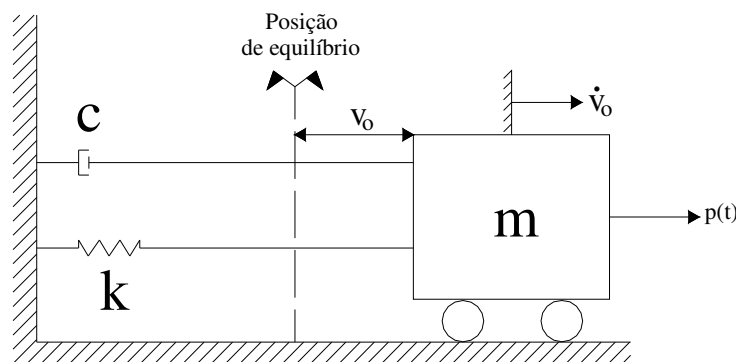


Figura 4.1 - Sistema submetido a condições iniciais

A resposta do sistema a um deslocamento v_o é obtida deslocando-se a origem dos eixos para v_o e utilizando-se a equação (4.16) submetida a uma força $-F_o$ (Ribeiro, 1998).

Assim,

$$\mathbf{E}^* (-F_o \mathbf{x} \mathbf{1}) = \mathbf{G}^{(m)} [\cdot] \mathbf{E}^* \mathbf{v} + v_o \mathbf{1} \quad (4.22)$$

onde $\mathbf{1}$ é um vetor de ordem $(N \times 1)$ contendo 1 em todas as posições.

A força $-F_o$ é a força estática da mola devido ao deslocamento v_o . Se uma análise linear elástica é utilizada, a força F_o é dada por

$$F_o = K v_o \quad (4.23)$$

Em caso de análise não-linear, F_o é obtido do diagrama carga x deslocamento da mola. (Mansur *et al*, 2000).

Uma expressão para a resposta devido à velocidade inicial \dot{v}_o é obtida devido ao fato de que a resposta $h(t)$ de um sistema a um impulso unitário $\delta(t)$ é igual à resposta de mesmo sistema a uma velocidade igual a $(1/m)$ (Meirovitch, 1986).

Assim, a resposta a uma velocidade inicial igual a $\dot{v}_o = m \dot{v}_o \left(\frac{1}{m} \right)$ é dada por

$$v(t) = m \dot{v}_o h(t) \quad (4.24)$$

A equação (4.24) é equivalente à resposta à força

$$F(t) = m \dot{v}_o \delta(t) \quad (4.25)$$

Sendo $\delta(t)$ a função impulso unitário aplicada em $t=0$. Para ser utilizada na equação (4.16), a função impulso unitário deve ser escrita como

$$\delta(t) = \frac{1}{\Delta t} \delta \quad (4.26)$$

δ é um vetor de ordem $(N \times 1)$, com o primeiro elemento igual a 1 e todos os demais nulos.

Logo, substituindo-se a equação (4.26), na equação (4.25), tem-se

$$F(t) = m \dot{v}_o \frac{1}{\Delta t} \delta \quad (4.27)$$

Substituindo-se \mathbf{p} na equação (4.16) por $F(t)$ dado na equação (4.27), obtém-se a resposta do sistema submetido à velocidade inicial, dada por

$$\mathbf{E}^* \left[\left(m \dot{v}_o \right) / \Delta t \right] \delta = \mathbf{G}^{(m)}[.] \mathbf{E}^* \mathbf{v} \quad (4.28)$$

Para um sistema submetido à uma carga \mathbf{p} , deslocamento inicial v_o e velocidade inicial \dot{v}_o , o vetor \mathbf{p} na equação (4.16) é substituído pelo vetor Ψ , dado por

$$\Psi = \mathbf{p} - (K v_o \mathbf{1}) + \left(m \dot{v}_o \right) / \Delta t \delta \quad (4.29)$$

Desta forma, a resposta de um sistema submetido à uma carga \mathbf{p} , deslocamento inicial \mathbf{v}_0 e velocidade inicial $\dot{\mathbf{v}}_0$ fica sob a forma

$$\mathbf{E}^* \mathbf{\Psi} = \mathbf{G}^{(m)} [\cdot] \mathbf{E}^* \mathbf{v} + \mathbf{v}_0 \mathbf{1} \quad (4.30)$$

ou

$$\mathbf{E}^* \mathbf{\Psi} = \mathbf{C} \mathbf{v} + \mathbf{v}_0 \mathbf{1} \quad (4.31)$$

onde $[\cdot]$ denota o *produto matricial não convencional*.

4.2.4 Implementação computacional

O objetivo da implementação computacional da formulação proposta é resolver o sistema de equações representado pela equação (4.21) ou (4.29), onde a resposta do sistema é obtida através da análise no domínio da frequência. As transformadas discretas de Fourier são realizadas implicitamente e não se faz necessária a extração dos autovalores do problema. Desse fato decorre a principal vantagem numérica dessa formulação quando aplicada a análise dinâmica não linear.

As matrizes das transformadas discretas de Fourier apresentam propriedades notáveis, advindas da natureza de seus termos genéricos, que permitem simplificações em sua estrutura, como mostram Claret (1991) e Ribeiro (1998). Estas simplificações conseqüentemente trazem efeitos na implementação da equação (4.21).

A implementação computacional do *produto matricial não convencional* não apresenta maiores dificuldades, uma vez que é feita exatamente como se mostra na equação (4.18). A construção do vetor \mathbf{G} envolve a realização de 3 produtos reais e 1 soma para cada elemento, conforme mostra a equação (4.6). Computacionalmente, um número

complexo do tipo $(a + bi)$ é escrito como (a, b) , razão pela qual uma soma e um produto são omitidos. Desta forma, sendo o vetor \mathbf{G} formado por N elementos, para sua construção são realizados $3N$ produtos e N somas. A matriz \mathbf{C} , formada pelo *produto matricial não convencional* é formada por N^2 elementos, cada um dos quais gerado a partir do produto de dois números complexos. Como, computacionalmente cada multiplicação complexa equivale a 4 multiplicações reais e 2 somas, na matriz \mathbf{C} tem-se um total de $4N^2$ produtos e $2N^2$ somas.

Se uma maior precisão é requerida na análise, o número N de pontos utilizados nas transformadas de Fourier deve ser aumentado. Seja ΔN o número de pontos adicionais a ser utilizado na análise. Desta forma, o número de pontos a ser considerado torna-se $N + \Delta N$.e conseqüentemente a matriz \mathbf{C} passa a ter ordem $(N + \Delta N, N + \Delta N)$.

A consideração das condições iniciais é feita substituindo-se o vetor de carregamentos \mathbf{p} pelo vetor Ψ , dado na equação (4.29). Aos deslocamentos calculados, somam-se os deslocamentos iniciais. O vetor Ψ deve ter um número suficiente de elementos nulos para que não haja sobreposição dos carregamentos discretizados.

Para a solução dos sistemas de equações representados pelas equações (4.21) e (4.29), pode-se utilizar qualquer técnica numérica de solução de sistemas de equações complexas, tais como as fornecidas por Vetterling *et al* (1992). Neste trabalho é utilizada a técnica de decomposição LU para a solução do sistema de equações. A matriz \mathbf{C} é fatorada em duas matrizes triangulares, uma triangular inferior (\mathbf{L}) e outra triangular superior (\mathbf{U}). O sistema de equações original é substituído por 2 novos sistemas, um contendo a matriz triangular inferior e outro a matriz triangular superior. Como as matrizes \mathbf{L} e \mathbf{U} são triangulares, a solução de cada um dos sistemas é direta. Para a realização da decomposição LU da matriz \mathbf{C} , de ordem $(N \times N)$ efetuam-se $(2N^3 + 3N^2 - 5N)/6$ produtos, $(2N^3 + 9N^2 - 11N)/6$ somas e $(N^2 + N)/2$ divisões, que podem ser contabilizadas como produtos.

Capítulo 5 - Resposta dinâmica de sistemas de múltiplos graus de liberdade

5.1 Introdução

Para a análise dinâmica de um sistema estrutural com vários graus de liberdade, faz-se necessária a solução do sistema de equações de movimento resultantes da discretização do sistema em elementos finitos.

O sistema de equações resultante pode ser resolvido diretamente através de métodos no domínio do tempo ou da frequência, ou pode ser primeiramente transformado em um sistema desacoplado, cujas equações podem ser resolvidas independentemente. No entanto, esta técnica requer a solução do problema de autovalor para a extração dos modos de vibração do sistema, que irão formar a matriz modal que desacoplará o sistema de equações, o que, em sistemas de múltiplos graus de liberdade pode onerar sobremaneira a análise.

Os sistemas dotados de amortecimento proporcional ou não-proporcional são estudados neste capítulo. A seguir, apresenta-se a ampliação da formulação desenvolvida no capítulo 4, que será empregada para a análise dinâmica no domínio da frequência de sistemas de múltiplos graus de liberdade dotados de amortecimento proporcional ou não.

5.2 Sistemas com amortecimento proporcional

As equações de movimento de um sistema linear com J graus de liberdade, em coordenadas físicas, são dadas por

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{c} \dot{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{k} \mathbf{v}(t) = \mathbf{p}(t) \quad (5.1)$$

onde \mathbf{m} , \mathbf{c} e \mathbf{k} são respectivamente as matrizes de massa, amortecimento e rigidez, de ordem $(J \times J)$. $\ddot{\mathbf{v}}(t)$, $\dot{\mathbf{v}}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$ são os vetores de acelerações, velocidades e deslocamentos, respectivamente, de ordem $(J \times 1)$, e $\mathbf{p}(t)$ é o vetor de carregamentos de ordem $(J \times 1)$.

O conjunto de equações diferenciais dado na equação (5.1) representa um sistema acoplado de J equações com J incógnitas. O acoplamento é causado pelos termos existentes fora das diagonais principais das matrizes \mathbf{m} , \mathbf{c} e \mathbf{k} . Este sistema pode ser resolvido diretamente, por métodos de integração numérica passo-a-passo, como por exemplo o método Wilson- θ (Wilson *et al*, 1973). Outra maneira de se resolver a equação (5.1) é realizar uma adequada transformação de coordenadas que desacople o sistema de equações, transformando-o em um sistema de J equações independentes de um grau de liberdade.

A transformação de coordenadas usual é da forma

$$\mathbf{v}(t) = \Phi \mathbf{Y}(t) \quad (5.2)$$

sendo $\mathbf{Y}(t)$ o vetor de coordenadas generalizadas e Φ uma matriz de ordem $(J \times J)$ cujas colunas são os modos normais de vibração do sistema.

A vibração livre não amortecida do sistema é dada por:

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{k} \mathbf{v}(t) = \mathbf{0} \quad (5.3)$$

Pode-se tomar $\mathbf{Y}(t)$ como

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{Y} \sin(\omega t - \alpha) \quad (5.4)$$

onde \mathbf{Y} é a amplitude e α é fase.

Logo, utilizando-se as equações (5.2) e (5.4) chega-se ao problema de autovalor generalizado

$$\mathbf{k}\Phi_i - \omega_i^2 \mathbf{m}\Phi_i = \mathbf{0} \quad (5.5)$$

de onde obtém-se s modos Φ_i e também as frequências naturais de vibração ω_i , onde o parâmetro $i = 1, 2, \dots, J$.

Cada um dos modos de vibração Φ_i constitui uma configuração de deslocamento do sistema, onde as amplitudes podem ser usadas como coordenadas generalizadas para descrever os deslocamentos físicos $\mathbf{v}(t)$.

A matriz modal Φ possui as seguintes propriedades de ortogonalidade em relação às matrizes de massa e rigidez (Clough e Penzien, 1993)

$$\Phi^T \mathbf{m} \Phi = \mathbf{I} \quad (5.6)$$

$$\Phi^T \mathbf{k} \Phi = \Lambda \quad (5.7)$$

sendo \mathbf{I} a matriz identidade, de ordem $(J \times J)$ e Λ é uma matriz diagonal formada pelas frequências naturais de vibração elevadas ao quadrado.

Para que haja desacoplamento do sistema, a matriz de amortecimento deve ser ortogonal à matriz modal Φ . Assume-se então a seguinte relação:

$$\Phi^T \mathbf{c} \Phi = \mathbf{C} \quad (5.8)$$

onde \mathbf{C} é a matriz de amortecimento modal, diagonal, e com os elementos da forma

$$C_{ii} = 2\xi_i \omega_i \quad (5.9)$$

sendo ξ_i a taxa de amortecimento modal correspondente ao modo i e ω_i a frequência de vibração associada a este modo.

Assim, o amortecimento do sistema é obtido a partir da taxa de amortecimento de cada modo e não através da avaliação dos coeficientes da matriz \mathbf{c} .

Uma forma alternativa para a obtenção da matriz de amortecimento, que atenda às expressões (5.8) e (5.9) é feita utilizando-se o conceito proposto inicialmente por Rayleigh (1945) e depois estendido por Caughey (1960) e Caughey e O'Kelly (1965). Nesta abordagem, toma-se uma combinação linear das matrizes de massa e rigidez, obtendo-se uma matriz de amortecimento do tipo:

$$\mathbf{c} = \alpha \mathbf{m} + \beta \mathbf{k} \quad (5.10)$$

Desta forma, o amortecimento é considerado como sendo distribuído proporcionalmente por toda a estrutura, de forma semelhante à massa e a rigidez. Disto a denominação **amortecimento proporcional** dada a este tipo de amortecimento.

Para a determinação das constantes α e β , tem-se, a partir das equações (5.8) e (5.10)

$$C_{ii} = \Phi_i^T \mathbf{c} \Phi_i = \alpha \Phi_i^T \mathbf{m} \Phi_i + \beta \Phi_i^T \mathbf{k} \Phi_i \quad (5.11)$$

Considerando-se as equações (5.6), (5.7) e (5.9), vem:

$$2\xi_i \omega_i = \alpha + \beta \omega_i^2 \quad (5.12)$$

Logo,

$$\xi_i = \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta \omega_i}{2} \quad (5.13)$$

Assim, a partir da estimativa de duas taxas de amortecimento ξ_m e ξ_n e de duas frequências ω_m e ω_n , determinam-se as constantes α e β e pela equação (5.10) e chega-se a uma expressão para a matriz de amortecimento \mathbf{c} proporcional e ortogonal à matriz modal Φ .

Nota-se que ambas as abordagens, (obtenção do amortecimento a partir da taxa de amortecimento de cada modo e construção da matriz de amortecimento proporcional) dependem da extração dos autovalores do problema, que são as frequências naturais associadas a cada modo de vibração. Para sistemas estruturais com vários graus de liberdade, a extração dos autovalores e a montagem da matriz modal Φ mostra-se numericamente onerosa, razão pela qual a técnica de superposição modal não será aqui utilizada na análise dinâmica dos sistemas.

5.3 Sistemas com amortecimento não-proporcional

Na seção anterior foi demonstrada a obtenção da matriz de amortecimento de sistemas estruturais de vários graus de liberdade, onde as forças de amortecimento foram consideradas como sendo distribuídas uniformemente ao longo da estrutura, a exemplo das forças inerciais e elásticas. Isto levou à obtenção de uma matriz de amortecimento proporcional, ortogonal à matriz modal, o que permitiu o desacoplamento do sistema de equações diferenciais de movimento do sistema.

Existem, no entanto, situações estruturais onde o amortecimento não pode ser modelado como descrito anteriormente, levando a uma matriz de amortecimento não ortogonal à matriz modal. Como exemplo de estruturas que não satisfazem à condição de ortogonalidade em relação à matriz modal citam-se estruturas compostas por mais de um material, estruturas onde há interação solo-estrutura ou fluido-estrutura e estruturas com absorvedores de energia e mecanismos de isolamento de vibrações.

O amortecimento destes sistemas é, por esta razão, dito **não-proporcional**. A transformação modal aplicada a estes sistemas, da maneira como feito anteriormente, leva à uma matriz de amortecimento não-diagonal, sendo os termos fora da diagonal devido à não proporcionalidade do amortecimento. Com isto, o sistema permanece acoplado e o método da superposição modal em sua forma clássica não pode ser usado.

A resposta dinâmica de sistemas dotados de amortecimento não proporcional pode ser obtida através de integração direta das equações de movimento em coordenadas modais, usando-se os modos não-amortecidos para a transformação de coordenadas. No entanto, como em todo método de integração direta, este processo exige pequenos intervalos de tempo no caminhar passo-a-passo para garantir a estabilidade da solução.

Outra maneira de se obter a resposta seria calcular os autovetores complexos do sistema, que são usados para desacoplar o sistema e transformá-lo em um sistema de equações modais complexas (Hurty e Rubinstein, 1964). No entanto, o esforço computacional exigido é elevado, e a compreensão física do sistema é comprometida pela complexidade da resposta.

Uma solução aproximada para o sistema acoplado de equações modais pode ser obtida desprezando-se os termos fora da diagonal na matriz de amortecimento não-proporcional, e resolvendo-se o sistema pelo método clássico. No entanto, este processo pode levar a resultados pouco exatos para frequências de excitação próximas à de ressonância (Warburton e Soni, 1977).

Pode-se ainda resolver os sistemas dotados de amortecimento não-proporcional através do método das pseudo-forças. Neste método, os termos da matriz de amortecimento responsáveis pelo acoplamento das equações são transferidos para o segundo membro das equações e tratados como pseudo-forças. Assim, o primeiro termo permanece desacoplado como ocorre em sistemas com amortecimento proporcional. O sistema é resolvido por um processo iterativo, onde a cada iteração as equações são resolvidas até que se atinja a convergência requerida.

O método das pseudo-forças é utilizado em muitos trabalhos, com a solução do sistema sendo feita tanto no domínio do tempo quanto no da frequência, como também por um processo híbrido tempo-frequência. No domínio do tempo citam-se os trabalhos de Ibrahimbegovich e Wilson (1989), Claret e Venâncio -Filho (1991). No domínio da frequência Jangid e Datta (1993) e, como processos híbridos os desenvolvidos por Kawamoto (1983) e Aprile *et al* (1994).

Neste trabalho será formulada uma alternativa à análise de sistemas estruturais dotados de amortecimento não-proporcional, onde as equações são resolvidas no domínio da frequência em coordenadas físicas, sem a resolução do problema de autovalor e o uso do método de superposição modal clássico.

5.4 Formulação da resposta de sistemas de vários graus de liberdade

Seja um sistema com J graus de liberdade, cuja equação é dada pela equação (5.1), (Aqui repetida).

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{c} \dot{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{k} \mathbf{v}(t) = \mathbf{p}(t) \quad (5.1)$$

A equação de equilíbrio dinâmico no instante t_n é

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{v}}(t_n) + \mathbf{c} \dot{\mathbf{v}}(t_n) + \mathbf{k} \mathbf{v}(t_n) = \mathbf{p}(t_n) \quad (5.14)$$

Pode-se escrever

$$\mathbf{p}(t_n) = \mathbf{P}(\omega_m) \exp(i\omega_m t_n) \quad (5.15)$$

e analogamente

$$\mathbf{v}(t_n) = \mathbf{V}(\omega_m) \exp(i\omega_m t_n) \quad (5.16)$$

para o instante t_n e a frequência ω_m , onde n e $m = 0, 1, 2, \dots, N-1$.

Levando a equação (5.16) e suas derivadas na equação (5.14), tem-se

$$(-\omega_m^2 \mathbf{m} + i\omega_m \mathbf{c} + \mathbf{k}) \mathbf{V}(\omega_m) = \mathbf{P}(\omega_m) \quad (5.17)$$

Tomando-se as direções i e j , vem

$$\sum_{j=1}^J (-\omega_m^2 m_{ij} + i\omega_m c_{ij} + k_{ij}) \mathbf{V}(\omega_m) = \mathbf{P}(\omega_m) \quad (5.18)$$

Definindo-se

$$G_{ij}^{(m)} = -\omega_m^2 m_{ij} + i\omega_m c_{ij} + k_{ij} \quad (5.19)$$

A equação (5.18) torna-se

$$\sum_{j=0}^{N-1} G_{ij}^{(m)} \mathbf{V}_j(\omega_m) = \mathbf{P}_i(\omega_m) \quad (5.20)$$

A função $G_{ij}^{(m)}$ dada na equação (5.19) é a **função complexa inversa de resposta em frequência**, definida no capítulo 4. No entanto, para sistemas de múltiplos graus de liberdade, esta função torna-se dependente das direções i e j , além da frequência ω_m da força de excitação.

Efetuada-se a transformada inversa discreta de Fourier de $\mathbf{P}_i(\omega_m)$, tem-se

$$p_i = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sum_{m=0}^{N-1} P_i(\omega_m) \exp(mn i\alpha) \quad (5.21)$$

Substituindo-se a equação (5.20) na equação (5.21), tem-se

$$p_i = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sum_{m=0}^{N-1} \exp(mn i\alpha) \sum_{j=1}^{N-1} G_{ij}^{(m)} V_j(\omega_m) \quad (5.22)$$

Tomando-se a transformada discreta de $V_j(\omega_m)$, vem

$$V_j(\omega_m) = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} v_j(t_n) \exp(-mk i\alpha) \quad (5.23)$$

Finalmente, substituindo-se a equação (5.23) na equação (5.22), tem-se

$$p_i(t_n) = \frac{1}{N} \left\{ \sum_{m=0}^{N-1} \exp(mn i\alpha) \left[\sum_{j=1}^{N-1} G_{ij}^{(m)} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \exp(-mk i\alpha) v_j(t_n) \right) \right] \right\} \quad (5.24)$$

onde

$$\frac{\Delta\omega \Delta t}{2\pi} = \frac{1}{N} \quad (5.25)$$

N é o número de pontos de discretização utilizados na transformada discreta de Fourier. Novamente, ressalta-se que o número N não necessita ser uma potencia inteira de 2.

Reescrevendo a equação (5.24), tem-se

$$p_n(ti) = \frac{1}{N} \left\{ \sum_{m=0}^{N-1} \exp(mn i \alpha) \left[\sum_{j=1}^{N-1} G_{ij}^{(m)} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \exp(-mk i \alpha) v_n(ti) j \right) \right] \right\} \quad (5.26)$$

onde $p_n(ti)$ é o histórico de carregamentos, discretizado em N pontos. $v_n(ti)$ é o histórico de deslocamentos, também discretizado em N pontos.

5.4.1 Formulação Matricial

A equação (5.26), pode ser reescrita na forma matricial como

$$\mathbf{p} = \frac{1}{N} \mathbf{E} \mathbf{G}^{(m)} \mathbf{E}^* \mathbf{v} \quad (5.27)$$

onde \mathbf{p} é a matriz histórico de carregamentos, de ordem $(N \times J)$, em que cada coluna representa o histórico de carregamentos em um grau de liberdade. \mathbf{E} e \mathbf{E}^* são as matrizes das transformadas de Fourier, ambas de ordem $(N \times N)$ com elementos complexos E_{mn} e E_{mn}^* respectivamente. \mathbf{v} , de forma análoga à \mathbf{p} , é a matriz histórico de deslocamentos que se deseja obter, de ordem $(N \times J)$, onde cada coluna representa o histórico de deslocamentos em um grau de liberdade. A matriz $\mathbf{G}^{(m)}$ é uma matriz de ordem $(P \times J)$, com elementos complexos $G^{(m)}$, onde P é dado pelo produto $(N \times J)$.

Pré multiplicando ambos os termos por \mathbf{E}^{-1} , vem

$$\mathbf{E}^{-1} \mathbf{p} = \frac{1}{N} \mathbf{G}^{(m)} \mathbf{E}^* \mathbf{v} \quad (5.28)$$

ou

$$N \mathbf{E}^{-1} \mathbf{p} = \mathbf{G}^{(m)} \mathbf{E}^* \mathbf{v} \quad (5.29)$$

Pela equação (3.48), as matrizes \mathbf{E} e \mathbf{E}^*/N são inversas, o que permite escrever:

$$\mathbf{E}^* \mathbf{p} = \mathbf{G}^{(m)} \mathbf{E}^* \mathbf{v} \quad (5.30)$$

A exemplo da formulação para sistemas de um grau de liberdade, o produto matricial $\mathbf{G}^{(m)} \times \mathbf{E}^*$ não é definido, ou seja, não pode ser realizado da forma tradicional. Serão definidas então operações matriciais que atendam às condições impostas pelo problema.

5.4.2 Produto Matricial não convencional

Pelo fato de o produto entre as matrizes $\mathbf{G}^{(m)}$ e \mathbf{E}^* não estar definido, uma vez que estas matrizes não apresentam dimensões compatíveis com aquelas exigidas para o produto matricial, torna-se necessário definir o *produto matricial não convencional* para sistemas de múltiplos graus de liberdade, denotado por $[\cdot]$, de forma análoga a realizada para sistemas de um grau de liberdade.

A matriz $\mathbf{G}^{(m)}$, por ser uma função dependente das direções i e j , e da frequência ω_m da força de excitação, pode ser entendida como uma matriz tri-dimensional. Por este motivo, define-se a matriz \mathbf{S} , de ordem $(P \times J)$ como sendo a matriz bi-dimensional que irá armazenar os valores da matriz tri-dimensional $\mathbf{G}^{(m)}$, a fim de que o *produto matricial não convencional* possa ser realizado.

A forma geral dos elementos complexos da matriz \mathbf{S} , construída a partir dos valores da matriz $\mathbf{G}^{(m)}$ é dada por

$$S_{(m+(i-1) \times N, j)} = G_{(m, i, j)} \quad (5.31)$$

onde $j = 0, 1, 2, \dots, J-1$; $m = 0, 1, 2, \dots, N-1$ e $i = 0, 1, 2, \dots, J-1$.

A matriz \mathbf{C} , de ordem $(P \times P)$ formada pelo *produto matricial não convencional* entre as matrizes \mathbf{S} e \mathbf{E}^* em seus elementos dados por

$$C_{(m+(j-1) \times N, n+(i-1) \times N)} = S_{(m+(j-1) \times N, i)} \times E^*_{(m,n)} \quad (5.32)$$

onde $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$; $m = 0, 1, 2, \dots, N-1$; $j = 0, 1, 2, \dots, J-1$ e $i = 0, 1, 2, \dots, J-1$.

A única condição imposta à realização do *produto matricial não convencional* é a de que o número de pontos utilizados para a discretização do espectro de frequências, que serão armazenados na matriz $\mathbf{G}^{(m)}$ deve ser igual ao número de linhas da matriz \mathbf{E}^* . Esta condição, no entanto é automaticamente satisfeita pela formulação, uma vez que o número N de pontos requeridos às transformadas de Fourier (embutidas nas matrizes \mathbf{E} e \mathbf{E}^*) é o mesmo utilizado na discretização das frequências.

Retornando à equação (5.30) e definindo-se

$$\mathbf{E}^* \mathbf{p} = \mathbf{B} \quad (5.33)$$

onde \mathbf{B} é uma matriz com elementos complexos de ordem $(N \times J)$ e

$$\mathbf{G}^{(m)}[\cdot] \mathbf{E}^* = \mathbf{C} \quad (5.34)$$

pode então escrever a equação (5.30) de forma compacta como

$$\mathbf{B} = \mathbf{C} \mathbf{v} \quad (5.35)$$

A matriz \mathbf{B} pode ser armazenada em um vetor \mathbf{VB} , de ordem $(P \times I)$ cujos elementos são dados por

$$\mathbf{V}\mathbf{B}_{((j-1) \times N + i)} = \mathbf{B}_{(i,j)} \quad (5.36)$$

onde $j = 0, 1, 2, \dots, J$ e $i = 0, 1, 2, \dots, N$.

Assim, substituindo-se a equação (5.36) em (5.35), tem-se finalmente

$$\mathbf{V}\mathbf{B} = \mathbf{C} \mathbf{v} \quad (5.37)$$

A equação (5.37) representa um sistema de P equações, cujas incógnitas são os deslocamentos \mathbf{v} do sistema, armazenados em um vetor de ordem $(P \times 1)$.

O vetor resposta \mathbf{v} pode ser armazenado em uma matriz \mathbf{vr} , cujos elementos são dados por

$$\mathbf{vr}_{(i,j)} = \mathbf{v}_{(i+(j-1) \times N)} \quad (5.38)$$

onde $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$ e $j = 0, 1, 2, \dots, J-1$.

A matriz resposta \mathbf{vr} é uma matriz com elementos complexos, de ordem $(N \times J)$. Cada coluna da matriz \mathbf{vr} representa um grau de liberdade do sistema, discretizado em N pontos. Como os elementos da matriz resposta \mathbf{vr} são complexos, o procedimento de se desprezar a parte imaginária dos deslocamentos é novamente adotado, não trazendo, contudo, qualquer prejuízo à precisão da resposta obtida.

5.4.3 Condições iniciais

Seja agora um sistema de J graus de liberdade, submetido a uma excitação dinâmica, deslocado de sua configuração inicial de equilíbrio. Desta forma, as

configurações iniciais do sistema são dadas pelo vetor deslocamentos iniciais \mathbf{V}_o , dado na equação (5.39).

$$\mathbf{V}_o = \begin{bmatrix} V_o 1 \\ V_o 2 \\ V_o 3 \\ \vdots \\ V_o J \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

Submetendo-se os graus de liberdade deste mesmo sistema à velocidades iniciais, tem-se o vetor velocidades iniciais $\dot{\mathbf{V}}_o$, dado na equação (5.40).

$$\dot{\mathbf{V}}_o = \begin{bmatrix} \dot{V}_o 1 \\ \dot{V}_o 2 \\ \dot{V}_o 3 \\ \vdots \\ \dot{V}_o J \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

De forma análoga àquela mostrada para sistemas de um grau de liberdade no Capítulo 4, a resposta do sistema aos deslocamentos iniciais, armazenados no vetor \mathbf{V}_o , é obtida deslocando-se a origem dos eixos para v_o e utilizando-se a equação (5.30) submetida a uma força $-F_o$, dada por

$$\mathbf{F}_o = \mathbf{K} \mathbf{V}_o \quad (5.41)$$

sendo \mathbf{K} a matriz de rigidez do sistema e \mathbf{V}_o o vetor dos deslocamentos iniciais.

O vetor de forças devido aos deslocamentos iniciais, dado pela equação (5.41) é escrito como

$$\mathbf{F}_o = \begin{bmatrix} F_{o1} \\ F_{o2} \\ F_{o3} \\ \vdots \\ F_{oJ} \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

A força devido às velocidades iniciais $\dot{\mathbf{v}}_o$ é dada por

$$\mathbf{F}_{\dot{\mathbf{v}}_o} = \mathbf{M} \dot{\mathbf{V}}_o \frac{\delta(t)}{\Delta t} \quad (5.43)$$

Onde \mathbf{M} é a matriz de massa do sistema, $\dot{\mathbf{V}}_o$ o vetor das velocidades iniciais e $\delta(t)$ a função impulso unitário aplicada em $t = 0$. O vetor $\delta(t)$ novamente é um vetor cujo primeiro elemento é 1 e os demais são nulos.

O vetor de forças devido às velocidades iniciais, dado pela equação (5.43) é escrito como

$$\mathbf{F}_{\dot{\mathbf{v}}_o} = \begin{bmatrix} \dot{F}_{\dot{\mathbf{v}}_o 1} \\ \dot{F}_{\dot{\mathbf{v}}_o 2} \\ \dot{F}_{\dot{\mathbf{v}}_o 3} \\ \vdots \\ \dot{F}_{\dot{\mathbf{v}}_o J} \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

Substituindo-se \mathbf{p} na equação (5.30) pelo vetor \mathbf{F}_o dado na equação (5.41), obtém-se a expressão para a resposta do sistema submetido a deslocamentos iniciais, dada por

$$\mathbf{E}^* \mathbf{F}_o = \mathbf{G}^{(m)} [\cdot] \mathbf{E}^* \mathbf{v} \quad (5.45)$$

De maneira semelhante, substituindo-se o vetor de carregamentos \mathbf{p} na equação (5.30) pelo vetor $\mathbf{F} \dot{\mathbf{v}}_0$ dado na equação (5.43), chega-se à expressão para a resposta do sistema submetido à velocidades iniciais, dada por

$$\mathbf{E}^* \mathbf{F} \dot{\mathbf{v}}_0 = \mathbf{G}^{(m)}[\cdot] \mathbf{E}^* \mathbf{v} \quad (5.46)$$

Para um sistema submetido à uma carga \mathbf{p} , deslocamento inicial \mathbf{v}_0 e velocidade inicial $\dot{\mathbf{v}}_0$, a matriz \mathbf{p} na equação (5.30) é substituída pela matriz $\mathbf{\Omega}$, de ordem $(N \times J)$ dada por

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{p} - \mathbf{F} \mathbf{v}_0 + \mathbf{F} \dot{\mathbf{v}}_0 \quad (5.47)$$

Desta forma, a resposta de um sistema submetido à uma carga \mathbf{p} , deslocamento inicial \mathbf{v}_0 e velocidade inicial $\dot{\mathbf{v}}_0$ fica sob a forma

$$\mathbf{E}^* \mathbf{\Omega} = \mathbf{G}^{(m)}[\cdot] \mathbf{E}^* \mathbf{v} + \mathbf{V}_0 \quad (5.48)$$

ou

$$\mathbf{E}^* \mathbf{\Omega} = \mathbf{C} \mathbf{v} + \mathbf{V}_0 \quad (5.49)$$

5.4.4 Implementação computacional

A equação (5.37) ou (5.49) representa um processo de cálculo em que, a exemplo da formulação para sistemas de um grau de liberdade anteriormente apresentada, as transformadas discretas de Fourier são realizadas implicitamente e não se faz necessária a extração dos autovalores do problema.

Para a implementação computacional do *produto matricial não convencional* a matriz tri-dimensional $\mathbf{G}^{(m)}$ é armazenada na matriz bidimensional \mathbf{S} , cuja forma geral é dada por

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \begin{matrix} \overset{(1)}{G}_{11} & \overset{(1)}{G}_{12} & \overset{(1)}{G}_{13} & \cdots & \overset{(1)}{G}_{1J} \\ \overset{(2)}{G}_{11} & \overset{(2)}{G}_{12} & \overset{(2)}{G}_{13} & \vdots & \overset{(2)}{G}_{1J} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \overset{(N)}{G}_{11} & \overset{(N)}{G}_{12} & \overset{(N)}{G}_{13} & \cdots & \overset{(N)}{G}_{1J} \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} \overset{(1)}{G}_{21} & \overset{(1)}{G}_{22} & \overset{(1)}{G}_{23} & \cdots & \overset{(1)}{G}_{2J} \\ \overset{(2)}{G}_{21} & \overset{(2)}{G}_{22} & \overset{(2)}{G}_{23} & \cdots & \overset{(2)}{G}_{2J} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \overset{(N)}{G}_{21} & \overset{(N)}{G}_{22} & \overset{(N)}{G}_{23} & \cdots & \overset{(N)}{G}_{2J} \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \overset{(1)}{G}_{J1} & \overset{(1)}{G}_{J2} & \overset{(1)}{G}_{J3} & \cdots & \overset{(1)}{G}_{JJ} \\ \overset{(2)}{G}_{J1} & \overset{(2)}{G}_{J2} & \overset{(2)}{G}_{J3} & \cdots & \overset{(2)}{G}_{JJ} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \overset{(N)}{G}_{J1} & \overset{(N)}{G}_{J2} & \overset{(N)}{G}_{J3} & \cdots & \overset{(N)}{G}_{JJ} \end{matrix} \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

Conforme se mostra na equação (5.50), a matriz \mathbf{S} é constituída de submatrizes \mathbf{S}_i , onde o parâmetro $i = 1, 2, 3, \dots, J$. Cada uma das submatrizes \mathbf{S}_i possui ordem $(N \times J)$, sendo N o número de pontos utilizados nas transformadas de Fourier. Assim, explica-se o fato da matriz \mathbf{S} apresentar P linhas, uma vez que $P = N \times J$.

Para o cálculo de cada um dos elementos complexos da matriz \mathbf{S} são necessários 4 produtos e 1 soma, como se mostra na equação (5.19). Computacionalmente, um número complexo $(a + bi)$ é escrito como (a, b) , razão pela qual há uma soma e um produto a menos a serem contabilizados em relação a equação (5.19). Como a matriz \mathbf{S} é formada por $P \times J$ elementos, o número total de produtos necessários à obtenção de \mathbf{S} é $3NJ^2$, e o número de somas necessárias é NJ^2 .

A matriz \mathbf{C} originada do produto matricial não convencional $\mathbf{S} \times \mathbf{E}^*$ apresenta forma geral dada por

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \{\mathbf{C}_1\} & \{\mathbf{C}_{J+1}\} & \cdots & \{\mathbf{C}_{(J-1) \times J+1}\} \\ \{\mathbf{C}_2\} & \{\mathbf{C}_{J+2}\} & \cdots & \{\mathbf{C}_{(J-1) \times J+2}\} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \{\mathbf{C}_J\} & \{\mathbf{C}_{2J}\} & \cdots & \{\mathbf{C}_{J \times J}\} \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

Cada uma das submatrizes $\{\mathbf{C}_j\}$ que compõem a matriz \mathbf{C} tem forma geral dada por

$$\{\mathbf{C}\} = \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & \cdots & C_{1,N} \\ C_{2,1} & C_{2,2} & \cdots & C_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{N,1} & C_{N,2} & \cdots & C_{N,N} \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

As equações (5.51) e (5.52) mostram que a matriz \mathbf{C} é formada por J^2 submatrizes $\{\mathbf{C}_j\}$, cada uma das quais de ordem $(N \times N)$. Desta forma, a matriz \mathbf{C} apresenta forma geral dada por

$$\mathbf{C} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} C_{1,1} & C_{1,2} & \cdots & C_{1,N} & \cdots & C_{1,A+1} & C_{1,A+2} & \cdots & C_{1,A+N} \\ C_{2,1} & C_{2,2} & \cdots & C_{2,N} & \cdots & C_{2,A+1} & C_{2,A+2} & \cdots & C_{2,A+N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{N,1} & C_{N,2} & \cdots & C_{N,N} & \cdots & C_{N,A+1} & C_{N,A+2} & \cdots & C_{N,A+N} \\ \hline \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ C_{A+1,1} & C_{A+1,2} & \cdots & C_{A+1,N} & \cdots & C_{A+1,A+1} & C_{A+1,A+2} & \cdots & C_{A+1,A+N} \\ C_{A+2,1} & C_{A+2,2} & \cdots & C_{A+2,N} & \cdots & C_{A+2,A+1} & C_{A+2,A+2} & \cdots & C_{A+2,A+N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{A+N,1} & C_{A+N,2} & \cdots & C_{A+N,N} & \cdots & C_{A+N,A+1} & C_{A+N,A+2} & \cdots & C_{A+N,A+N} \end{array} \right] \quad (5.53)$$

onde o índice A é obtido de

$$A = (J - 1) \times N \quad (5.54)$$

Utilizando-se a equação (5.54), tem-se que $A + N = J \times N$, o que comprova que a matriz \mathbf{C} possui ordem $(P \times P)$, uma vez que $P = N \times J$.

Cada um dos elementos complexos existentes na matriz \mathbf{C} , é formado a partir do produto entre os elementos das matrizes \mathbf{S} e \mathbf{E}^* . Como o produto entre dois números complexos envolve 4 produtos reais e 2 somas, para a construção da matriz \mathbf{C} são computados um total de $4N^2J^2$ produtos e $2N^2J^2$ somas, uma vez que matriz \mathbf{C} apresenta um total de P^2 elementos.

Se uma maior precisão dos resultados é requerida, o número de pontos N adotado nas transformadas de Fourier deve ser aumentado. Seja N o número de pontos utilizado na análise de um sistema de múltiplos graus de liberdade. A este número somam-se ΔN pontos utilizados para o aumento de precisão. Assim o número de pontos a ser utilizado altera-se para $N + \Delta N$, e conseqüentemente o número P que define a ordem da matriz \mathbf{C} modifica-se para $P = (N + \Delta N) \times J$. Matematicamente, \mathbf{C} é a matriz dos coeficientes dos sistema de equações representado pela expressão (5.37). Desta forma, a cada aumento de precisão requerido são acrescentadas $J \times \Delta N$ equações ao sistema. Da mesma maneira, o vetor \mathbf{VB} passa a ter ordem $(N + \Delta N \times J)$.

Para considerar as condições iniciais, a matriz de carregamentos discretizados \mathbf{p} é substituída pela matriz $\mathbf{\Omega}$, dada na equação (5.47). A multiplicação do vetor de forças devido às velocidades iniciais $\mathbf{F} \dot{\mathbf{v}}_0$ pela função impulso unitário $\delta(t)$ leva à uma matriz de ordem $(N \times J)$ cuja forma geral é

$$\dot{\mathbf{F}}_{v_o} \mathbf{x} \delta(t) = \begin{bmatrix} \dot{F}_{v_o 1} & \dot{F}_{v_o 2} & \dots & \dot{F}_{v_o J} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (5.55)$$

A matriz $\mathbf{\Omega}$ apresenta termo geral dado por

$$\Omega_{i,j} = P_{i,j} - F_{v_o j} + \dot{F}_{v_o i,j} \quad (5.56)$$

A equação (5.56) mostra que o carregamento atuante em um determinado grau de liberdade é somado às forças devido aos deslocamentos iniciais e às velocidades iniciais aplicadas neste grau de liberdade. Desta forma, cada coluna J da matriz $\mathbf{\Omega}$ representa a resultante das forças que atuam no grau de liberdade J

A solução do sistema de equações representado pela equação (5.37) é obtida de maneira idêntica àquela apresentada para sistemas de um grau de liberdade, utilizando-se o método da decomposição LU aplicado a matrizes complexas. O vetor \mathbf{VB} , de ordem $(P \times J)$ é utilizado para armazenar a matriz \mathbf{B} , formada a partir do produto entre as matrizes \mathbf{E}^* e \mathbf{P} . Então, cada elemento em \mathbf{VB} é formado pelo produto de um número complexo, armazenado na matriz \mathbf{E}^* e um número real, pertencente a matriz \mathbf{P} . Desta forma, cada elemento em \mathbf{B} é formado por 2 produtos, de modo que o número total de produtos a ser realizado para a obtenção de \mathbf{B} , e conseqüentemente de \mathbf{VB} é $2NJ$.

A matriz \mathbf{C} , matematicamente a matriz dos coeficientes do sistema de equações, como já citado, possui ordem $(P \times P)$, sendo $P = N \times J$. Para a solução do sistema de equações, utilizando o método da decomposição LU com pivotação total são realizados um total de $(2N^3J^3 + 3N^2J^2 - 5NJ)/6$ produtos, $(2N^3J^3 + 9N^2J^2 - 11NJ)/6$ somas e $(N^2J^2 + NJ)/2$ divisões. As operações de troca de linhas ou colunas não apresentam custo computacional.

Computacionalmente, o método da decomposição LU e o método de Gauss apresentam o mesmo número total de operações. Entretanto, a acumulação de erros de arredondamento no método LU é menor que no de Gauss. Isto se deve a menor propagação dos erros gerados nas divisões sucessivas.

Capítulo 6 - Exemplos de Aplicação

6.1 Introdução

Neste capítulo serão apresentados alguns exemplos numéricos analisados a partir da formulação proposta, cujo objetivo é o de se comprovar os resultados analíticos obtidos no trabalho, além de validar o programa desenvolvido em linguagem FORTRAN.

Os resultados obtidos foram comparados com o método de análise consagrados, tais como o método de integração direta Wilson- θ , a integral de Duhamel e o método ImFT, que utiliza as transformadas implícitas de Fourier. Cabe ressaltar que os exemplos escolhidos têm por objetivo principal validar a formulação proposta e não representar casos práticos de análise.

Foram analisados sistemas com um e com múltiplos graus de liberdade, com ou sem condições iniciais, cobrindo-se desta forma todas as formulações propostas no trabalho.

6.2 Exemplo 1

O reservatório elevado mostrado na figura (6.1a) possui massa igual a 2,48 Kips.sec²/in e rigidez de 3500 Kips/in e está submetido à excitação mostrada na figura (6.1b). A taxa de amortecimento é estimada em 7,5%.

A frequência natural e o período de vibração do sistema são:

$$\omega = \sqrt{K/M} = 37,53 \text{ rad / s} \qquad T = 2\pi/\omega = 0,167 \text{ s}$$

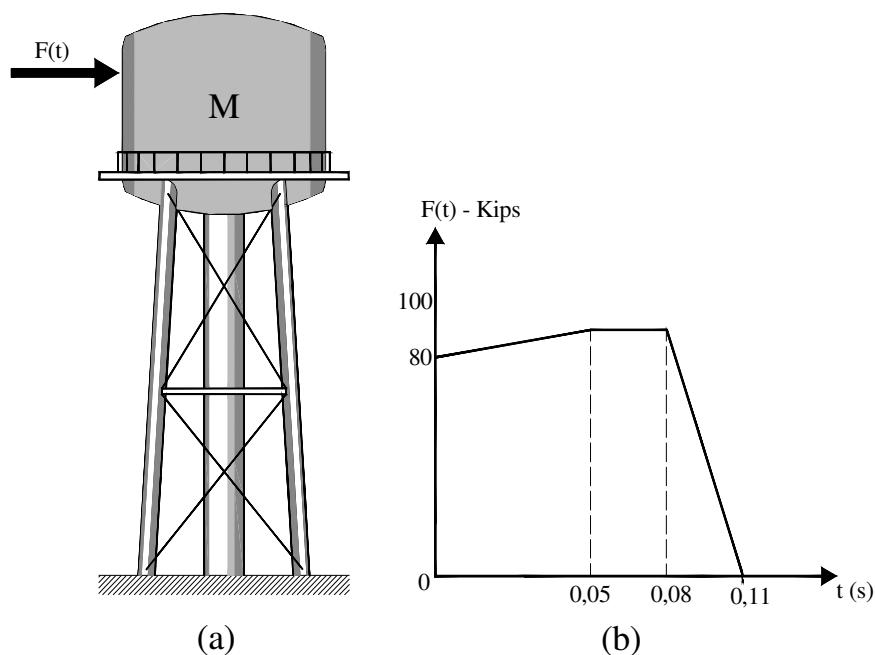


Figura 6.1 - Reservatório elevado e carregamento atuante.

O sistema foi analisado utilizando-se a formulação proposta, o método ImFT e o método de integração direta Wilson – θ . Para os três métodos o intervalo de tempo adotado para análise foi $\Delta t = 0,01$ s, e o tempo total de análise foi de 1,5 segundos. Para o método ImFT o número de pontos utilizados no espectro de frequências e nas transformadas de Fourier foi $N = 2000$. Para o Método Proposto N foi adotado como sendo igual a 1000. O valor do parâmetro θ utilizado no método de integração direta foi tomado como sendo igual a 1,4.

O histórico de deslocamentos obtido é mostrado na figura (6.2)

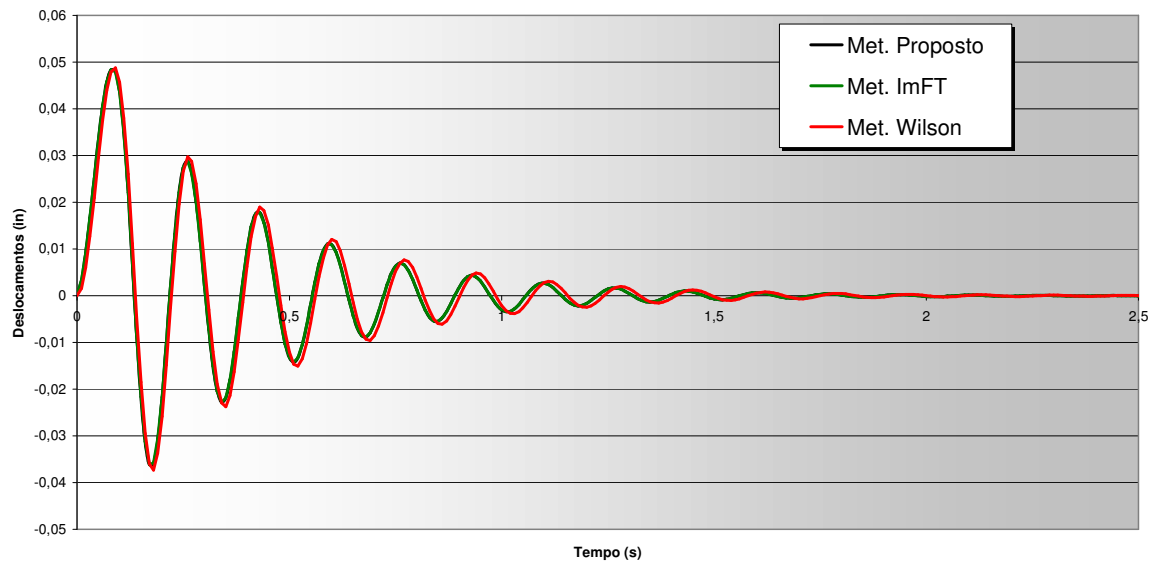


Figura 6.2 - Histórico de deslocamentos.

A figura (6.3) mostra a parte imaginária dos deslocamentos. Nota-se que os valores obtidos apresentam pequena magnitude, o que demonstra que o procedimento de se desprezar a parte imaginária do vetor resposta $\mathbf{v}(t)$ pode ser adotado sem maiores consequências para a resposta do sistema.

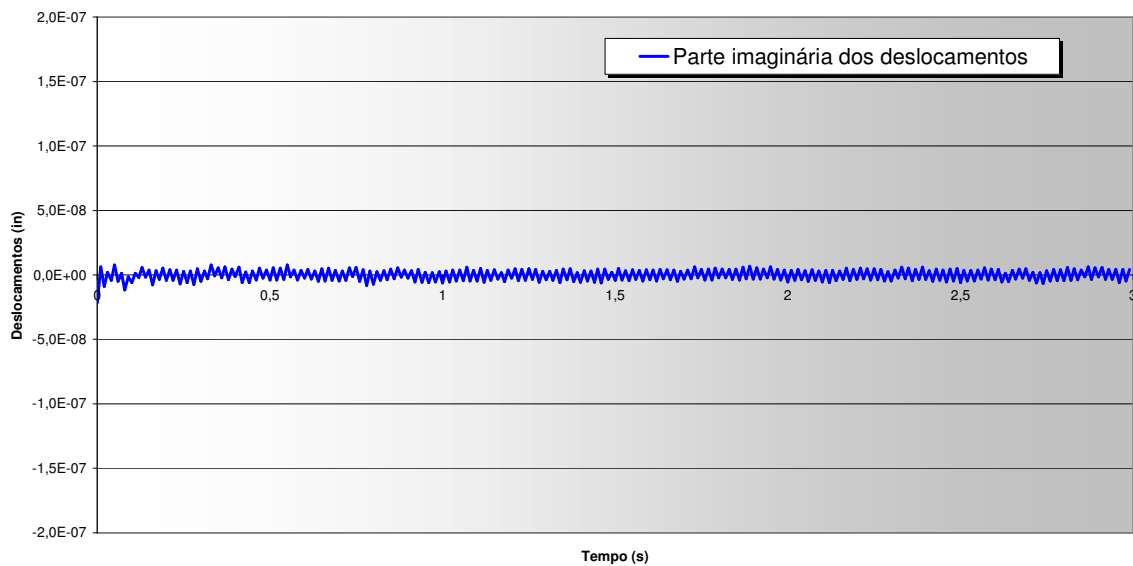


Figura 6.3 - Parte imaginaria dos deslocamentos.

6.3 Exemplo 2

O *shear building* de um pavimento mostrado na figura (6.4a) possui massa de 2000 kg e rigidez total de 1,974 MN/m. O sistema é submetido ao carregamento mostrado na figura (6.4b), atuando até 8s. Considera-se uma taxa de amortecimento de 1%.

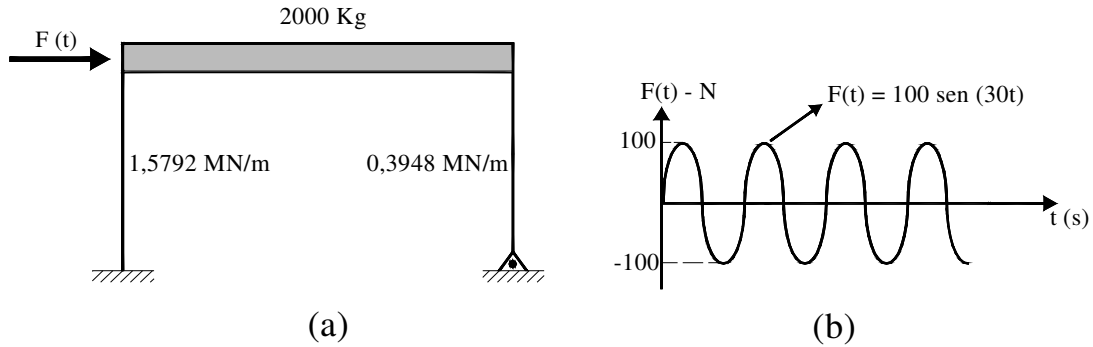


Figura 6.4 - *Shear building* e carregamento.

A frequência natural e o período de vibração do sistema são

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{M}} = 31,42 \text{ rad / s} \quad T = 2 \pi / \omega = 0,20 \text{ s}$$

O sistema foi analisado utilizando-se o método proposto, o método ImFT e a integral de Duhamel. Para a análise foi adotado um intervalo de tempo Δt igual a 0,01 s para todos os métodos. O tempo total de análise foi de 15,0 segundos. O número N de pontos utilizados no método ImFT para a discretização do espectro de frequências e nas transformadas de Fourier foi 2000. Para o Método Proposto N foi adotado como sendo igual a 1500.

O histórico de deslocamentos para o *shear building* é mostrado na figura (6.5). Como a frequência da força de excitação é próxima à frequência de vibração do sistema, ocorre o fenômeno de batimento enquanto há a atuação do carregamento. Como o sistema é amortecido, cessada a atuação do carregamento, inicia-se a vibração livre e o sistema retorna à sua posição de equilíbrio.

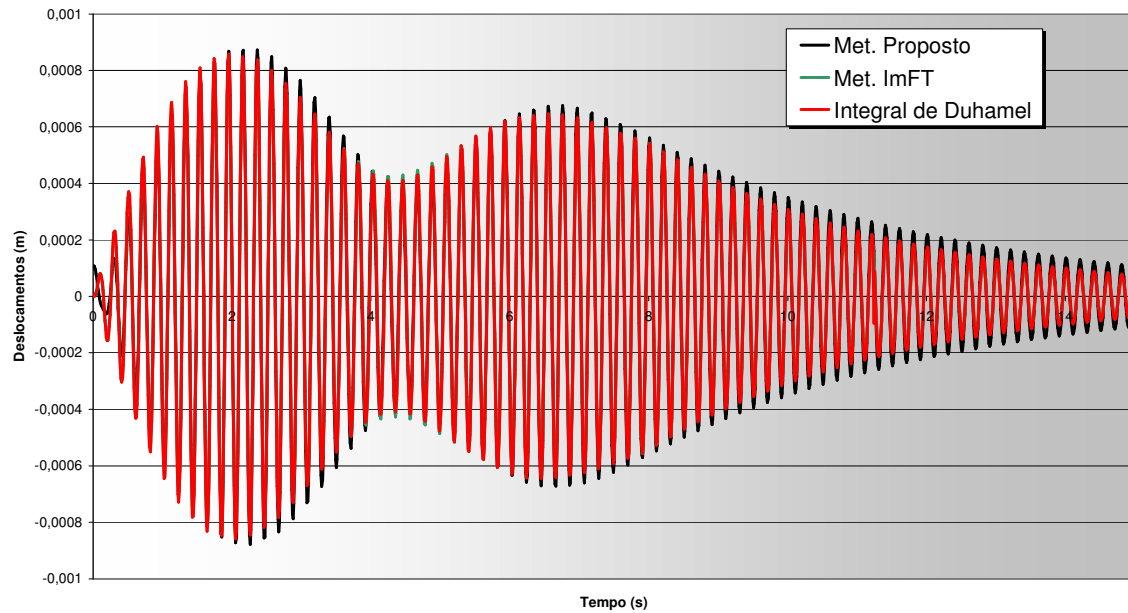


Figura 6.5 - Histórico de deslocamentos para o *shear bulding*.

A figura (6.6) mostra a parte imaginária dos deslocamentos. Novamente os valores obtidos são desprezíveis, uma vez que a parte imaginária dos deslocamentos não possui significado físico.

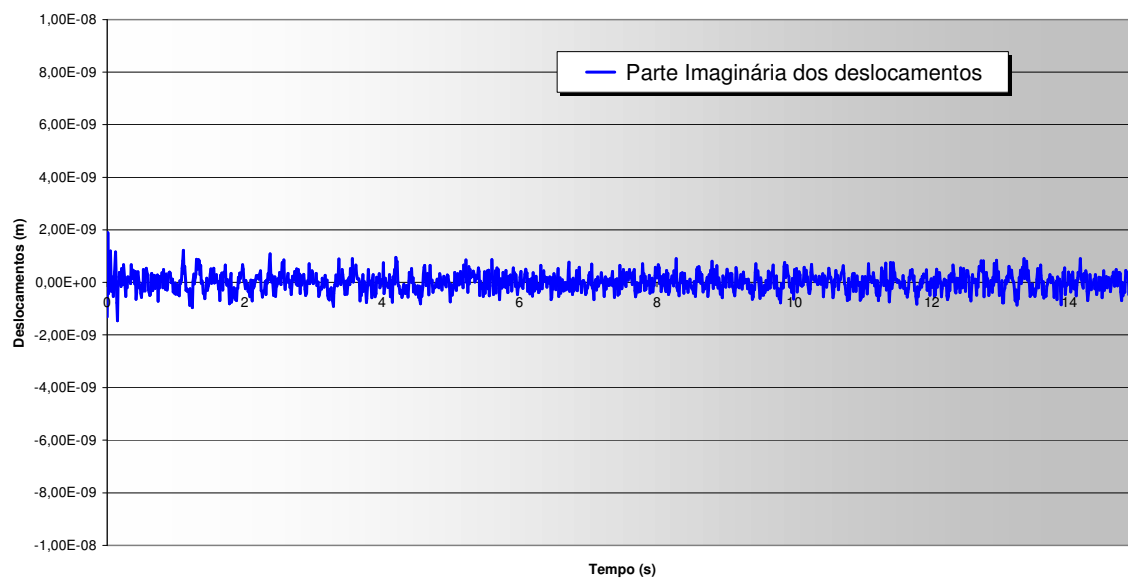


Figura 6.6 - Parte imaginária dos deslocamentos.

6.4 Exemplo 3

O *shear building* do exemplo anterior foi submetido ao um carregamento ressonante mostrado na figura (6.7b), atuante até 4,0 s. Considera-se uma taxa de amortecimento de 0.9 % para o sistema.

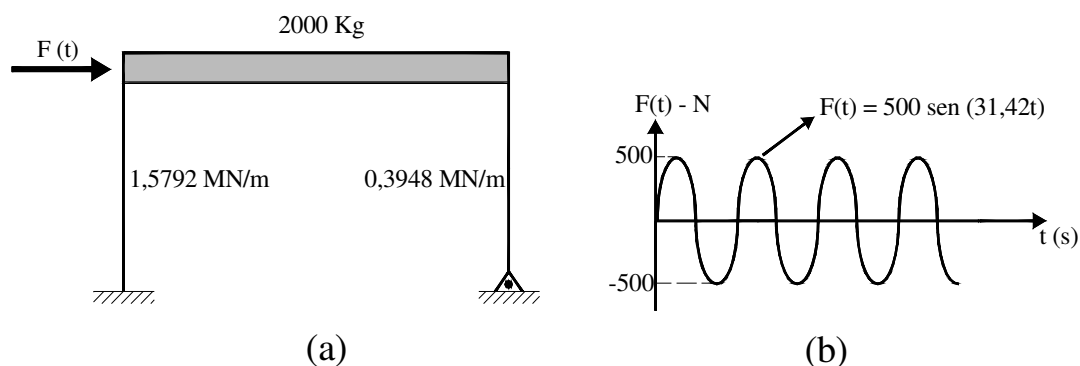


Figura 6.7 - *Shear building* e carregamento ressonante.

O sistema foi analisado utilizando-se o método proposto, o método ImFT e a integral de Duhamel. Para a análise foi adotado um intervalo de tempo Δt igual a 0,01 s para todos os métodos. O tempo total de análise foi de 15,0 segundos. O número N de pontos utilizados no método ImFT para a discretização do espectro de frequências e nas transformadas de Fourier foi 2000. Para o Método Proposto N foi adotado como sendo igual a 1500.

A figura (6.8) mostra o histórico de deslocamentos do sistema. Enquanto há a atuação da carga ressonante, os deslocamentos do sistema tendem a ampliar-se. Uma vez cessada a vibração forçada, inicia-se a vibração livre amortecida e o sistema retorna à posição inicial de equilíbrio. A parte imaginária dos deslocamentos não possui sentido físico e conseqüentemente apresenta valores desprezíveis, como se mostra na figura (6.9).

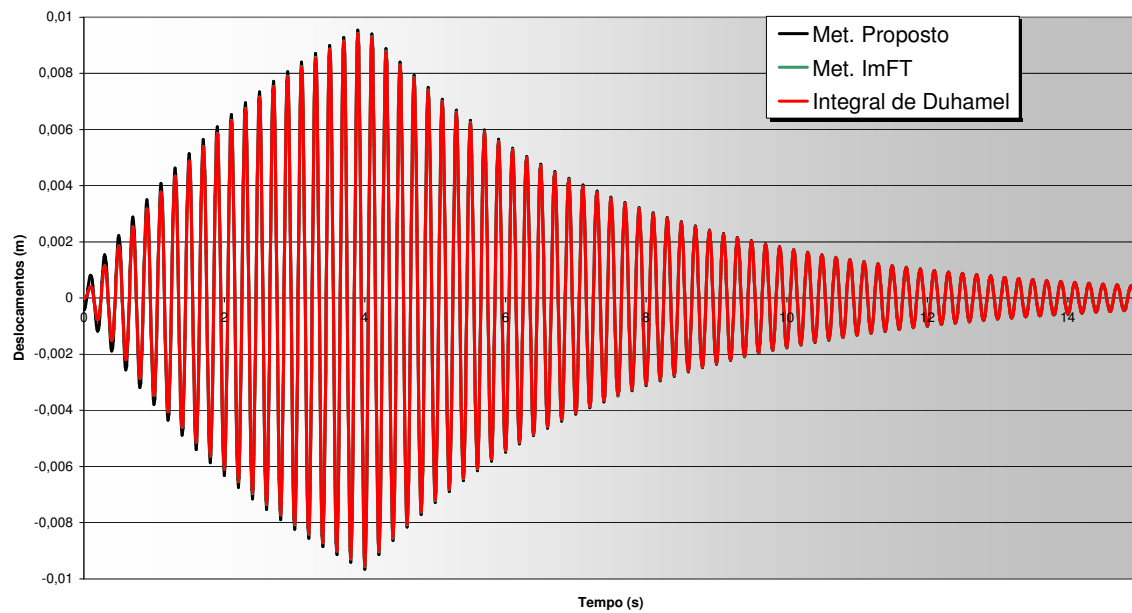


Figura 6.8 - Histórico de deslocamentos para o *shear building*.

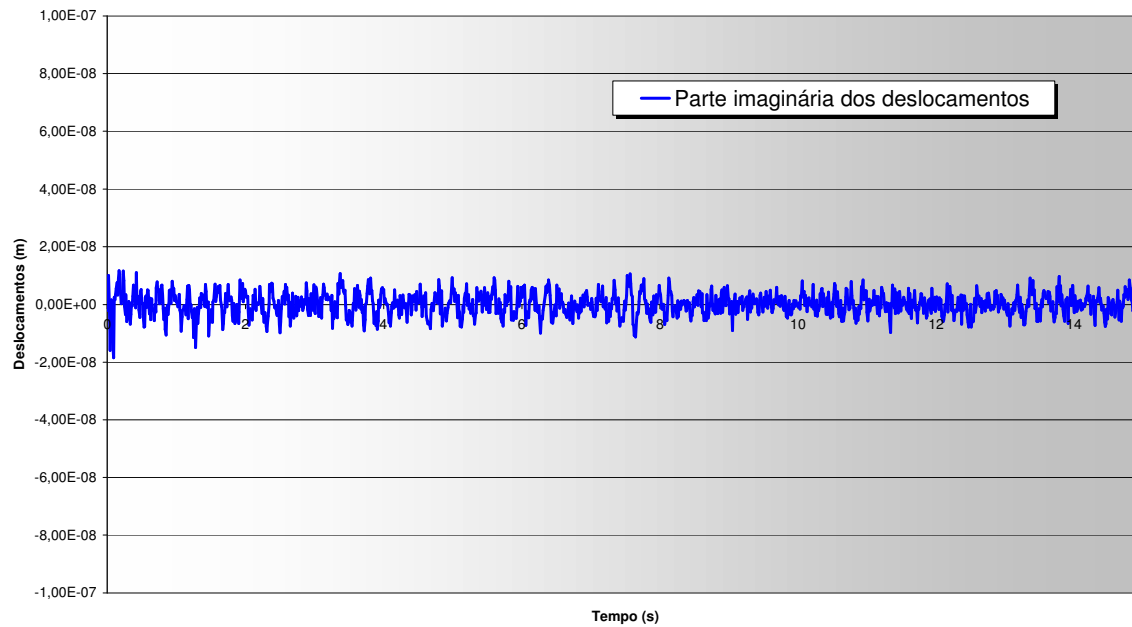


Figura 6.9 - Parte imaginaria dos deslocamentos.

6.5 Exemplo 4

Para validar a formulação para condições iniciais, exposta no item 4.2.3, o sistema do exemplo 1 foi submetido, juntamente com a excitação mostrada na figura (6.1b) a um deslocamento inicial de 0,02 in e uma velocidade inicial de 0,2 in/s.

O intervalo de tempo foi de 0,01 segundo e o tempo de análise foi de 2,0 segundos. O numero N de pontos utilizados no método ImFT foi $N = 2000$. Para o Método Proposto N foi adotado como sendo igual a 1000. O valor de θ , utilizado no método Wilson foi tomado igual a 1,4.

O histórico de deslocamentos e parte imaginária dos mesmos são mostrados nas figuras (6.10) e (6.11) respectivamente.

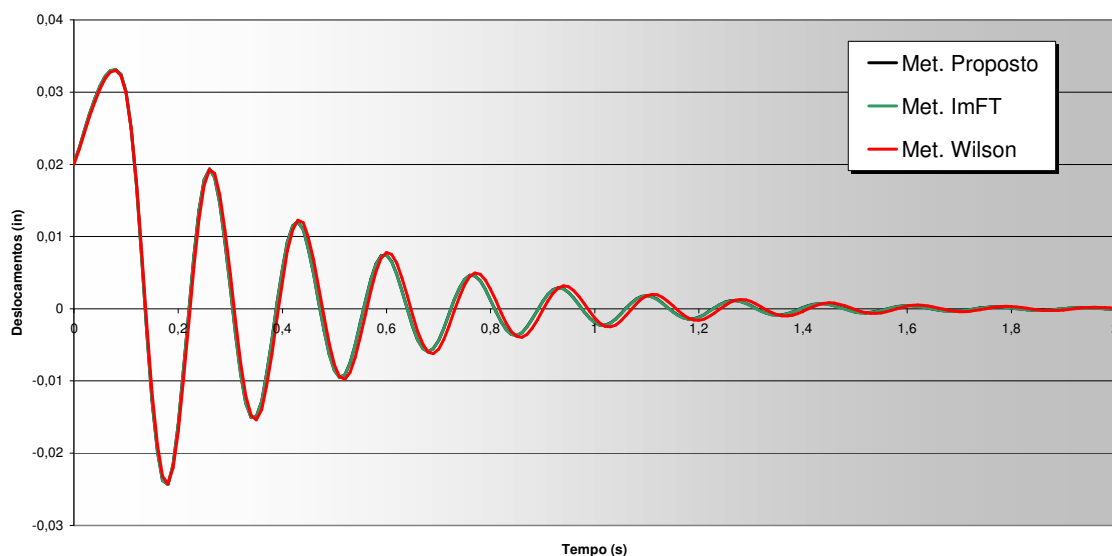


Figura 6.10 - Histórico de deslocamentos.

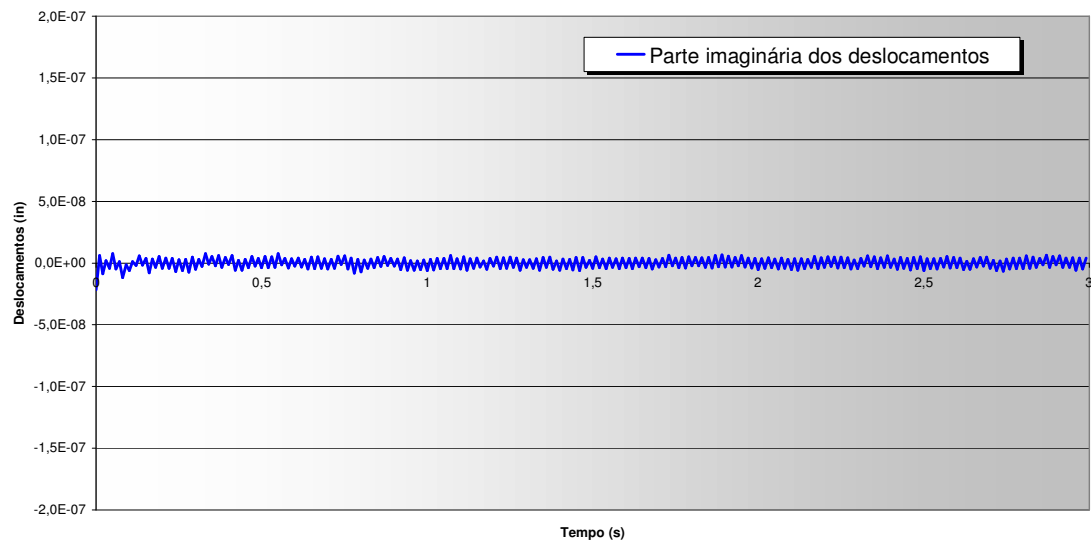


Figura 6.11 - Parte imaginaria dos deslocamentos

6.6 Exemplo 5

O *shear building* da figura (6.12a) foi analisado por Clough e Penzien (1993). Aqui será submetido à excitação mostrada na figura (6.12b), aplicada no piso mais elevado, que será considerado o primeiro grau de liberdade do sistema. O sistema de unidade utilizado naquele trabalho foi mantido, para fins de comparação.

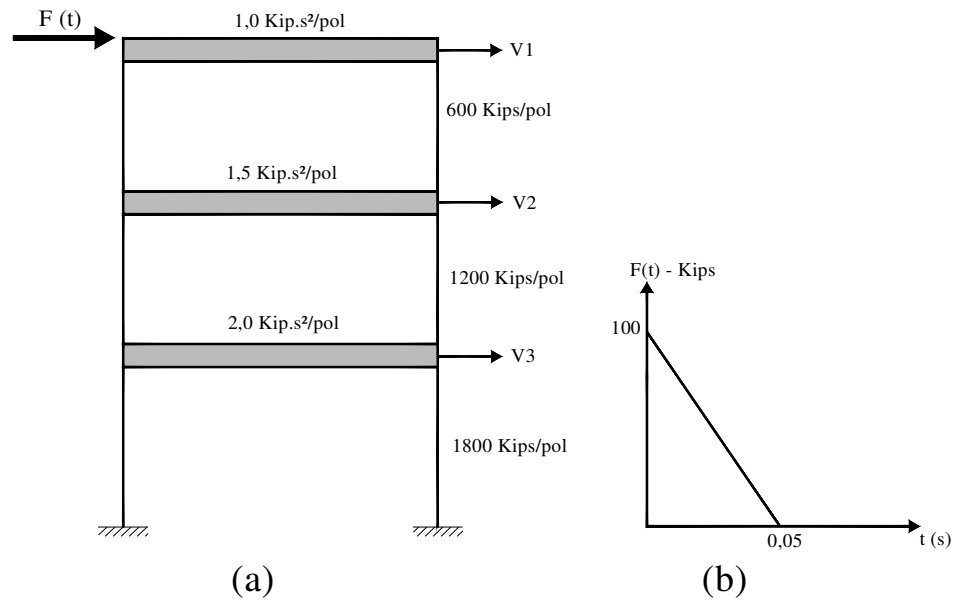


Figura 6.12 - *Shear Building* e carregamento atuante.

As matrizes de massa e rigidez do sistema são

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 1,5 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 2,0 \end{bmatrix} (\text{Kip.s}^2 / \text{pol})$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 600 & -600 & 0 \\ -600 & 1800 & -1200 \\ 0 & -1200 & 3000 \end{bmatrix} (\text{Kips/Pol})$$

Foi considerado um amortecimento de 5% para os modos 1 e 3, resultando desta forma em uma matriz de amortecimento proporcional em coordenadas físicas da forma

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2,09 & -0,99 & 0,0 \\ -0,99 & 4,63 & -1,98 \\ 0,0 & -1,98 & 7,16 \end{bmatrix} \text{ (Kip.s/pol)}$$

O sistema foi analisado utilizando-se o Método ImFT, o método de integração direta Wilson – θ e o método proposto. O intervalo de tempo adotado para análise foi $\Delta t = 0,01$ s para os três métodos, e o tempo de análise foi de 3,0 segundos. Para o método ImFT o número de pontos utilizados no espectro de frequências e nas transformadas de Fourier foi $N = 2000$. Para o Método Proposto N foi adotado como sendo igual a 1000. O valor do parâmetro θ utilizado no método de integração direta foi tomado como sendo igual a 1,4.

As figuras (6.13), (6.14) e (6.15) mostram o histórico de deslocamentos para os graus de liberdade 1, 2 e 3 respectivamente.

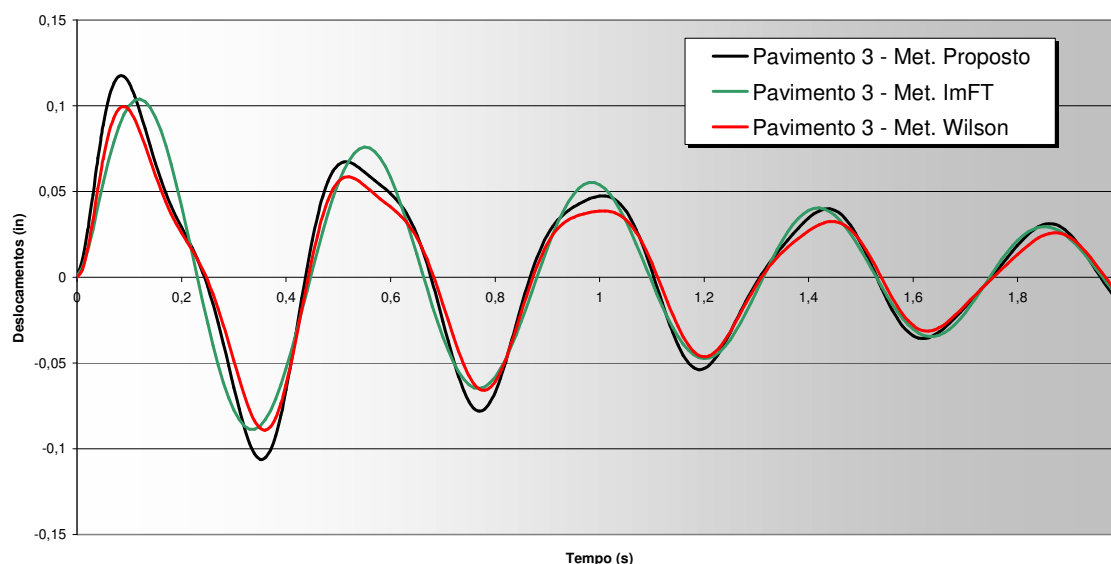


Figura 6.13 - Histórico de deslocamentos - grau de liberdade 1.

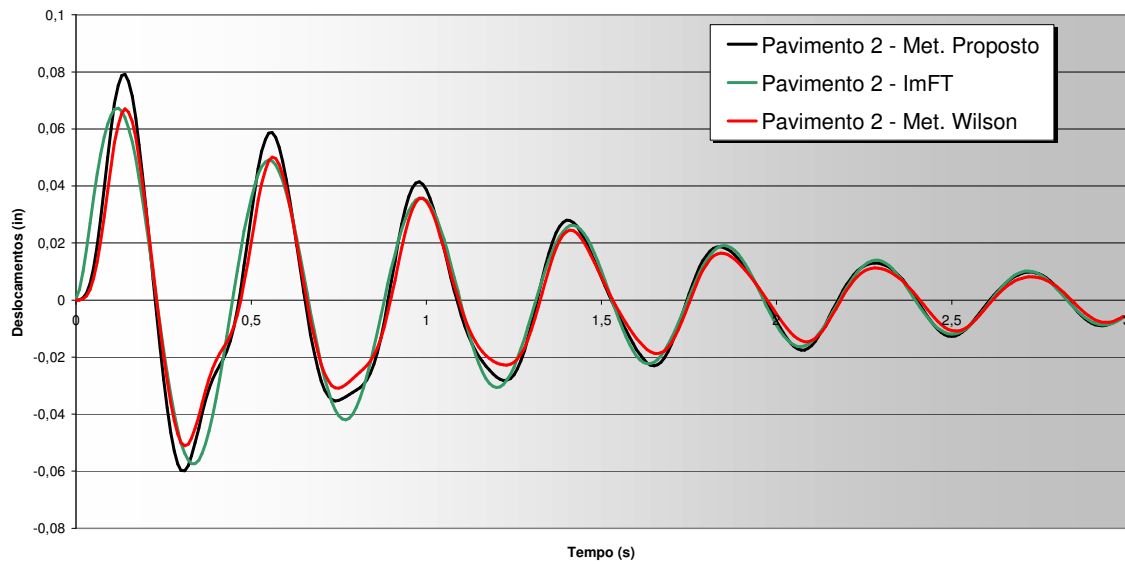


Figura 6.14 - Histórico de deslocamentos - grau de liberdade 2.

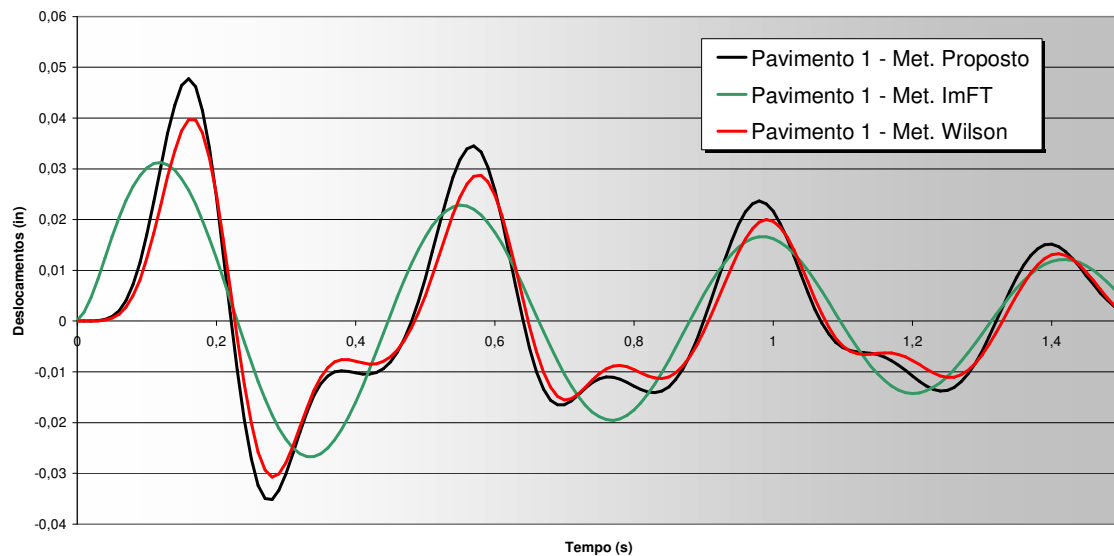


Figura 6.15 - Histórico de deslocamentos - grau de liberdade 3.

A exemplo do exposto para sistemas de um grau de liberdade, a parte imaginária dos deslocamentos não possui sentido físico, podendo ser desprezada, uma vez que os valores obtidos são desprezíveis, conforme ilustram as figuras (6.16), (6.17) e (6.18).

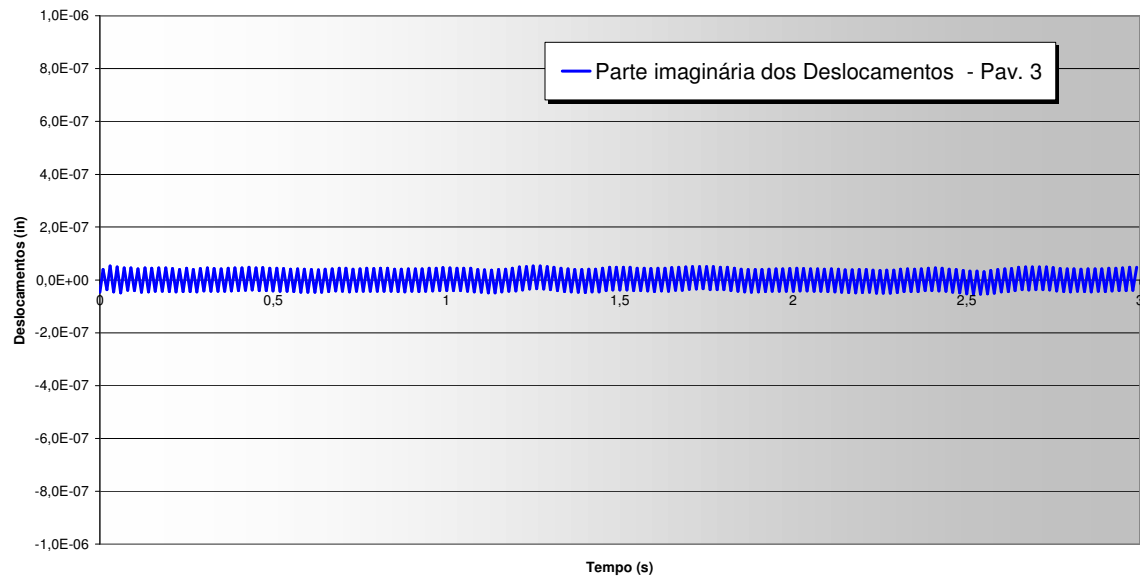


Figura 6.16 - Parte imaginária dos deslocamentos - grau de liberdade 1.

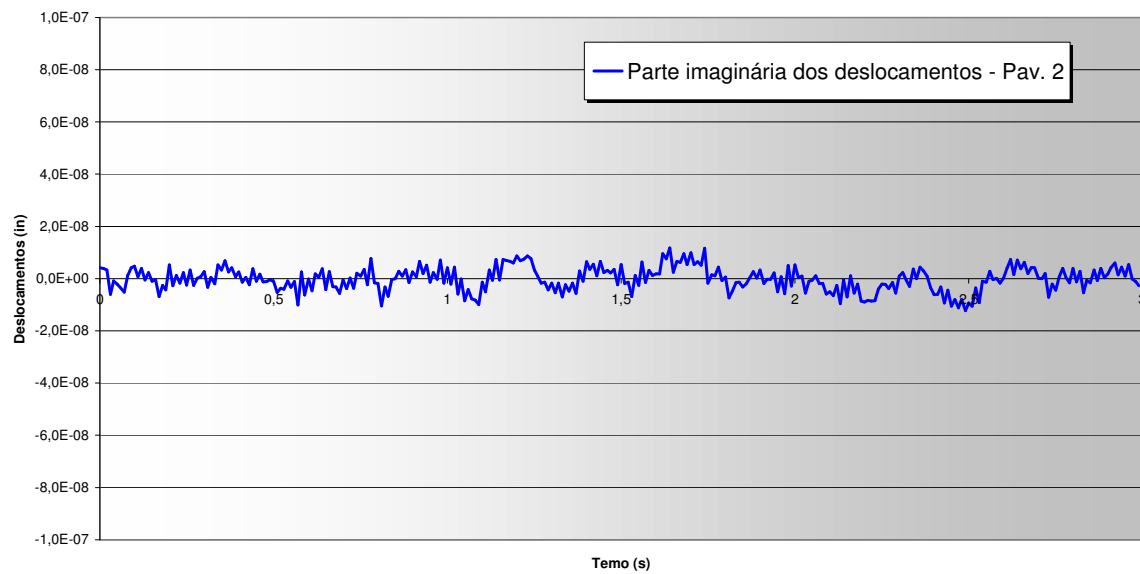


Figura 6.17 - Parte imaginária dos deslocamentos - grau de liberdade 2.

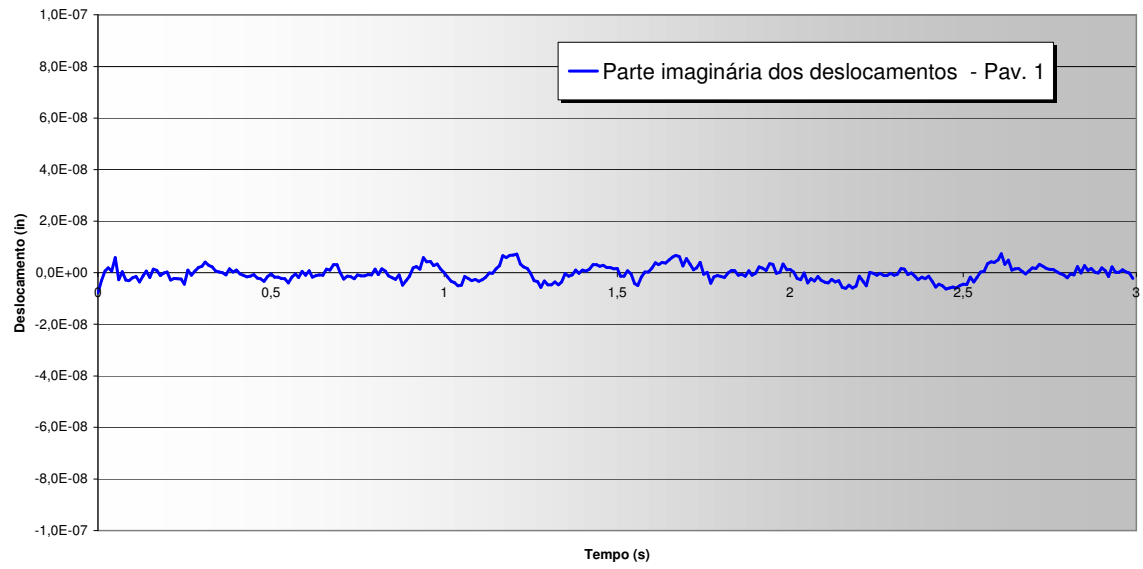


Figura 6.18 - Parte imaginária dos deslocamentos - grau de liberdade 1.

6.7 Exemplo 6

Para validar a formulação para sistemas de múltiplos graus de liberdade, submetidos a condições iniciais, exposta no item 5.4.3, o sistema do exemplo 5 foi submetido, juntamente com a excitação mostrada na figura (6.12b) a um deslocamento inicial de 0.3 in e uma velocidade inicial de 0,05 in/s, aplicados no grau de liberdade 1, e um deslocamento inicial de 0,07 in e uma velocidade inicial de 0,2 in/s, aplicados no grau de liberdade 3.

Desta forma, os vetores de deslocamentos iniciais e velocidades iniciais são:

$$\mathbf{V}_o = \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0 \\ 0,07 \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{V}}_o = \begin{bmatrix} 0,05 \\ 0 \\ 0,2 \end{bmatrix}$$

O intervalo de tempo foi de 0,01 segundo e o tempo de análise foi de 3,0 segundos. Para o Método Proposto N foi adotado como sendo igual a 1000, e o parâmetro θ ,utilizado no método de integração direta Wilson - θ foi adotado como sendo igual a 1,4.

Os histórico de deslocamentos para os graus de liberdade 1, 2 e 3 são mostrados nas figuras (6.19), (6.20) e (6.21) respectivamente.

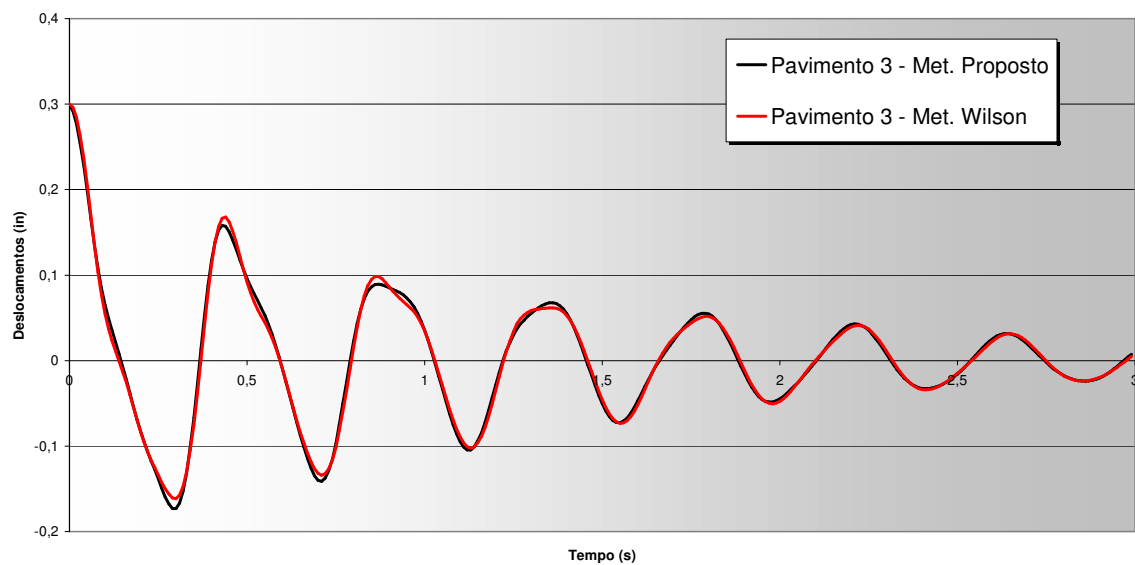


Figura 6.19 - Histórico de deslocamentos – grau de liberdade 1.

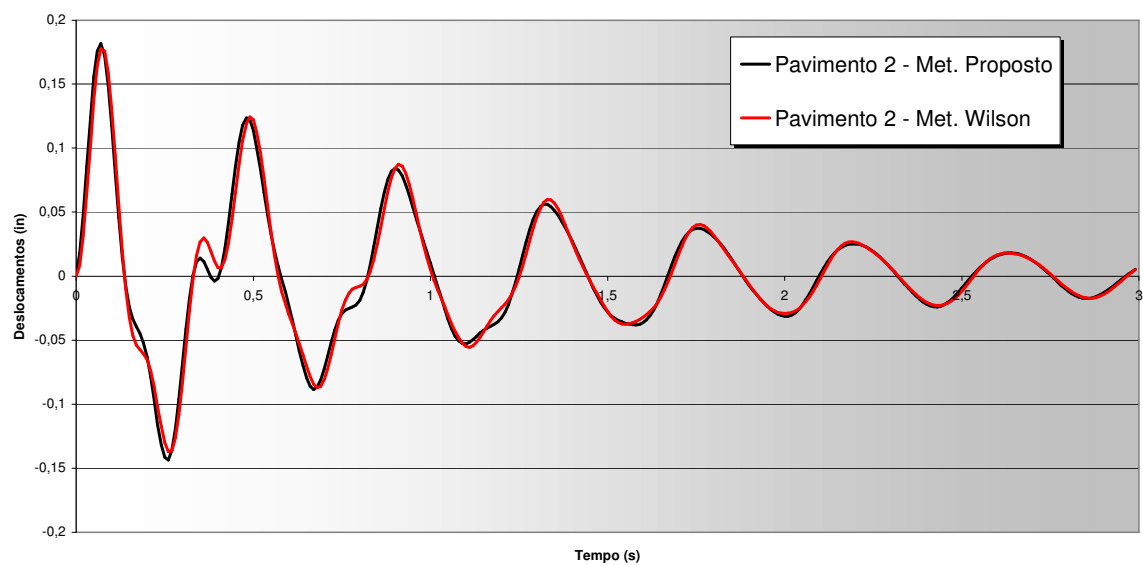


Figura 6.20 - Histórico de deslocamentos – grau de liberdade 2.

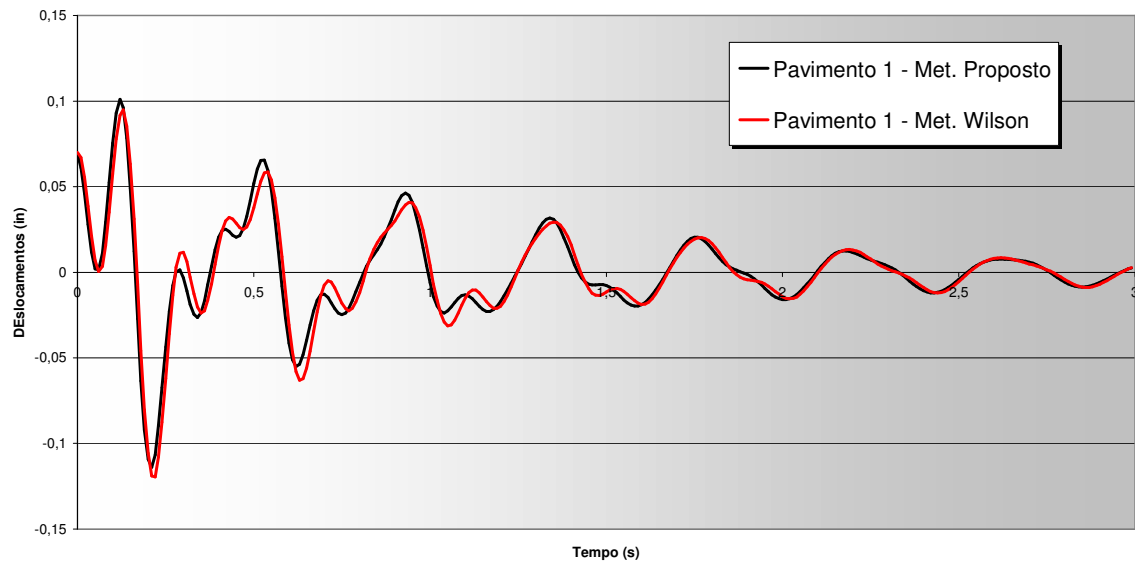


Figura 6.21 - Histórico de deslocamentos – grau de liberdade 3.

As figuras (6.22), (6.23) e (6.24) mostram a parte imaginária dos deslocamentos para os graus de liberdade 1,2 e 3 respectivamente.

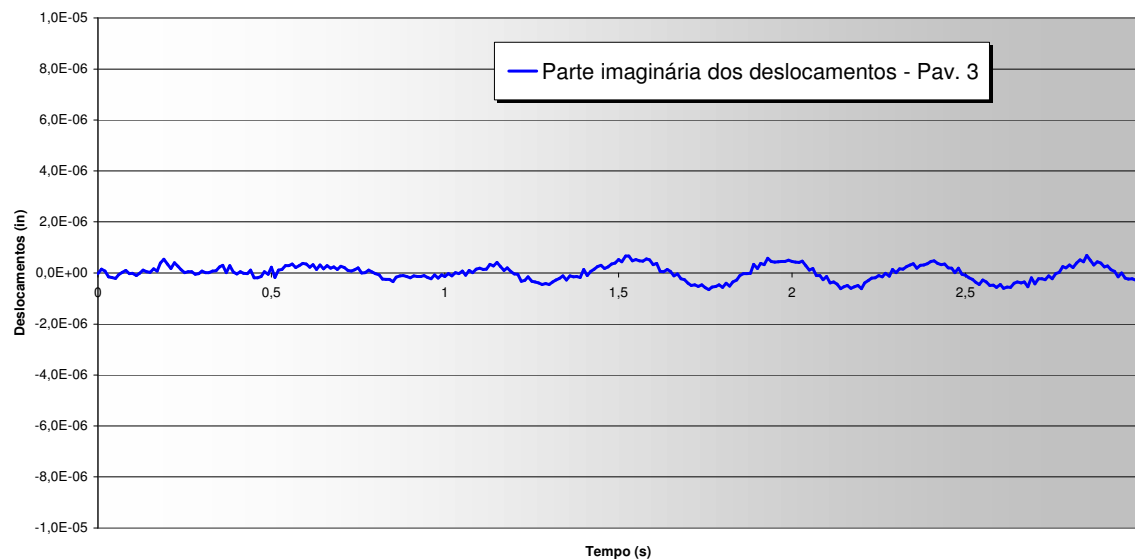


Figura 6.22 - Parte imaginária dos deslocamentos - grau de liberdade 1.

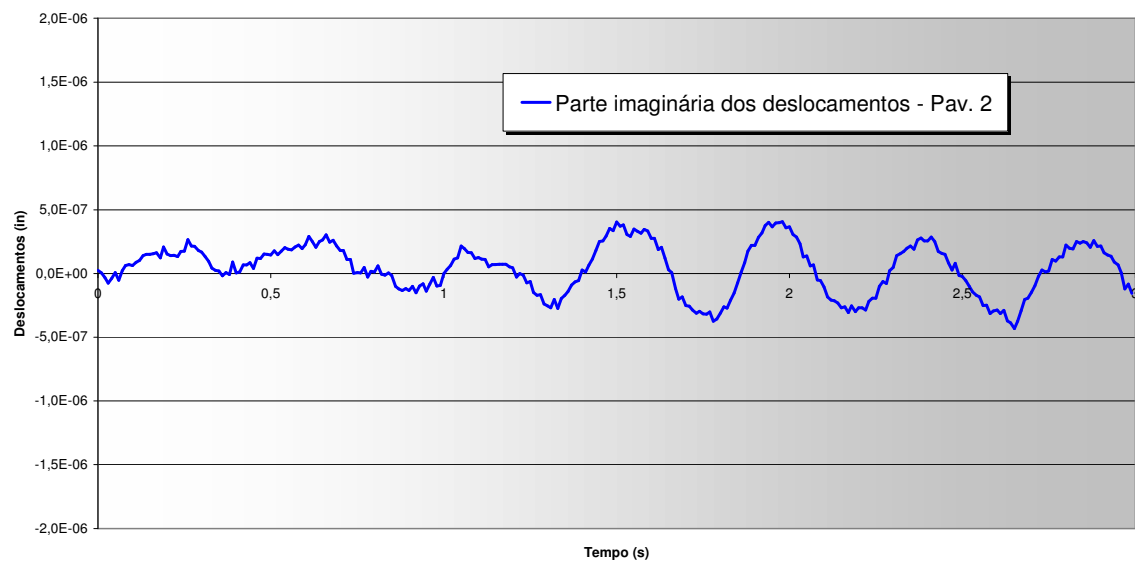


Figura 6.23 - Parte imaginária dos deslocamentos - grau de liberdade 2.

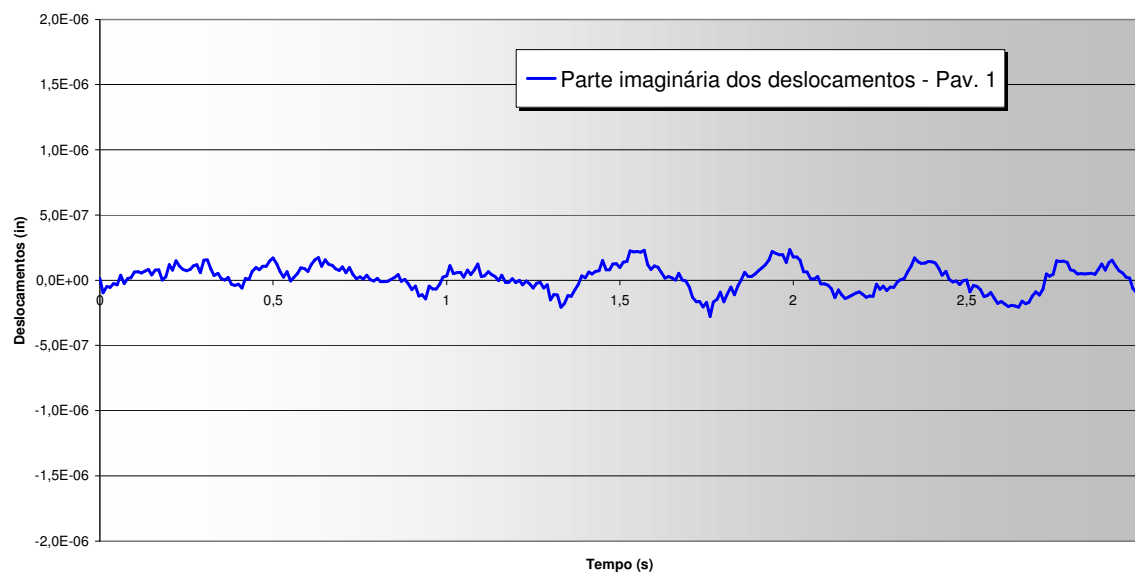


Figura 6.24 - Parte imaginária dos deslocamentos - grau de liberdade 3.

6.8 Exemplo 7

Para se averiguar a precisão da formulação proposta frente à sistemas dotados de amortecimento não proporcional, ao primeiro grau de liberdade do *shear building* do exemplo 5 (figura 6.12a) foi acrescentado um amortecedor discreto, cuja constante de amortecimento c vale 20 Kips.s/pol. O sistema com amortecedor discreto e o carregamento atuante são mostrados na figura (6.25a) e (6.25b)

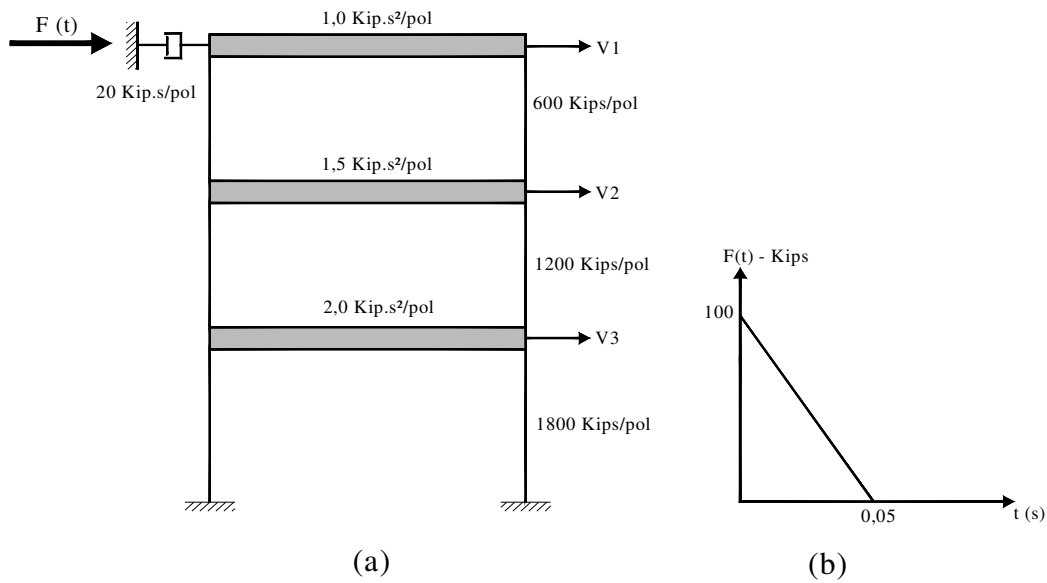


Figura 6.25 - *Shear building* com amortecedor discreto e carregamento atuante.

A inclusão do amortecedor discreto faz com que se some o valor de c ao termo de ordem (1,1) da matriz de amortecimento dada no exemplo 3. Logo:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 22,09 & -0,99 & 0,0 \\ -0,99 & 4,63 & -1,98 \\ 0,0 & -1,98 & 7,16 \end{bmatrix} (\text{Kip.s/pol})$$

Desta forma, o produto $\Phi^T \mathbf{C} \Phi$ conduziu à matriz de amortecimento modal

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 12,48 & -9,44 & 3,12 \\ -9,44 & 10,78 & -2,67 \\ 3,12 & -2,67 & 5,49 \end{bmatrix}$$

cujos termos fora da diagonal principal causam o acoplamento do sistema de equações modais de movimento.

O sistema foi analisado utilizando-se o Método ImFT, o método de integração direta Wilson – θ e o método proposto. O intervalo de tempo adotado para análise foi $\Delta t = 0,01$ s para os três métodos, e o tempo de análise foi de 3.0 segundos. Para o método ImFT o número de pontos utilizados no espectro de frequências e nas transformadas de Fourier foi $N = 2.000$. Para o Método Proposto N foi adotado como sendo igual a 1000. O valor do parâmetro θ utilizado no método de integração direta foi tomado como sendo igual a 1,4.

As figuras (6.26), (6.27) e (6.28) mostram o histórico de deslocamentos para os graus de liberdade 1, 2 e 3 respectivamente. Nota-se que o método ImFT apresenta significativa diferença em relação ao Método Wilson- θ e ao método proposto. Esta diferença deve-se, possivelmente ao fato de que o método ImFT utiliza o método de superposição modal para desacoplar as equação de movimento e, em se tratando de um sistema com amortecimento não proporcional este procedimento pode levar a resultados pouco precisos.

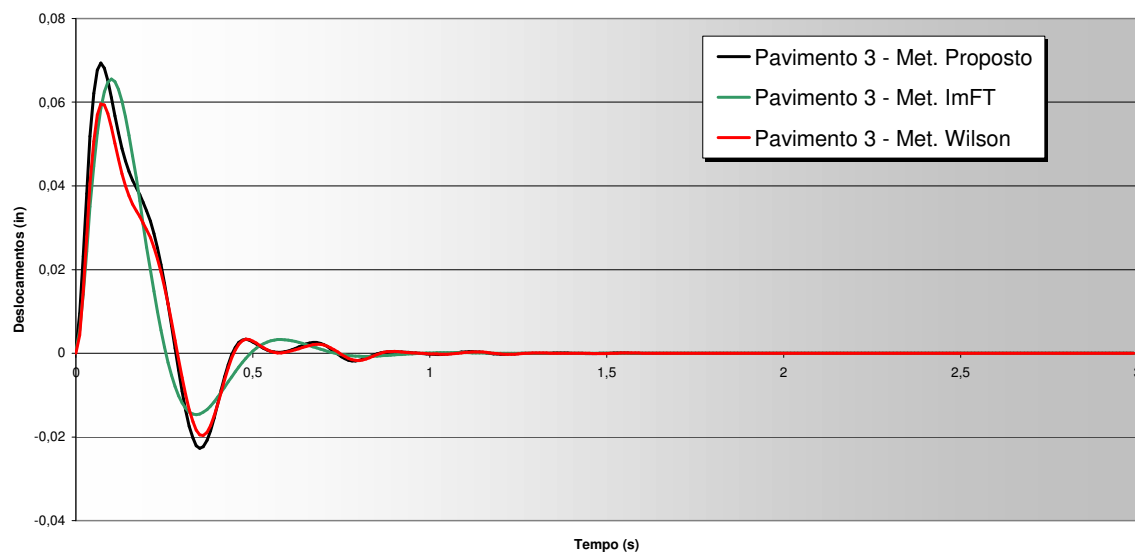


Figura 6.26 - Histórico de deslocamentos - grau de liberdade 1.

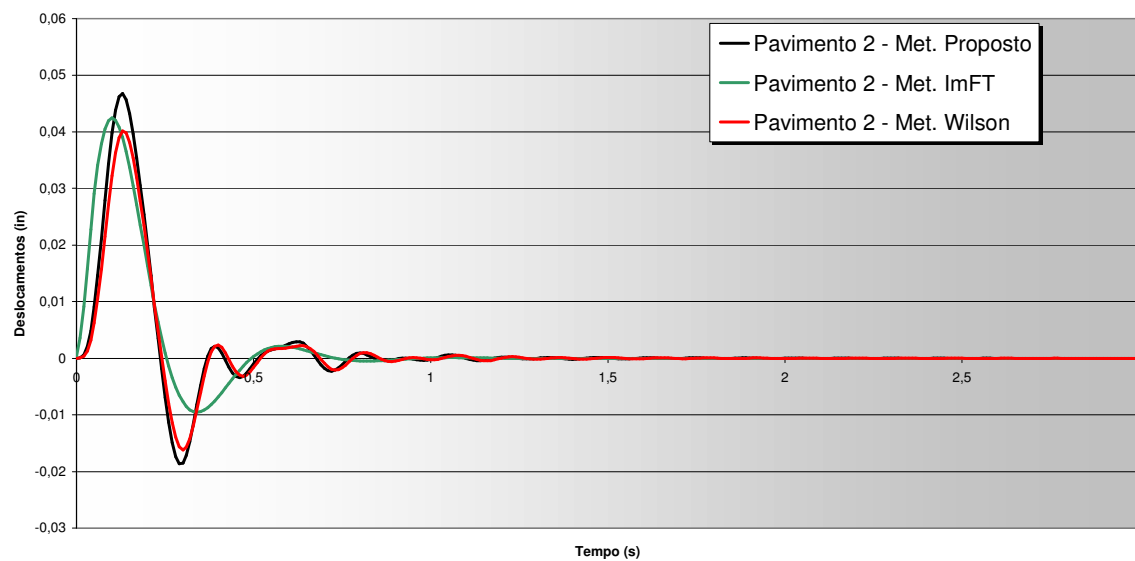


Figura 6.27 - Histórico de deslocamentos - grau de liberdade 2.

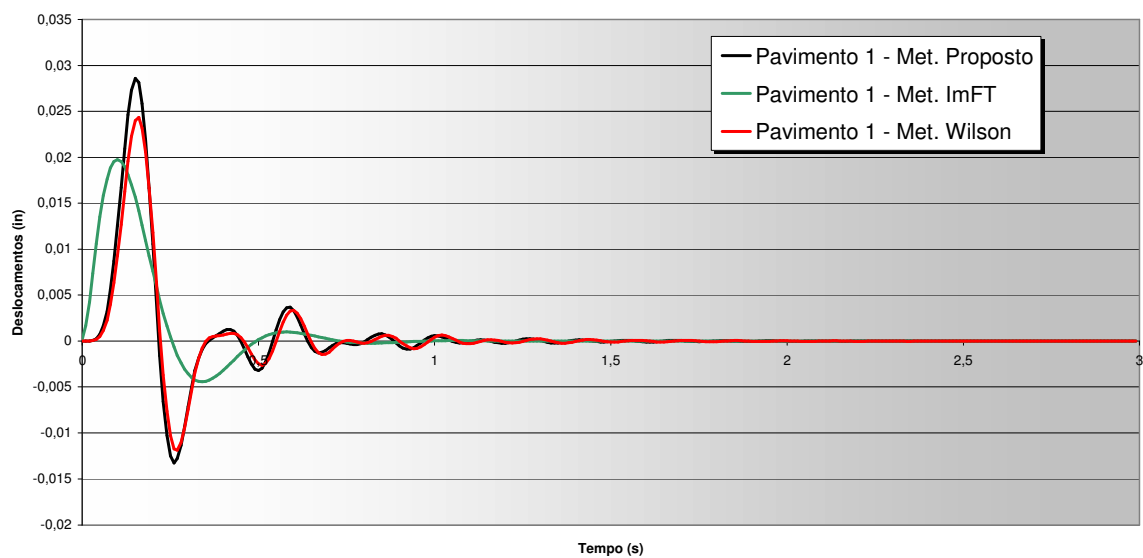


Figura 6.28 - Histórico de deslocamentos - grau de liberdade 3.

As figuras (6.29), (6.30) e (6.31) mostram a parte imaginária dos deslocamentos.

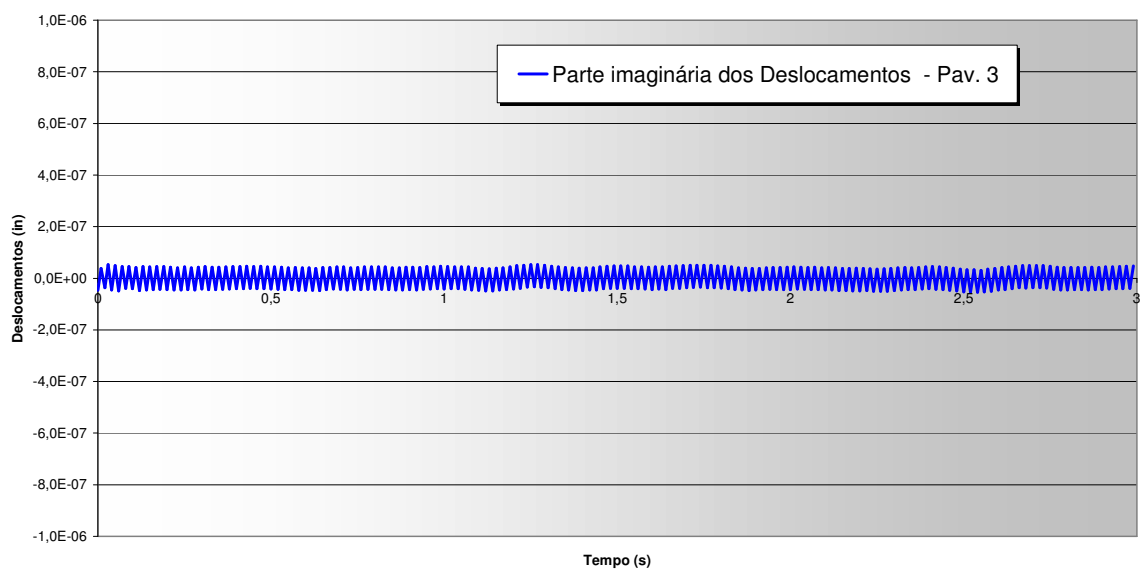


Figura 6.29 - Parte imaginária dos deslocamentos - grau de liberdade 1.

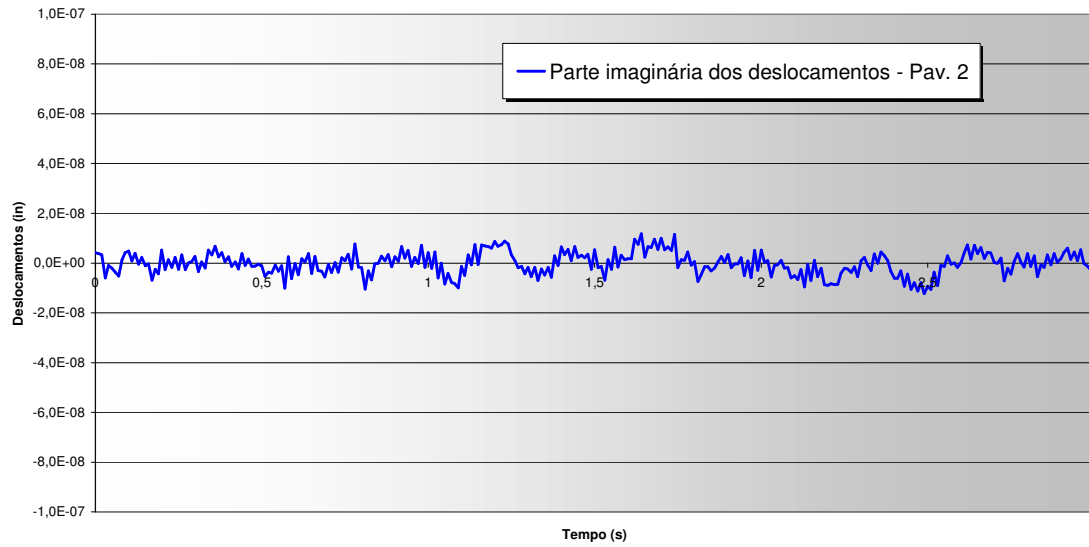


Figura 6.30 - Parte imaginária dos deslocamentos - grau de liberdade 2.

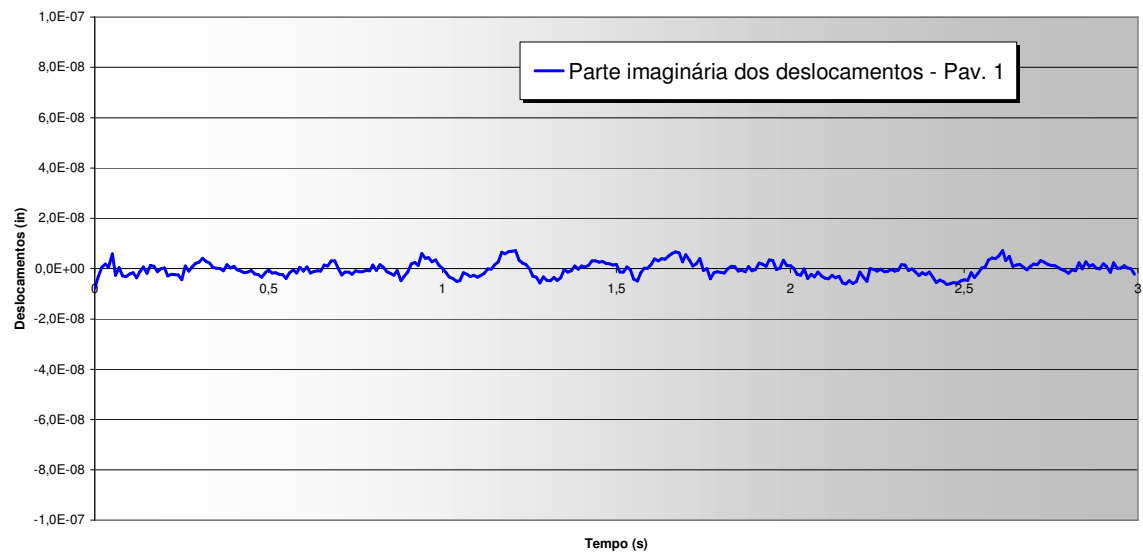


Figura 6.31 - Parte imaginária dos deslocamentos - grau de liberdade 3.

6.9 Exemplo 8

Considera-se o *shear building* da figura (6.32a), submetido ao carregamento mostrado na figura (6.32b). O primeiro grau de liberdade é considerado como sendo o pavimento mais elevado. Aos graus de liberdade 2 e 3 foram adicionados amortecedores discretos c_2 e c_3 .

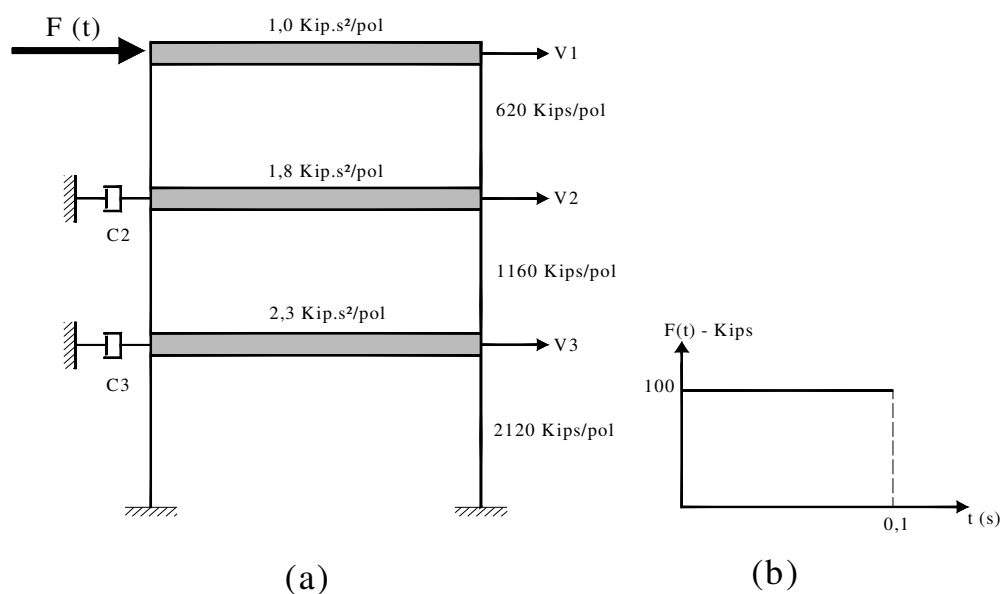


Figura 6.32 - *Shear building* e carregamento atuante.

As matrizes de massa e rigidez são:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 1,8 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 2,3 \end{bmatrix} (\text{Kip.s}^2 / \text{pol})$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 620 & -620 & 0 \\ -620 & 1780 & -1160 \\ 0 & -1160 & 3280 \end{bmatrix} (\text{Kips/Pol})$$

A matriz de amortecimento, sem contabilizar a contribuição dos amortecedores discretos é

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3,1 & -3,1 & 0,0 \\ -3,1 & 8,9 & -5,8 \\ 0,0 & -5,8 & 16,4 \end{bmatrix} \text{ (Kip.s/pol)}$$

O amortecedor concentrado c_2 possui valor 10 kips.s/pol.

O amortecedor concentrado c_3 é tomado como sendo função do amortecedor c_2 , função esta dada por

$$c_3 = \lambda c_2$$

O parâmetro λ foi adotado para 5 casos, cujos valores são:

Caso	λ	C_3
1	0	0
2	1	10
3	2	20
4	5	50
5	10	100

Para o caso 1 o amortecedor c_2 foi também adotado como sendo zero. Assim para este caso a matriz de amortecimento é proporcional

O sistema foi analisado para todos os casos utilizando-se o Método ImFT, o método de integração direta Wilson – θ e o método proposto. O intervalo de tempo adotado para análise foi $\Delta t = 0,01$ s para os três métodos, e o tempo total de análise foi de 3,0 segundos. Para o método ImFT o número de pontos utilizados no espectro de frequências e nas

transformadas de Fourier foi $N = 2000$. Para o método proposto N foi adotado como sendo igual a 1000. O valor do parâmetro θ utilizado no método de integração direta foi tomado como sendo igual a 1,4.

Caso 1

Para o caso 1 (sistema sem amortecedores concentrados), a matriz de amortecimento é proporcional, sendo dada por

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3,1 & -3,1 & 0,0 \\ -3,1 & 8,9 & -5,8 \\ 0,0 & -5,8 & 16,4 \end{bmatrix} \text{ (Kip.s/pol)}$$

Os deslocamentos para os graus de liberdade 1, 2 e 3 são mostrados nas figuras (6.33), (6.34) e (6.35).

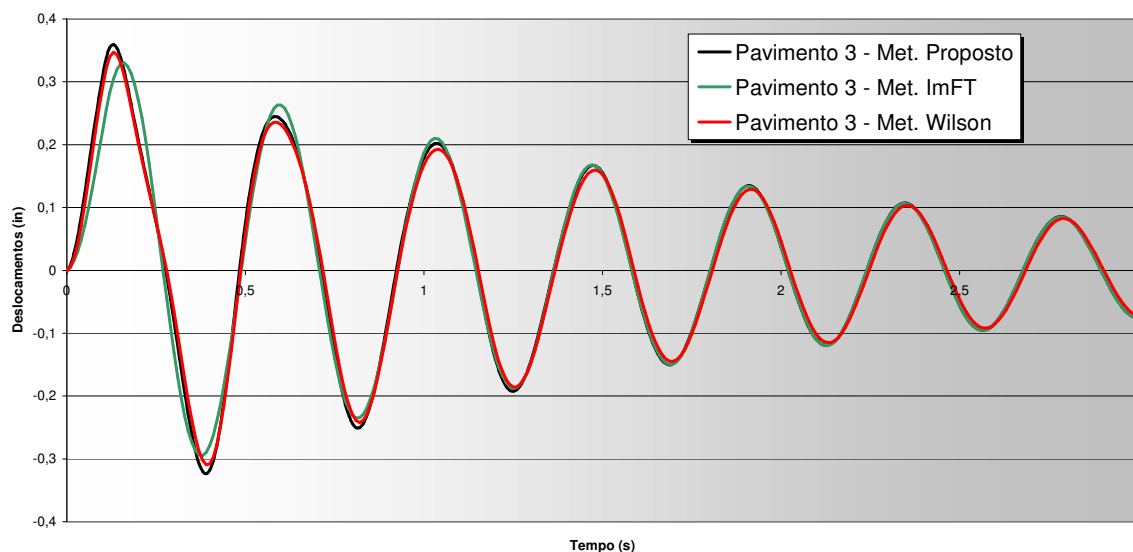


Figura 6.33 - Histórico de deslocamentos - grau de liberdade 1

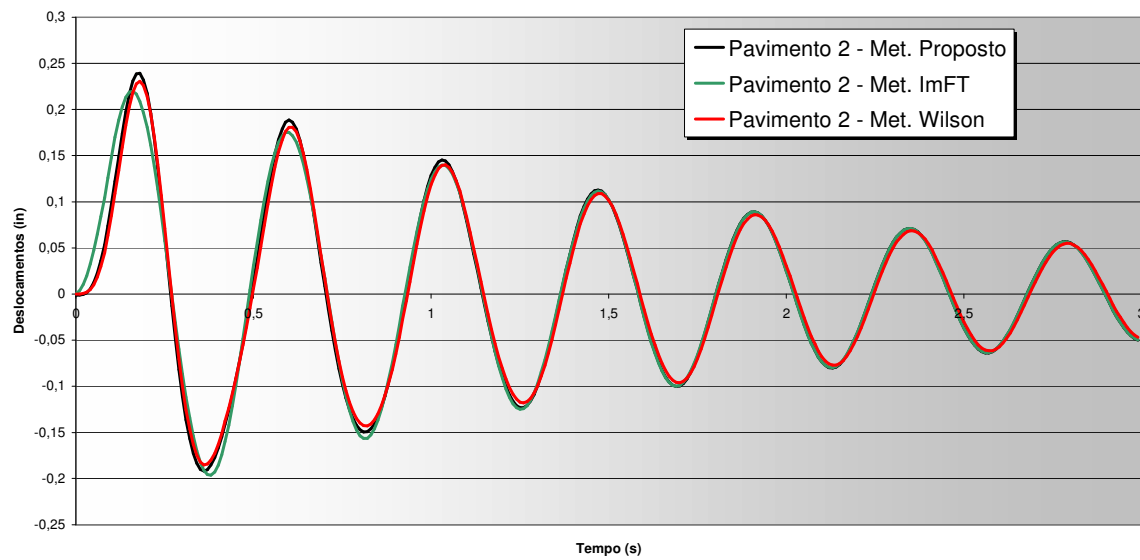


Figura 6.34 - Histórico de deslocamentos – grau de liberdade 2.

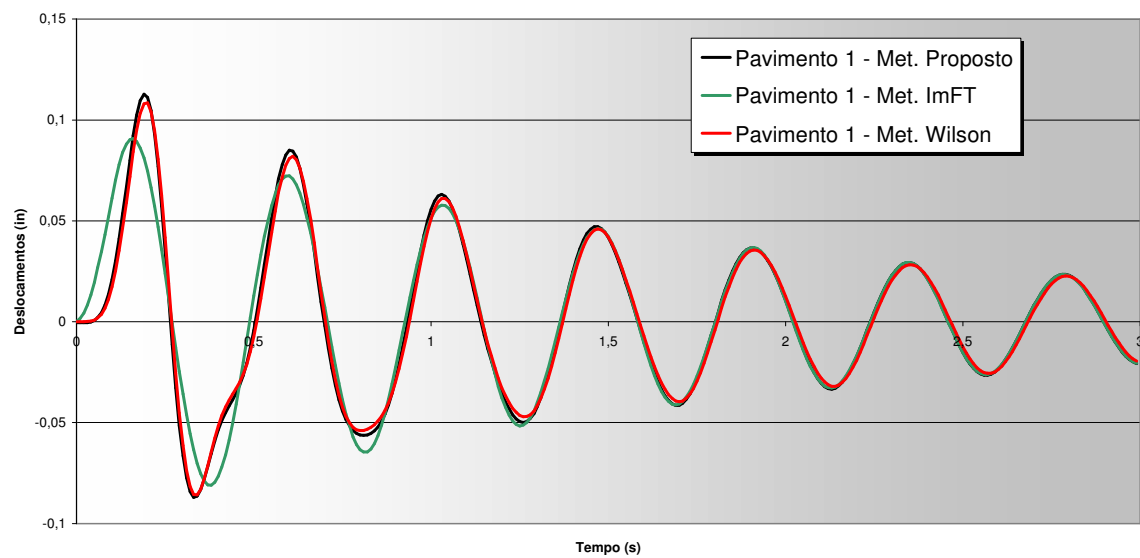


Figura 6.35 - Histórico de deslocamentos - grau de liberdade 3.

Caso 2

Para o caso 2 ($\lambda = 1$), tem-se o amortecedor discreto c_2 com valor constante igual a 10 kips.s/pol e o amortecedor c_3 com valor também igual a 10 kips.s/pol. Desta forma, à matriz de amortecimento será somado o valor 10 kips.s/pol nas direções 2 e 3, resultando em:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3,1 & -3,1 & 0,0 \\ -3,1 & 18,9 & -5,8 \\ 0,0 & -5,8 & 26,4 \end{bmatrix} \text{ (Kip.s/pol)}$$

As figuras (6.36), (6.37) e (6.38) mostram os históricos de deslocamentos para os graus de liberdade 1, 2 e 3.

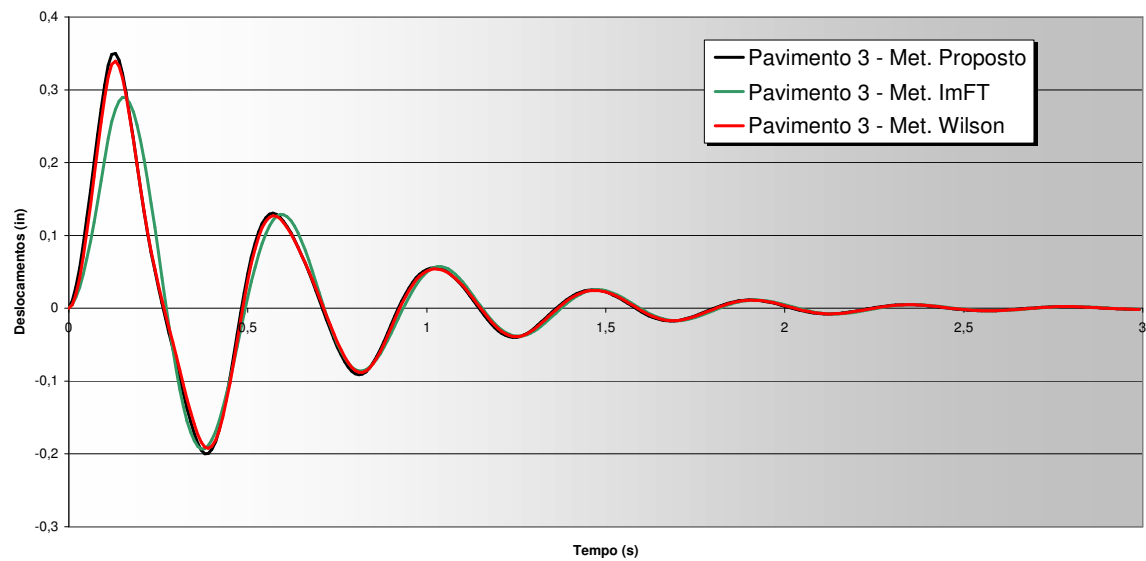


Figura 6.36 - Histórico de deslocamentos - grau de liberdade 1.

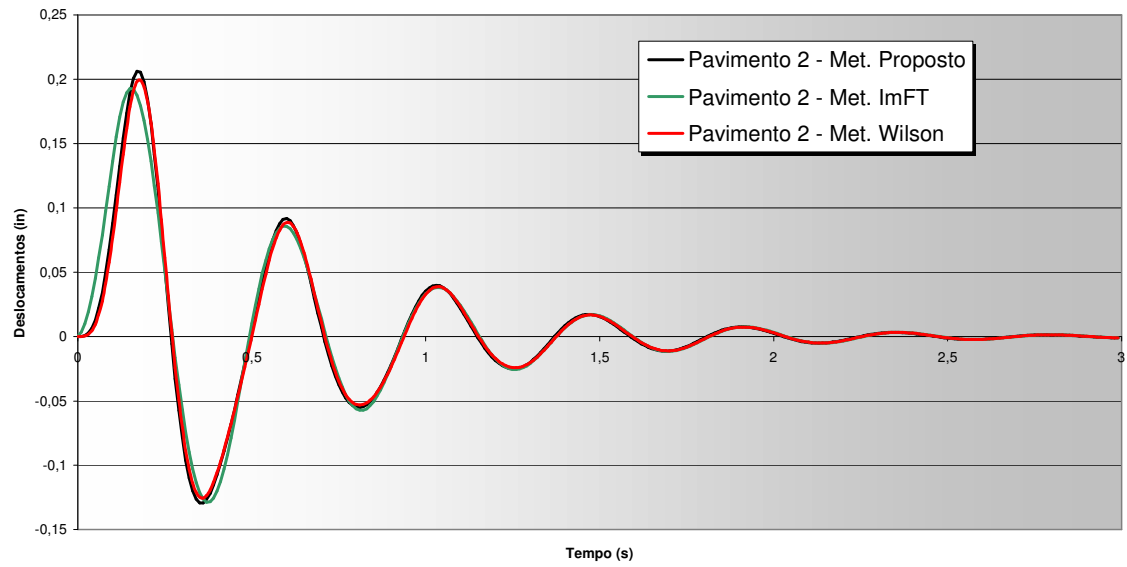


Figura 6.37 - Histórico de deslocamentos - grau de liberdade 2.

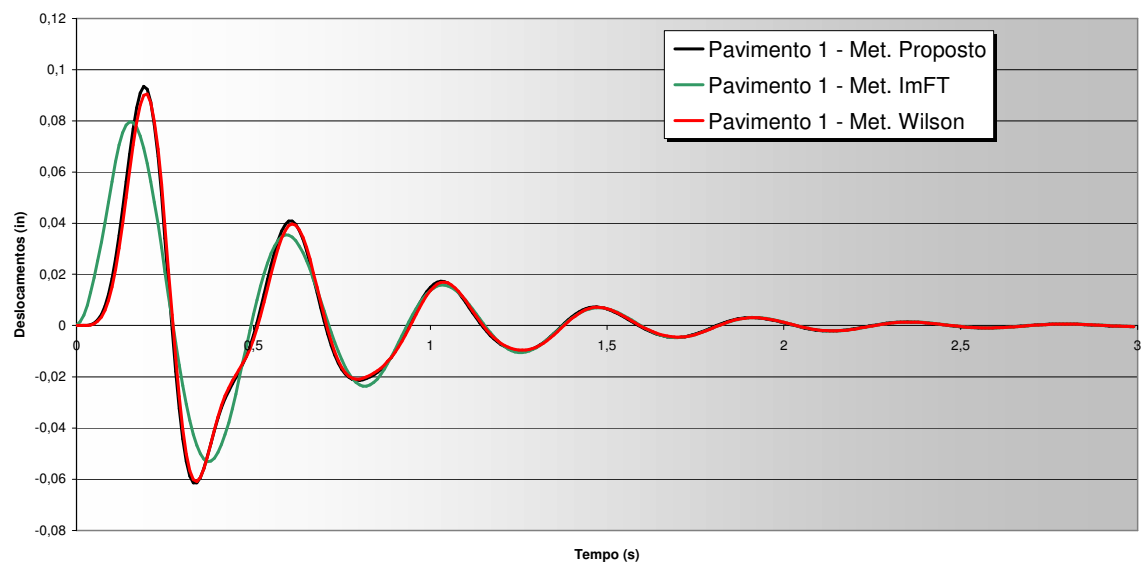


Figura 6.38 - Histórico de deslocamentos - grau de liberdade 3.

Caso 3

Para o caso 3 ($\lambda = 2$), tem-se o amortecedor discreto c_2 com valor constante igual a 10 kips.s/pol e o amortecedor c_3 com valor igual a 20 kips.s/pol. Desta forma, à matriz de amortecimento será somado o valor 10 kips.s/pol nas direções 2 e 20 kips.s/pol na direção 3, resultando em:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3,1 & -3,1 & 0,0 \\ -3,1 & 18,9 & -5,8 \\ 0,0 & -5,8 & 36,4 \end{bmatrix} \text{ (Kip.s/pol)}$$

As figuras (6.39), (6.40) e (6.41) mostram os históricos de deslocamentos para os graus de liberdade 1, 2 e 3.

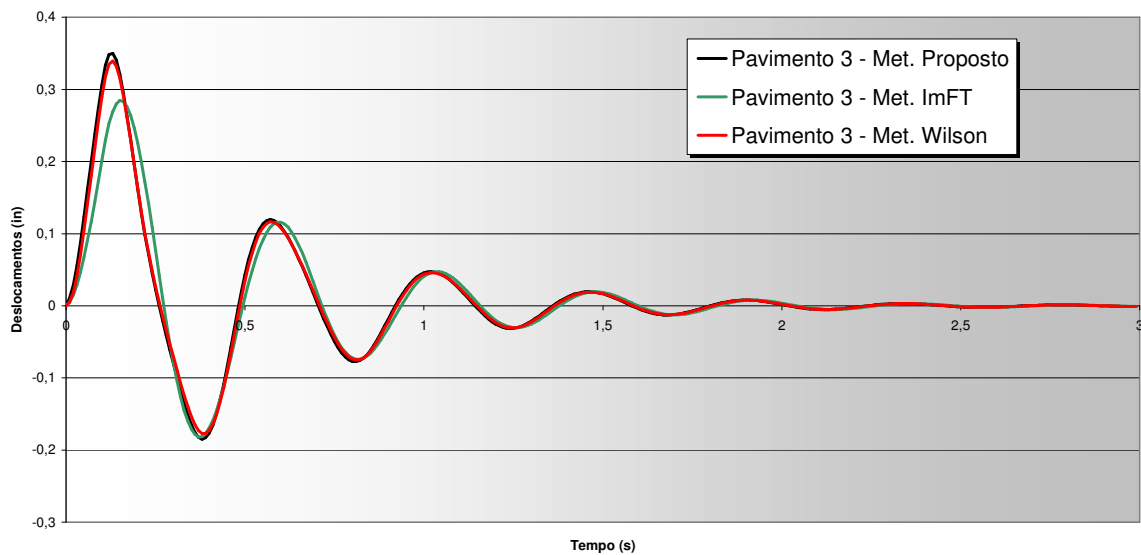


Figura 6.39 - Histórico de deslocamentos - grau de liberdade 1.

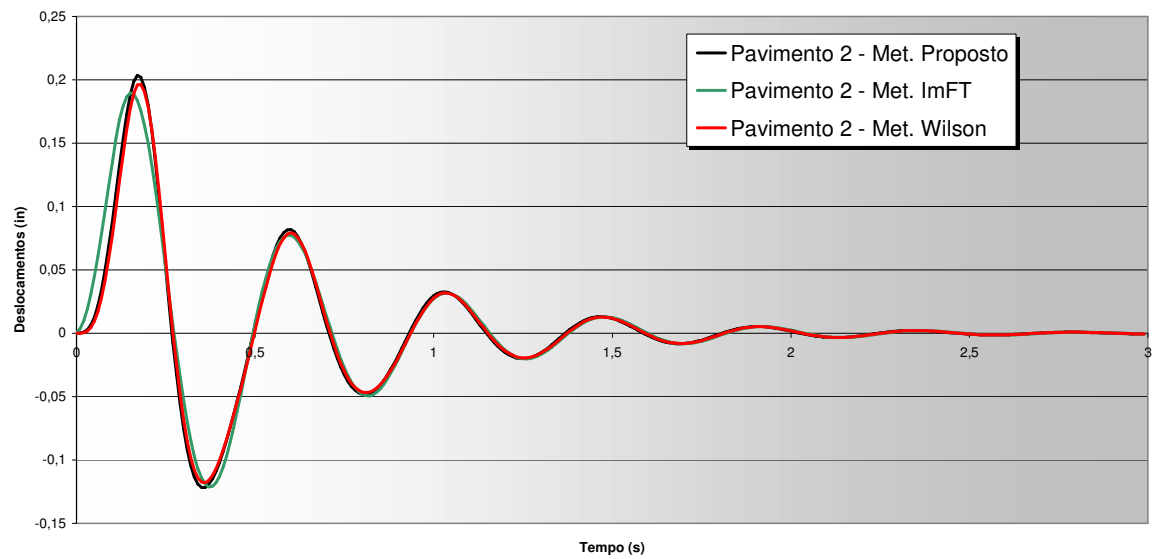


Figura 6.40 - Histórico de deslocamentos - grau de liberdade 2.

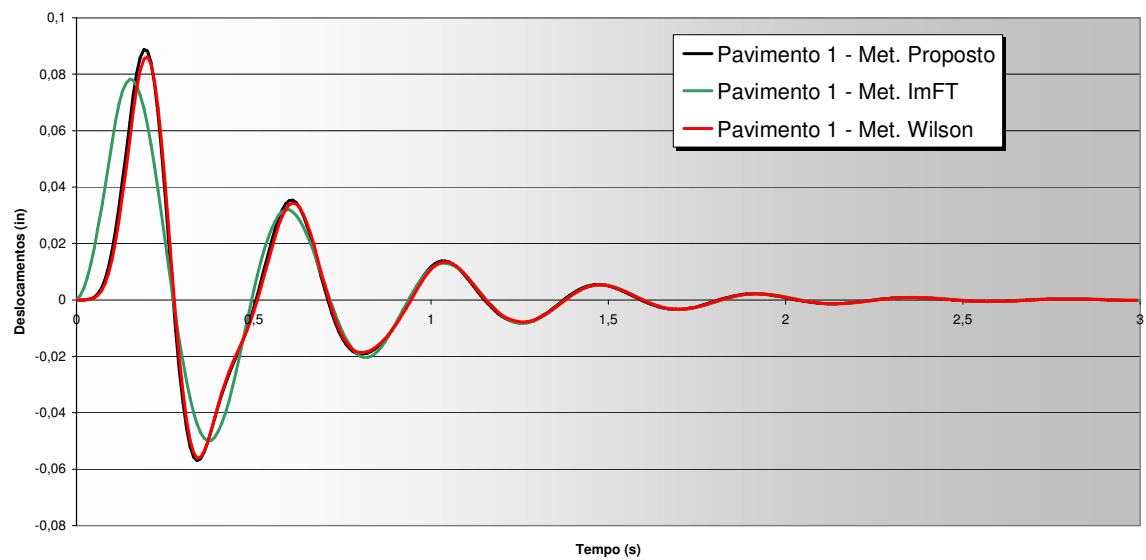


Figura 6.41 - Histórico de deslocamentos - grau de liberdade 3.

Caso 4

Para o caso 4 ($\lambda = 50$), tem-se o amortecedor discreto c_2 com valor constante igual a 10 kips.s/pol e o amortecedor c_3 com valor igual a 50 kips.s/pol. Assim, somam-se, à matriz de amortecimento o valor 10 kips.s/pol na direção 2 e 50 kips.s/pol na direção 3, resultando em:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3,1 & -3,1 & 0,0 \\ -3,1 & 18,90 & -5,8 \\ 0,0 & -5,8 & 66,4 \end{bmatrix} \text{ (Kip.s/pol)}$$

As figuras (6.42), (6.43) e (6.44) mostram os históricos de deslocamentos para os graus de liberdade 1, 2 e 3.

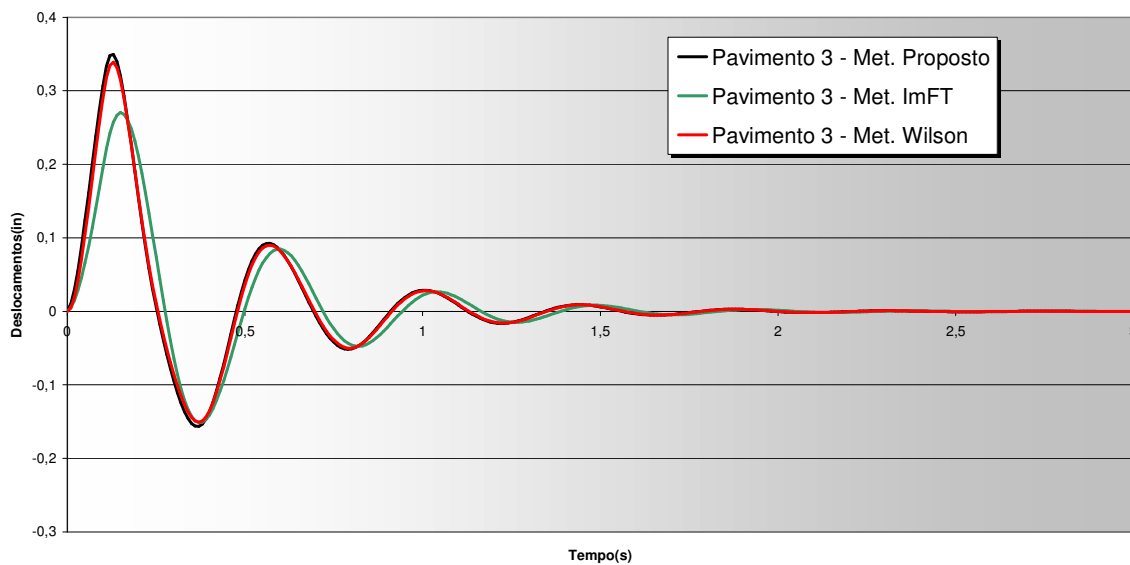


Figura 6.42 - Histórico de deslocamentos - grau de liberdade 1.

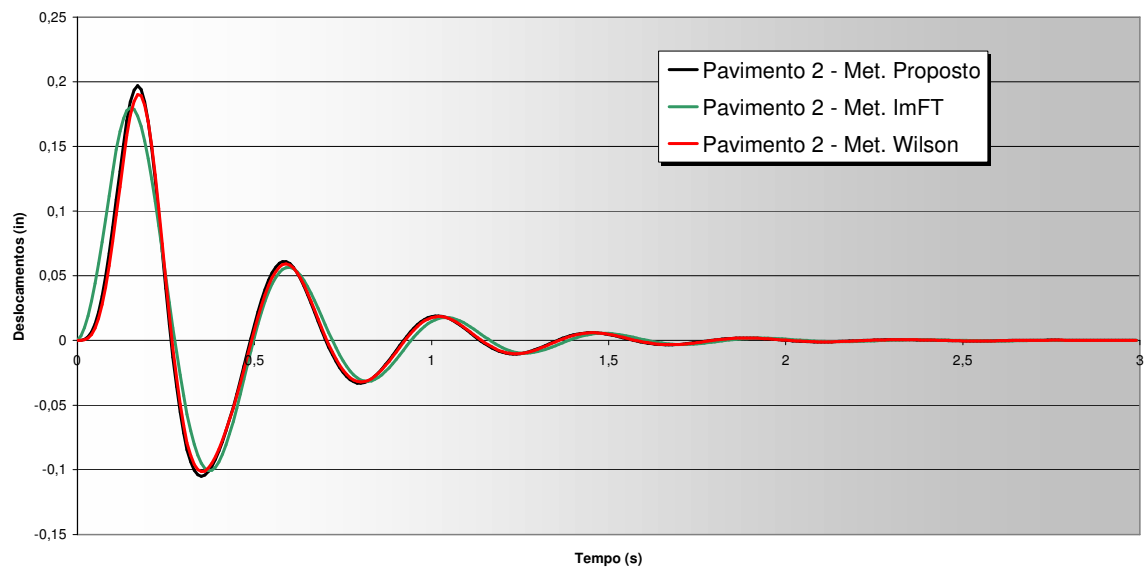


Figura 6.43 - Histórico de deslocamentos - grau de liberdade 3.

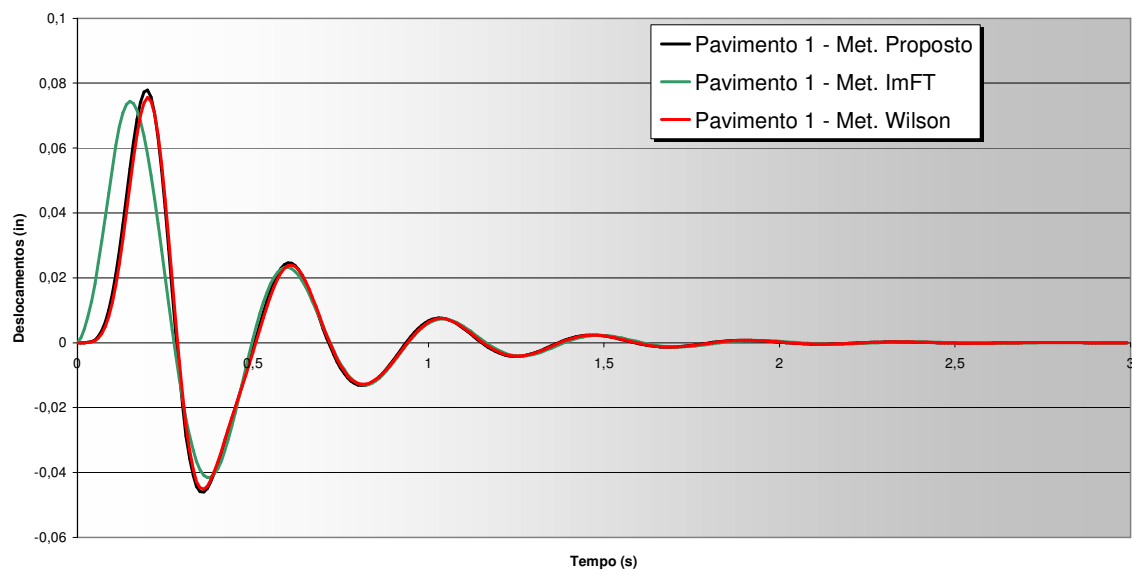


Figura 6.44 - Histórico de deslocamentos - grau de liberdade 3.

Caso 5

Para o caso 5 ($\lambda = 100$), tem-se o amortecedor discreto c_2 com valor constante igual a 10 kips.s/pol e o amortecedor c_3 com valor igual a 100 kips.s/pol. Assim, somam-se, à matriz de amortecimento o valor 10 kips.s/pol na direção 2 e 100 kips.s/pol na direção 3, resultando em:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3,1 & -3,1 & 0,0 \\ -3,1 & 18,9 & -5,8 \\ 0,0 & -5,8 & 116,4 \end{bmatrix} \text{ (Kip.s/pol)}$$

Os históricos de deslocamentos para os graus de liberdade 1, 2 e 3. são mostrados nas figuras (6.45), (6.46) e (6.47) respectivamente.

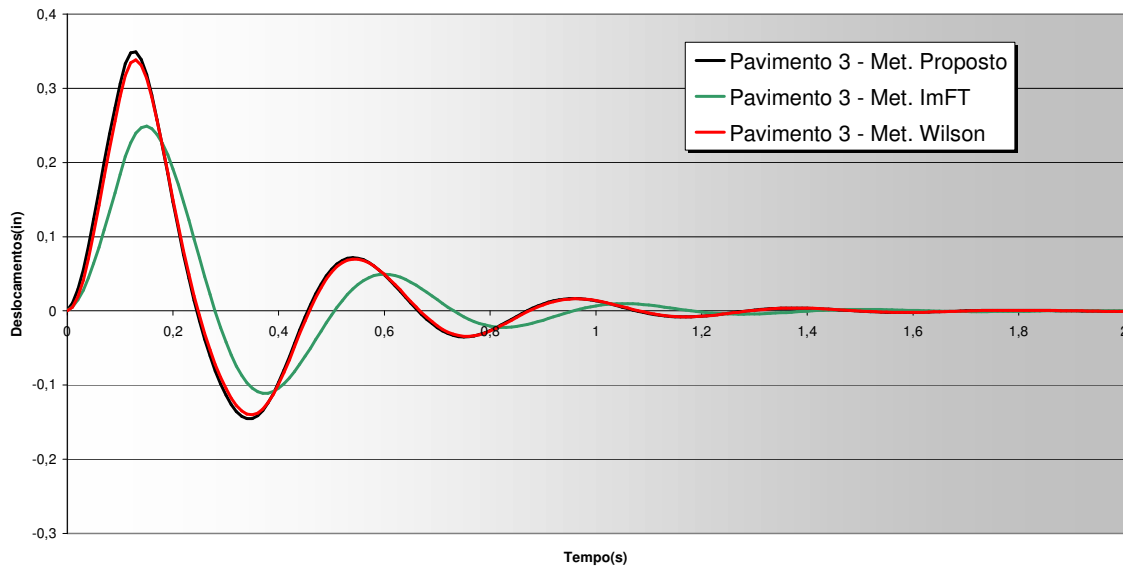


Figura 6.45 - Histórico de deslocamentos - grau de liberdade 1.

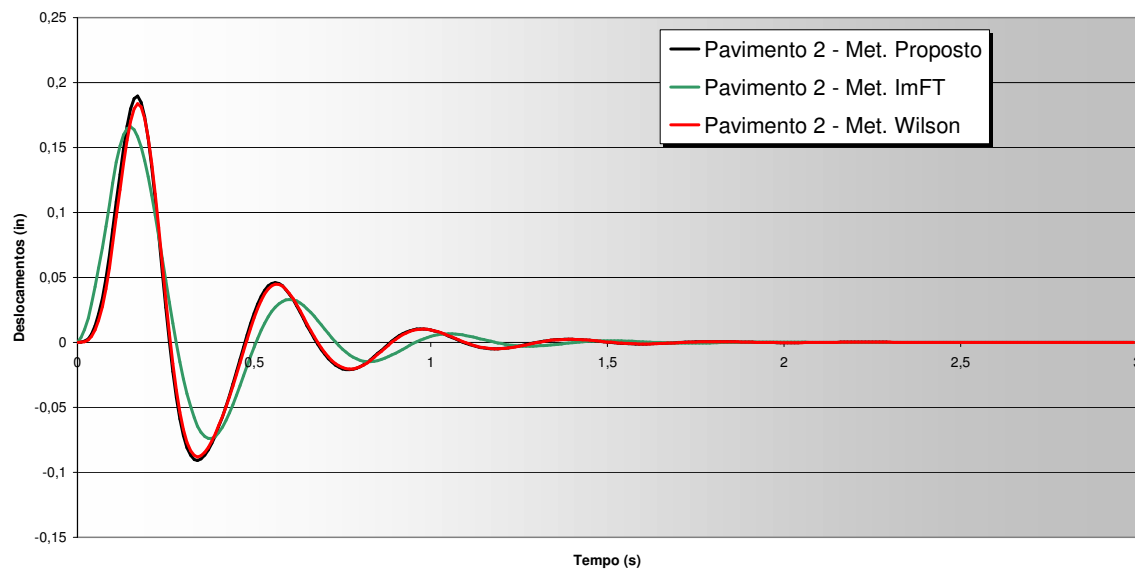


Figura 6.46 - Histórico de deslocamentos - grau de liberdade 2.

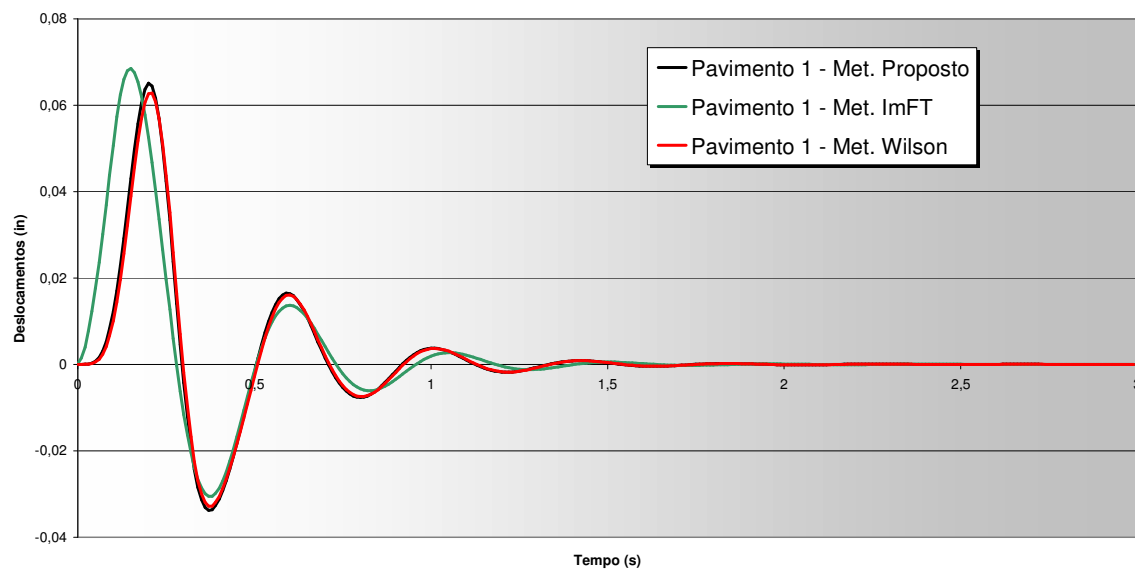


Figura 6.47 - Histórico de deslocamentos - grau de liberdade 3.

Como pode ser observado, para o caso 1, onde a matriz de amortecimento é proporcional, os três métodos fornecem resultados praticamente idênticos. O aumento do valor do parâmetro λ , com o conseqüente aumento do acoplamento do sistema faz com que

os resultados fornecidos pelo método ImFT diverjam dos apresentados pelo método de integração direta Wilson- θ e pelo método proposto. Esta diferença pode ser explicada pelo fato de que o método ImFT utiliza a matriz modal Φ para desacoplar o sistema de equações modais. Como a matriz de amortecimento é não proporcional, o sistema de equações não pode ser desacoplado pelo método de superposição modal.

A parte imaginária dos deslocamentos possui magnitude da ordem de 10^{-7} , de maneira semelhante àquela mostrada para o sistema do exemplo 5, razão pela qual seus históricos para os casos do exemplo 8 não foram mostrados.

Ressalta-se também que em todos os exemplos estudados, o número N de pontos utilizados na formulação proposta foi sempre 50% menor que os utilizados no método ImFT. Contudo, essa diferença não implicou em nenhum prejuízo na precisão das respostas obtidas pela formulação proposta quando comparadas com as fornecidas pelo método de integração direta Wilson – θ .

7.1 Conclusões

Ao surgimento do algoritmo FFT pôde-se creditar a viabilidade da análise dinâmica no domínio da frequência, uma vez que o esforço computacional para se calcular as transformadas discretas de Fourier (DFT), exigidas neste tipo de análise, foi drasticamente reduzido. Ao longo dos anos, o algoritmo FFT foi sendo otimizado e adaptado aos vários campos científicos onde é utilizado, dentre os quais o da dinâmica estrutural.

O método ImFT surgiu como alternativa ao algoritmo FFT, uma vez que permitiu uma maior flexibilidade na escolha do número N de termos a ser utilizado nas transformadas de Fourier. No entanto, a extração dos autovalores do problema é exigida no método ImFT, e em se tratando de sistemas de múltiplos graus de liberdade seu custo computacional pode ser elevado.

A formulação proposta neste trabalho pode ser entendida como uma variação do método ImFT, uma vez que não faz exigências acerca do número N de termos a ser adotado nas transformadas de Fourier e realiza as transformadas discretas de Fourier de forma implícita. No entanto, na formulação apresentada não se faz necessário extrair os autovalores do problema, o que a primeira vista representa a grande vantagem deste método.

A formulação proposta mostrou-se adequada para tratar com problemas de um e de vários graus de liberdade, estes últimos sem a utilização da superposição modal. A formulação, ao realizar a análise no domínio da frequência mostra-se adequada a sistemas estruturais complexos, como por exemplo, os que apresentam interação solo-estrutura ou fluido-estrutura, uma vez que para estes sistemas, a análise no domínio da frequência é

mais indicada. A princípio, na formulação proposta pode-se utilizar um número N de pontos nas transformadas de Fourier menor do que o exigido no método ImFT.

A proposição de um método de análise deve ser seguida de um número suficiente de avaliações numéricas, antes de sua adoção em problemas práticos, não só para segurança em relação aos resultados obtidos, mas também para verificar as características obtidas com o seu desenvolvimento. Desta forma, os exemplos numéricos apresentados tiveram como objetivo validar o programa computacional desenvolvido durante a elaboração do trabalho. Através destes exemplos pôde-se constatar a adequação da formulação na análise de sistemas sujeitos à condições iniciais e/ou dotados de amortecimento não proporcional.

7.2 Sugestões

A formulação proposta neste trabalho deve ser estudada e ampliada sob duas óticas, simultaneamente: A analítica e a computacional.

Na primeira, deve-se estudar o método para utilizá-lo em problemas mais complexos relacionados com a dinâmica estrutural, tais como sistemas dotados de não-linearidades físicas e/ou geométricas, sistemas com amortecimento dependente da frequência e excitações devido à terremotos.

Sob a perspectiva computacional, a implementação do método deve ser otimizada para que ele possa se tornar, de fato, uma alternativa frente a outros métodos já estabelecidos. Para o avanço computacional do método, algumas questões podem ser abordadas, dentre as quais a utilização de um número menor de termos que os necessários para se conseguir um adequado espectro de frequências de excitação, com a conseqüente diminuição do custo computacional, notadamente na decomposição LU da matriz \mathbf{C} , uma vez que este procedimento numérico representa aproximadamente 97,3 % do tempo total de análise. A pesquisa das propriedades das matrizes \mathbf{G} e \mathbf{C} , visando sua otimização computacional deve também ser estendida.

Referências Bibliográficas

APRILE, A., BENEDETTI, A., TROMBETTI, T., 1994, “On non-linear dynamics analysis in the frequency domain: algorithm and applications”. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 23, pp. 363-388.

BATHE, K.J., 1982, *Finite Elements procedures in engineering analysis*. New Jersey, Prentice-Hall.

BIELAK, J., 1975, “Dynamic behavior of structures with embedded foundations”. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v.3, pp. 259-274.

BRACEWELL, R. N., 1990, “Numerical transforms”. *Science*, v. 248, pp.637-784

CAUGHEY, T.K., 1960, “Classical normal modes in damped linear dynamics system”. *Journal of Applied Mechanics*, ASME v.27, pp.169-271.

CAUGHEY, T.K., O’KELLY, M.E.J., 1965, “Classical normal modes in damped linear dynamic systems”. *Journal of Applied Mechanics*, ASME v. 32, pp. 583-588.

CHEN, T. TAYLOR, R.L., 1987, Properties and solutions of eigensystem of non – proportionally damped linear dynamic system. In: *NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING THEORY AND APPLICATIONS (NUMETA 87)*, n. t5/1.

CHEN, T., TAYLOR, R.L., 1990, “Solution of viscous damped linear system using a set of a load-dependent vectors”, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 19, pp. 653-665.

CLARET, A.M., 1991, Solução de sistemas estruturais dinâmicos não-lineares com amortecimento não-proporcional e dependente da frequência. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

CLARET, A.M., VENÂNCIO-FILHO, F., 1991, “A modal superposition pseudo-force method for dynamic analysis of structural system with non-proportional damping”. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v.20, pp.303-315.

CLOUGH, R.W., PENZIEN, J., 1993, Dynamics of structures. 2. ed. New York, McGraw-Hill.

COOLEY, J.W., TUKEY, 1965, “An algorithm for machine calculation of complex Fourier series”. *Mathematical Computations*, v. 19, pp.297-301.

CRAIG, R.R. Jr., 1981, “Structural dynamics – an introduction to computer methods”. 1º ed., New York, John Wiley & Sons, Inc., 527 p.

CRANDALL, S.H, 1969, “The role of damping in vibration theory”. *Journal of the sound vibration*, v.11, nº 1, pp.3-18.

DARBRE, G. R., WOLF, J.P, 1986 , Criterion stability and implementation issues of hybrid frequency-time domains procedure for non-linear dynamic analysis. In: CONFERENCE ON STRUCTURAL MECHANICS IN REACTOR TECHNOLOGY, 9, (Transactions), Lausanne.

F. VENANCIO-FILHO., A.M. CLARET., 1992, “Matrix formulations of the dynamics analysis of SDOF in the frequency domain”, *Computers and Structures*, v.14, pp. 217-243.

F. VENANCIO-FILHO., A.M. CLARET., 1995, “Frequency domain dynamics analysis of MDOF system: Nodal and modal coordinates formulation.”, *Computers and Structures*, v.56, pp. 189-191.

F. VENANCIO-FILHO., A.M. CLARET., F.S. Barbosa., 2002, “Frequency and time domain dynamics structural analysis: convergence and causality ”, *Computers and Structures*, v.80, pp. 1503-1509.

HALL, J. F., BECK, J.L., 1993. “Linear system response by the DFT: analysis of recent modified method”. “*Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v.22, pp. 1-12.

HALL, J.F., 1982, “An FFT algorithm for structural dynamics”. *Earthquake Engineering and Structures Dynamics*, v. 10, pp 797-811.

HURTY, W.C., RUBINSTEIN, M.F., 1964, *Dynamics of Structures*. New Jersey, Prentice Hall, Inc.

IBRAHIMBEGOVIC, A., WILSON, E.L., 1989, “Simple numerical algorithms for the mode superposition analysis of linear structural system with non-proportional damping”. *Computers & Structures*, v.33, pp 523-531.

JANGID, R.S. , DATA, T.K., 1993, “Spectral analysis of system with non-proportional damping using classical mode superposition technique”. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 22, pp 723-735.

KAWAMOTO, J.D., 1983, *Solution of the non-linear dynamic structural system by a hybrid frequency-time domain approach*. MIT Research Report R83-5, Dept. of Civil Engineering, Cambridge.

KAWAMOTO, J.D., 1983, *Solutions techniques for nonlinear structural dynamic problems*. MIT Research Report R82-41, Dept. of Civil Engineering, Cambridge.

MANSUR, W.J., CARRER, A.M., FERREIRA, W.G., CLARET,A.M., F. VENANCIO-FILHO.,2000, “Time segmented frequency domain analysis for non-linear multi degree of freedom structural systems”. *Journal of Sound and Vibration*,v.237, pp 457-475.

MEIROVITCH, L., 1986, “Elements of vibrations analysis”. 2º ed. Singapore, McGraw-Hill, 560p.

NEWMARK, N, M, 1959, “Methods of computation of structural dynamics”. *Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE*, v.98, pp.367-384.

NOVAK, M., SACHS, K., 1973, “Torsional and coupled vibrations of embedded footings”. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v.2, pp.11-33.

O’BRIGHAM, E., 1974, “The Fast Fourier transform”. 1º ed. New Jersey, Prentice-Hall, Inc. 252p.

RAYLEIGH, L., 1945, “*Theory of sound*”. New York, Dover Publication, v.1.

RIBEIRO, M. V., 1998, “Formulação matricial da análise dinâmica de estruturas no domínio da frequência”. Tese de M.Sc., ESCOLA DE MINAS/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.

ROSSET, J.M., WHITMAN, R.V., R.DOBRY , 1973, Modal analysis of structures with foundation interaction. *Journal of the Structural Division*, v. ST3, pp.399-416.

SING, M.P., GHAFORY-ASHTIANY, M., 1986, Modal time history analysis of non-classically damped structures for seismic motions. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v.14, pp.133-146,.

SINGH, M., SUAREZ, L.E., 1980, Seismic response analysis of structure-equipment system with non-classic damping effects. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v.15, pp. 871-888.

THOMSON, W.T., CALKINS, T.E. CARAVANI, P., 1974, A numerical study of damping. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v.3, pp.97-103.

VELETSOS, A.S., VENTURA,C.E., 1976, Modal analysis of non-classically damped linear system. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 14, pp.217-243.

VELETSOS, A.S., WEI, Y.T., 1971, “Lateral and Rocking Vibration of Footings”. *Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division*, v.SM9, pp. 1227-1248.

VETTERLING, W.T., PRESS, W.H., TEUKOLSKY, S.A., FLANNERY, B.P.,1992, “Numerical Recipes in FORTRAN 77”. 2° ed., New York, Cambridge University Press, 243p.

WARBURTON, G.B., SONI, S.R., 1977, Errors in response calculations for non-classically damped structures. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 5, pp.365-376.

WILIE, C.R., BARRET, J.L. 1995, “Advanced Engineering mathematics”. 6° ed., New York, McGraw-Hill, 1362p.

WILSON, E.L., FARHOOMAND, I., BATHE, K.J., 1973, “Nonlinear dynamic analysis of complex structures”. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v.1, pp.241-252.

WOLF, J.P., 1987, “*Non-linear soil-structure interaction analysis based on hybrid frequency-time domain formulation*”. Zurich: Electrowatt Engineering Services, pp.25-32.