

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO - ESCOLA DE MINAS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

## **Otimização de Seções Poligonais de Concreto Armado Sujeitas à Flexão Composta**

Flávia Castro de Faria

Dissertação de Mestrado apresentada ao  
Programa de Pós-graduação em Engenharia  
Civil da Escola de Minas da Universidade  
Federal de Ouro Preto, como parte dos  
requisitos necessários à obtenção do título  
de Mestre em Engenharia Civil

Orientador: Amilton Rodrigues da Silva

Campus Morro do Cruzeiro  
Ouro Preto, MG – Brasil  
Março, 2017

F224o Faria, Flávia Castro de .  
Otimização de seções poligonais de concreto armado sujeitas à flexão composta  
[manuscrito] / Flávia Castro de Faria. - 2017.  
85f.: il.: color; graf.; tabs.

Orientador: Prof. Dr. Amilton Rodrigues da Silva.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de Minas. Departamento de Engenharia Civil. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.  
Área de Concentração: Construção Metálica.

1. Otimização Estrutural. 2. Projeto estrutural. 3. Concreto Armado. 4. Simplex (Matemática). I. Silva, Amilton Rodrigues da . II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

CDU: 624.014

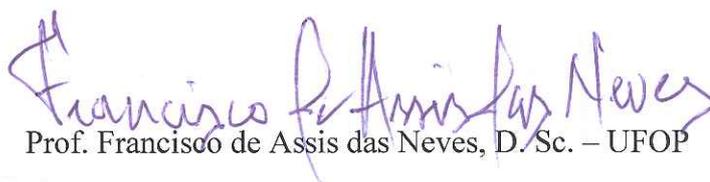
Catálogo: [www.sisbin.ufop.br](http://www.sisbin.ufop.br)

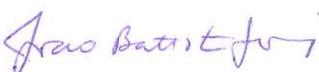
# OTIMIZAÇÃO DE SEÇÕES POLIGONAIS DE CONCRETO ARMADO SOB FLEXÃO COMPOSTA

**AUTORA: FLÁVIA DE CASTRO FARIA**

Esta dissertação foi apresentada em sessão pública e aprovada em 16 de março de 2017, pela Banca Examinadora composta pelos seguintes membros:

  
Prof. Amilton Rodrigues da Silva, D. Sc. – UFOP (Presidente)

  
Prof. Francisco de Assis das Neves, D.Sc. – UFOP

  
Prof. João Batista Marques de Sousa Junior, D. Sc. – UFC

Aos meus pais, Valdete e Eurípedes, as  
minhas irmã Bia, Ane e Biana e as minhas  
sobrinhas Ceci e Manu.

## **Agradecimentos**

A Deus pela sabedoria, paciência, serenidade e saúde para chegar até aqui.

Aos meus pais, Valdete e Eurípedes, que sempre me apoiaram incondicionalmente e muitas das vezes acreditavam mais no meu potencial do que eu mesma.

As minhas irmãs, Bia, Ane e Biana, minhas melhores amigas, meus apoios e meus exemplos.

Aos meus amarecos Ceci e Manu, pela alegria e amor puro, que vieram para adoçar e trazer mais leveza aos meus dias.

À minha avó Cecília, minha segunda mãe, meu maior exemplo de amor ao próximo. Ela conseguia a cada visita me dar uma dose de animo, determinação e acalmar sempre meu coração.

Ao meu Orientador Amilton, pela excelente orientação, apoio e transferência de conhecimento.

Ao Felipe pelo apoio durante todo o período do mestrado.

À CAPES e a UFOP pelo auxílio financeiro.

“Para ter algo que você nunca teve, é preciso  
fazer algo que você nunca fez”

Chico Xavier

Resumo de dissertação apresentado ao PROPEC/UFOP como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil

## **OTIMIZAÇÃO DE SEÇÕES POLIGONAIS DE CONCRETO ARMADO SUJEITAS À FLEXÃO COMPOSTA**

Flavia Castro de Faria

Março, 2017

Orientador: Prof. Dr. Amilton Rodrigues da Silva

O concreto é o material mais utilizado na confecção de elementos estruturais para a construção civil no mundo. Devido à sua baixa resistência à tração ele é reforçado com barras de aço formando o concreto armado. Elementos lineares de concreto armado são comuns em edifícios de múltiplos pavimentos, pontes, galpões industriais, entre outros.

O objetivo principal da proposta desse trabalho é utilizar um algoritmo de otimização para definir a quantidade de aço e sua posição dentro de uma seção poligonal qualquer de concreto sujeita a flexão composta, de forma que a quantidade de aço seja a mínima necessária para resistir aos esforços solicitantes. Dessa forma, as variáveis de projeto são as posições, diâmetro e quantidade de barras a serem distribuídas dentro da seção poligonal de concreto.

Para o desenvolvimento desse trabalho foi implementado uma rotina capaz de fornecer os esforços resistentes de uma seção poligonal de concreto reforçado com barras de aço, sendo utilizadas nessa implementação formulações desenvolvidas em dissertações e tese do PROPEC-EM-UFOP. Na definição da seção otimizada é utilizado o método de programação sequencial linear, onde o problema não linear de determinação dos esforços resistentes da seção em relação às variáveis de projeto é aproximado por um problema linear, o qual terá seu ponto ótimo definido a cada passo usando o método Simplex.

A validação das formulações é feita através dos resultados de exemplos analisados nesse trabalho e por outros autores e também por meio de soluções analíticas de problemas simples para as quais possam ser definidas as equações de análise.

**Palavras-Chave:** Otimização, Flexão Composta, Concreto Armado, Simplex

Abstract of Dissertation presented to PROPEC/UFOP as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Civil Engineering.

**OPTIMIZATION OF REINFORCED CONCRETE'S POLYGONAL SECTION  
SUBJECT TO COMPOSITE BENDING**

Flavia Castro de Faria

March/2017

Advisor: Prof. Dr. Amilton Rodrigues da Silva

Concrete is a most used material to build structural elements in civil construction all over the world. Due to its low resistance to traction, concrete is fortified with steel bars resulting in the reinforced concrete. Linear elements of reinforced concrete are common in multi-storey buildings, bridges, industrial shed, and others.

The main objective of this dissertation is to use an optimization algorithm to define the quantity of steel and its position within a concrete non-defined polygonal section that is subject to composite bending, and at the same time which quantity of steel would be minimum necessary to resist to the applied efforts. Further, the project variables are the positions, diameter and quantity of bars that will be distributed inside of concrete polygonal section.

In the development of this dissertation was implemented a routine capable of calculating the resistance efforts of a concrete polygonal section reinforced with steel bars, being used in the formulation of developments in dissertations and thesis of PROPEC-EM-UFOP. In the definition of the optimized section, the linear sequential programming method is used, where the nonlinear problem of determination of the resistant stresses of the section in relation to the design variables is approximated by a linear problem, The Simplex Method.

The validation of the formulations is done through the results of examples analyzed in this work and by other authors and also through analytical solutions of simple problems for which the analysis equations can be defined

**Keywords:** Optimization, Composite Bending, Reinforced Concrete, Simplex

## Sumário

<b>Lista de Figuras</b> -----	<b>xi</b>
<b>Lista de Tabelas</b> -----	<b>xiii</b>
<b>Capítulo 1 - Introdução</b> -----	<b>1</b>
<b>1.1. Contexto e Motivação</b> -----	<b>1</b>
<b>1.2. Concreto Armado</b> -----	<b>1</b>
<b>1.3. Otimização</b> -----	<b>2</b>
<b>1.3.1. Tipos de Otimização</b> -----	<b>3</b>
1.3.1.1. Otimização discreta versus contínua-----	3
1.3.1.2. Otimização com e sem restrição-----	4
1.3.1.3. Otimização local e global-----	5
1.3.1.4. Otimização probabilística e determinística -----	6
1.3.1.5. Otimização baseada na programação matemática -----	6
1.3.1.6. Otimização baseada em algoritmos de ordem zero -----	8
<b>1.4. Objetivos</b> -----	<b>8</b>
<b>1.5. Organização do Trabalho</b> -----	<b>9</b>
<b>Capítulo 2 - Revisão Bibliográfica</b> -----	<b>11</b>
<b>2.1. Otimização na análise de elementos lineares de concreto armado</b> -----	<b>11</b>
<b>2.2. Otimização via método Simplex</b> -----	<b>16</b>
<b>2.3. Considerações Normativas</b> -----	<b>18</b>
2.3.1. Cobrimento-----	18
2.3.2. Espaçamento mínimo entre as barras-----	19
<b>Capítulo 3 - Seções de Concreto Armado Sob Flexão Composta</b> -----	<b>21</b>
<b>3.1. Considerações Referentes a Otimização</b> -----	<b>21</b>
<b>3.2. Função Objetivo</b> -----	<b>21</b>
<b>3.3. Variáveis de Projeto</b> -----	<b>22</b>
3.3.1. Área das barras -----	23
3.3.2. Deformada da seção-----	23
3.3.3. Quantidade e posições das barras -----	25
<b>3.4. Restrições</b> -----	<b>25</b>
3.4.1. Deformações limites do concreto-----	26
3.4.2. Deformações limites do aço -----	27
3.4.3. Esforços Resistentes -----	28
3.4.4. Restrições laterais-----	31
<b>3.5. Propriedades Geométricas</b> -----	<b>32</b>
<b>3.6. Materiais</b> -----	<b>33</b>
<b>3.7. Relação Tensão-Deformação do Concreto</b> -----	<b>34</b>
<b>3.8. Relação Tensão-Deformação do Aço</b> -----	<b>36</b>
<b>3.9. Esforços Resistentes</b> -----	<b>37</b>
3.9.1. Integração -----	39

<b>Capítulo 4 - Otimização</b>	<b>41</b>
<b>4.1. Programação Linear Sequencial</b>	<b>41</b>
<b>4.2. Simplex</b>	<b>42</b>
<b>4.3. Ponto Viável Básico para o Simplex</b>	<b>43</b>
<b>4.4. Forma Padrão para o Problema Analisado</b>	<b>44</b>
<b>4.5. Ponto de Partida</b>	<b>47</b>
<b>4.6. Fluxograma</b>	<b>49</b>
<b>4.7. Algoritmo</b>	<b>50</b>
<b>4.8. Implementação computacional</b>	<b>53</b>
<b>Capítulo 5 - Aplicações</b>	<b>55</b>
<b>5.1. Seção retangular 20x30 sob flexão reta composta</b>	<b>55</b>
5.1.1. Resolução através das equações de equilíbrio	56
5.1.2. Resolução através do programa desenvolvido	57
<b>5.2. Seção retangular 30x60 sob flexão oblíqua composta</b>	<b>60</b>
<b>5.3. Seção retangular 30x70 sob flexão oblíqua composta</b>	<b>64</b>
<b>5.4. Seção retangular 40x60 sob flexão oblíqua composta</b>	<b>67</b>
<b>5.5. Seção Retangular Vazada</b>	<b>71</b>
<b>5.6. Seção L</b>	<b>75</b>
<b>Capítulo 6 - Considerações Finais</b>	<b>78</b>
<b>6.1. Síntese do Trabalho</b>	<b>79</b>
<b>6.2. Conclusões e Contribuições</b>	<b>80</b>
<b>6.3. Trabalhos Futuros</b>	<b>81</b>
<b>Referências</b>	<b>82</b>

## Lista de Figuras

Figura 1.1 – Mínimo local e mínimo global.....	5
Figura 3.1 – Definindo os eixos de rotação.....	24
Figura 3.2 – Deformação nos três eixos $x$ , $y$ e $z$ .....	25
Figura 3.3 – Domínios do concreto armado.....	26
Figura 3.4 – Seção poligonal com o sistema de coordenadas $x'y'$ .....	27
Figura 3.5 – Barras mais solicitada na seção.....	28
Figura 3.6 – Definição do sistema de coordenadas e seção transversal.....	32
Figura 3.7 – Relação tensão deformação ilustrativa de um material.....	33
Figura 3.8– Diagrama tensão-deformação do concreto.....	36
Figura 3.9 – Diagrama tensão-deformação do aço.....	37
Figura 3.10 – Sistema local de coordenadas.....	38
Figura 3.11 – Parametrização do Segmento.....	40
Figura 4.1 – Seção transversal com o máximo de barras possível em uma camada.....	48
Figura 4.2 – Sistema local de coordenadas.....	50
Figura 4.3 – Seção transversal com as barras com diâmetro limite demarcadas e algumas barras retiradas.....	52
Figura 5.1 – Seção retangular sob flexão reta composta.....	55
Figura 5.2 – Configuração da seção inicial.....	57
Figura 5.3 – Variação da área total das barras no processo iterativo.....	59
Figura 5.4 – Variação das restrições referentes à deformação no processo iterativo.....	60
Figura 5.5 – Seção transversal com as barras com diâmetro limite demarcadas.....	61
Figura 5.6 – (a)Seção inicial e (b)seção obtida na primeira análise.....	62
Figura 5.7 – Seção obtida na segunda análise.....	63
Figura 5.8 – Seção obtida na terceira análise.....	63
Figura 5.9 – Seção obtida na quarta análise.....	64
Figura 5.10 – Seção encontrada por Fusco(1995).....	65
Figura 5.11 – Seção encontrada por Sias(2014).....	65
Figura 5.12 – (a)Seção inicial e (b)Seção obtida na primeira análise.....	66
Figura 5.13 – Seção para a segunda análise.....	67
Figura 5.14– Ábaco de dimensionamento à flexão oblíqua.....	68
Figura 5.15– (a) Seção obtida por Bastos(2004) e (b) Seção obtida através do ábaco.....	69
Figura 5.16 – (a) Seção inicial e (b)Seção obtida na primeira análise.....	70

Figura 5.17 – Seção obtida na segunda análise .....	70
Figura 5.18 – Seção vasada inicial .....	71
Figura 5.19 – Seção obtida para a primeira análise .....	72
Figura 5.20 – Seção obtida para a segunda análise .....	73
Figura 5.21 – Seção obtida para a terceira análise .....	73
Figura 5.22 – Seção obtida para a quarta análise .....	74
Figura 5.23 – Seção obtida para a quinta análise .....	74
Figura 5.24 – Curva interação dos momentos para $N_d = -500\text{kN}$ .....	75
Figura 5.25 – (a) Seção inicial e (b) Seção para a primeira análise .....	76
Figura 5.26 – Seção para a segunda análise .....	77
Figura 5.27 – Curva interação dos momentos para $N_d = -600\text{kN}$ .....	78

## Lista de Tabelas

Tabela 2.1 – Correspondência entre a classe de agressividade ambiental e o revestimento nominal para $\Delta_c = 10\text{mm}$ .....	19
Tabela 3.1 – Diâmetro nominal aço CA25 e CA50.....	34
Tabela 3.2 - Diâmetro nominal aço CA60.....	34
Tabela 5.1 – Coordenadas das barras .....	58
Tabela 5.2 – Variação das áreas da barra durante processo iterativo .....	58
Tabela 5.3 – Quatro diferentes casos de carregamento .....	67
Tabela 5.4 – Posições das barras dentro da seção inicial .....	72
Tabela 5.5 – Posições das barras dentro da seção inicial .....	77

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1. Contexto e Motivação

O concreto é atualmente um dos materiais mais utilizados na construção civil. Com a patente do cimento Portland em 1824 iniciou-se sua utilização em larga escala. Os primeiros concretos eram produzidos com água em abundância o que conferia aos mesmos uma baixa resistência, em torno de 10 MPa. Com o avanço tecnológico conseguiu-se determinar dosagens adequadas juntamente com o uso de aditivos, conferindo ao concreto melhores características. No entanto, para confecção de elementos estruturais faltava ao concreto determinadas características que foram obtidas com uso de adições de outros materiais como, por exemplo, as barras de aço, resultando no concreto armado.

Com o crescimento do mercado da construção civil, o advento de novas tecnologias e o aumento da concorrência, tem-se cada vez maior a necessidade de oferecer um produto de boa qualidade, porém, com um custo reduzido. Uma ferramenta útil para conciliar as características citadas acima é a otimização. Esta tem como objetivo extrair do produto ou serviço seu rendimento máximo.

Segundo Sias (2014), outro fator que justifica a implementação das técnicas de otimização no dimensionamento estrutural é o fato de que os softwares mais utilizados na atualidade, não informam quando uma seção está superdimensionada.

### 1.2. Concreto Armado

Concreto é um material de construção resultante da mistura de aglomerantes, água e agregados em proporções adequadas. Dentre suas principais vantagens cita-se: baixo custo dos materiais; é moldável, permitindo grande variabilidade de formas e de concepções arquitetônicas; métodos de manuseio e dimensionamento bem difundidos; entre outras. Devido a essas e outras vantagens o concreto é o material mais utilizado na confecção de elementos estruturais empregados na construção civil.

As principais deficiências do concreto são a fragilidade e sua baixa resistência a tração, em torno de 10% da sua resistência a compressão. Para suprir essas deficiências percebeu-se a necessidade de adicionar ao concreto simples supracitado um material de boa resistência à tração e ductilidade, propriedades encontradas no aço. Com esse material composto de concreto simples e barras de aço, tem-se então o concreto armado, onde as barras absorvem as tensões de tração e o concreto absorve as tensões de compressão.

De acordo com a NBR ABNT 6118 (2014) elementos de concreto armado são aqueles cujo comportamento estrutural depende da aderência entre concreto e armadura, e nos quais não se aplicam alongamentos iniciais das armaduras antes da materialização da aderência.

### **1.3. Otimização**

Antes, a questão do consumo de energia, escassez de matéria prima e o alto índice e nível de concorrência não eram fatores preocupantes. Porém, atualmente os fatores citados acima tem trazido grandes preocupações. A otimização nos projetos de engenharia, por sua vez, torna-se imprescindível, frente a esse novo cenário de escassez de recursos e crescimento de demanda (Maia, 2009). As técnicas de otimização são processos de grande importância na busca de uma melhor solução quanto se tem uma imensa variedade de problemas e soluções para os mesmos.

O sucesso de um projeto de engenharia é alcançado quando é possível conciliar a segurança com um baixo custo em um tempo hábil. Segundo a NBR ABNT 6118 (2014) os requisitos de qualidade de uma estrutura de concreto são classificados em três grupos distintos capacidade resistente, desempenho de serviço e durabilidade.

A otimização visa alcançar esse sucesso, ou seja, dar a algo o seu rendimento ótimo, criando-se as condições mais favoráveis ou dando a elas seu melhor partido possível, tornar algo ótimo ou ideal. O conceito de otimização é básico para muitas das coisas que se faz diariamente. Em engenharia, almeja-se melhor qualidade de vida possível com os recursos disponíveis. Desse modo, utilizam-se ferramentas que forneçam resultados de maneira econômica e convenientes (Vanderplaats, 1984).

A otimização é a busca da melhor solução para uma operação, enquanto certas restrições são satisfeitas (Vanderplaats, 1984). Para definir qualquer problema de otimização numérica, deve-se definir de forma clara todos os parâmetros da Equação (1.1) a seguir:

$$\begin{array}{l} \min f(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x} \in R^n \end{array} \quad \text{sujeito a} \quad \begin{cases} c_i(\mathbf{x}) = 0 & i \in \varepsilon \\ c_i(\mathbf{x}) \geq 0 & i \in \tau \end{cases} \quad (1.1)$$

Na equação (1.1),  $f(\mathbf{x})$  é a função objetivo, ou função de desempenho;  $\mathbf{x}$  é o vetor de variáveis de projetos;  $c_i(\mathbf{x})$  é o conjunto de restrições a serem atendidas;  $\tau$  é p conjunto de restrições de desigualdade e  $\varepsilon$  o conjunto de restrições de igualdade.

A função objetivo é a função que se deseja determinar o máximo ou o mínimo, também chamado de solução ótima do problema. O conjunto de restrições do problema também são funções das variáveis de projeto e determina os limites impostos ao sistema analisado, por exemplo, a deformação em um ponto da seção de concreto armado sob flexão composta coincidente com a posição de uma barra de reforço não pode exceder a um limite especificado. Geralmente os problemas de engenharia apresentam um número grande de variáveis que são potencialmente as possíveis variáveis de projeto em uma análise de otimização. No entanto, dependendo do que se deseja como resposta do processo de otimização, algumas das variáveis são fixadas e os restantes são considerados as variáveis de projeto. Por exemplo, na definição de uma seção retangular de concreto armado sob flexão composta pode-se considerar como variáveis a quantidade de aço e também as dimensões da seção retangular, fixando uma função objetivo relacionada ao custo desses materiais. Ou, de uma forma mais simples, pode-se fixar as dimensões da seção e determinar a quantidade de aço minimizando uma função objetivo relacionada à quantidade de aço.

A qualidade de resultado final de otimização estará diretamente relacionada à fidelidade desta função com a situação real, por isto deve se ter em mãos o maior número possível de dados para uma boa calibração do modelo (Sias, 2014).

### 1.3.1. Tipos de Otimização

#### 1.3.1.1. Otimização discreta versus contínua

Na otimização contínua as variáveis podem assumir um valor real qualquer dentro de um intervalo pré-determinado. Como se pode observar no exemplo da Equação (1.2), sendo a função objetivo contínua no espaço de busca especificado, existe um número infinito de valores para as variáveis de projeto dentro desse espaço que atende as restrições (Sias, 2014).

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} (x_1-2)^2 + (x_2-1) \quad \text{sujeito a} \quad \begin{cases} x_1^2 - x_2 \leq 0 \\ x_1 + x_2 \leq 2 \end{cases} \quad (1.2)$$

No exemplo da Equação (1.2), tem-se:

$f(\mathbf{x}) = (x_1-2)^2 + (x_2-1)$  - Função objetivo

$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$  - Vetor de variáveis

$\mathbf{c} = \begin{cases} x_1^2 - x_2 \leq 0 \\ x_1 + x_2 \leq 2 \end{cases}$  - Conjuntos de restrições a serem atendidas

Na otimização discreta as variáveis podem assumir apenas valores inteiros, ou seja, índices que estão associados à descrição do problema. Neste caso o número de pontos possíveis, ou seja, de atribuições para as variáveis de projeto que atendam as restrições e o espaço definido para as variáveis, é determinado, existe um número finito dessas atribuições. Por exemplo, o problema de definir o roteiro que uma transportadora deve seguir para que a distância percorrida seja a mínima possível. Definindo uma variável inteira para representar cada cidade que se deve fazer a entrega, pode-se definir a função objetivo que fornece a distância percorrida de acordo com uma ordem específica de entregas dada pelo vetor de variáveis. Nesse caso existe um número finito de possibilidades de rotas de entrega caracterizando esse problema como um problema discreto.

### 1.3.1.2. Otimização com e sem restrição

Os problemas de otimização podem ser classificados com e sem restrição. Quando as variáveis de projeto podem assumir quaisquer valores em um conjunto indeterminado tem-se um problema de otimização sem restrição. Existem duas formas de problemas sem restrição, na primeira, as restrições físicas do modelo matemático são atendidas para um conjunto de variáveis quaisquer. Já na segunda, as restrições são inseridas na função objetivo através de coeficientes de penalidade que força a satisfação da restrição com a avaliação da função objetivo.

Segundo Sias (2014) quando as variáveis de projeto possuem algum tipo de restrição, em que um conjunto de valores dessas variáveis não pode ser assumido no problema analisado esse é chamado de restrito. Problemas mais complexos, como, por exemplo, os problemas de

engenharia, em que os métodos de inserção das restrições na função objetivo não é aplicável, são caracterizados como problemas de otimização com restrição.

Os problemas de otimização com ou sem restrição podem ser lineares, quando a relação das variáveis com a função objetivo e com as restrições são lineares. No caso de qualquer uma das variáveis possuir uma relação não linear com a função objetivo ou com qualquer uma das restrições, tem-se um problema de otimização não-linear.

### 1.3.1.3. Otimização local e global

Sabe-se que no processo de otimização busca-se encontrar o ponto que minimiza ou maximiza uma função objetivo  $f(\mathbf{x})$ . Este ponto de máximo ou mínimo a ser determinado pode ter a característica de local ou global. Dada uma função,  $f(\mathbf{x})$ , definida sobre um conjunto  $S$ , o valor mínimo global para  $f(\mathbf{x})$  sobre  $S$ , é um número real  $M$  tal que  $f(\mathbf{x})$  é maior ou igual a  $M$  qualquer que seja  $\mathbf{x}$  em  $S$ , ou seja,  $M = \min \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \text{ em } S\}$ . Ou seja, o mínimo global é um ponto onde a função alcança seu menor valor em todo o domínio. Já o mínimo local para  $f(\mathbf{x})$  sobre  $S$ , é definido por um ponto  $c$  em  $S$ , onde existe uma vizinhança aberta contendo o ponto  $c$ , definido pelo conjunto  $V_c$  contido em  $S$ , e existe um número real  $M_c$  tal que  $f(\mathbf{x})$  é maior ou igual a  $M_c$  qualquer que seja  $\mathbf{x}$  em  $V_c$ , ou seja,  $M_c = \min \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \text{ em } V_c\}$ . Ou seja, é o ponto onde a função atinge o menor valor na sua vizinhança.

Na Figura 1.1 é mostrado o gráfico de uma função de apenas uma variável, nesse gráfico observa-se que o ponto  $x = a$  é um mínimo global e  $x = b$  é um mínimo local. Em problemas de otimização linear o mínimo local é sempre o mínimo global.

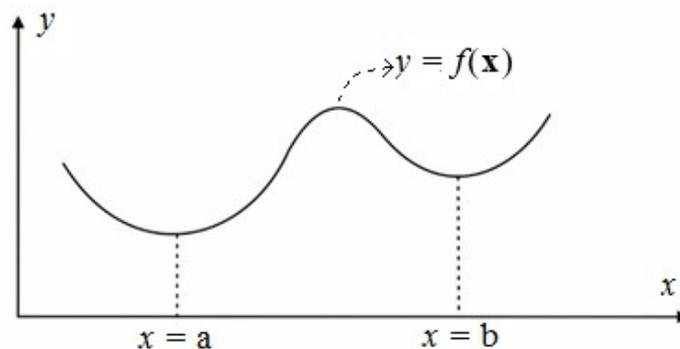


Figura 1.1 – Mínimo local e mínimo global

#### 1.3.1.4. Otimização probabilística e determinística

Segundo Sias (2014) nos processos de otimização determinísticos a solução é encontrada por meio de uma solução matemática exata, este método é baseado em formulações e de métodos matemáticos de trabalho da função objetivo. Geralmente este método é empregado em funções mais simples com menor quantidade de variáveis. Vale ressaltar que este método não é muito eficiente para a procura de soluções globais e necessitam de um maior esforço computacional.

Já o método probabilístico também conhecido como estocástico se baseia em probabilidade de eventos e refinamento dos possíveis conjuntos de solução. Atualmente o algoritmo mais utilizado que possui essas características é o genético. Segundo Bastos (2004) algumas vantagens deste tipo de algoritmo em relação aos determinísticos são:

- Não requerem que a função objetivo seja contínua ou diferenciável
- Trabalham adequadamente, tanto com parâmetros contínuos, quanto com discretos, ou ainda com uma com uma combinação deles
- Não necessitam de formulações complexas ou reformulações para o problema
- Não há restrição nenhuma quanto ao ponto de partida dentro do espaço de busca da solução
- Realizam buscas simultâneas no espaço de possíveis soluções através de uma população de indivíduos
- Otimizam grande número de variáveis

#### 1.3.1.5. Otimização baseada na programação matemática

Segundo Eboli (1989) a programação matemática trata da análise e resolução de problemas do tipo:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar } f(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in R^n \\ \text{sujeito a } c_i(\mathbf{x}) = 0 & i \in I = [1, 2, \dots, l] \\ & c_i(\mathbf{x}) \leq 0 & i \in D = [l+1, \dots, m] \end{array} \quad (1.3)$$

Onde:  $\mathbf{x}$  é um ponto no  $\mathbb{R}^n$ ;  $f(\mathbf{x})$ , função objetivo, é uma função real que avalia a qualidade desejada da solução  $\mathbf{x}^*$ ; e  $c_i(\mathbf{x})$  restrições de igualdade ( $i \in I$ ) e desigualdade ( $i \in D$ ), são equações e inequações que restringem ou limitam o espaço de solução.

Uma maneira de verificar se a solução  $\mathbf{x}^*$  encontrada é um mínimo local é analisando as condições de primeira ordem ou de Kuhn-Tucker:

$$\begin{aligned}
 \nabla_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}^*, \lambda^*) &= 0 \\
 c_i(\mathbf{x}^*) &= 0 && i=1, \dots, l \\
 c_i(\mathbf{x}^*) &\leq 0 && i=1+l, \dots, m \\
 \lambda_i^* &\leq 0 && i=1+l, \dots, m \\
 \lambda_i^* c_i(\mathbf{x}^*) &= 0 && \forall i
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Onde  $L(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$  é dada pela seguinte expressão:

$$L(\mathbf{x}^*, \lambda^*) = f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^l \lambda_i^* c_i(\mathbf{x}^*) \tag{1.5}$$

$L(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$  é a função Lagrangiana,  $\lambda^*$  são os multiplicadores de Lagrange vinculados a  $c_i(\mathbf{x}^*)$ , que são as funções de restrições no ponto  $\mathbf{x}^*$ .

Vale ressaltar que as condições supracitadas são suficientes para determinar o ponto de ótimo somente em problemas em que todas as funções são convexas. Para casos em que a função é não convexa deve-se verificar as condições de segunda ordem.

A programação matemática de acordo com Bastos (2004) pode ser dividida em duas classes:

- Programação Linear: quando a função objetivo e as restrições são funções lineares das variáveis de projeto.
- Programação Não-Linear: quando a função objetivo, ou pelo menos uma das restrições, é função não linear das variáveis de projeto.

Existem vários métodos para a solução de problemas de programação matemática como por exemplo: Método de Newton, Método de Quase Newton, Método da Descida mais Rápida,

Método do Gradiente Conjugado, Método do Lagrangiano Aumentado, Simplex, Algoritmo de Han-Power, Método dos Pontos Interiores dentre outros.

#### **1.3.1.6. Otimização baseada em algoritmos de ordem zero**

Algoritmos de ordem zero são algoritmos que não tem uma direção de busca dada por uma formulação matemática como nos algoritmos do item anterior. O nome ordem zero vem devido ao fato de não utilizarem a derivada da função objetivo O principal algoritmo de ordem zero é o algoritmo genético.

Segundo Bastos (2004) assim como no processo evolutivo das espécies, os algoritmos genéticos, manipulam uma população de indivíduos, cada um com um valor de aptidão associado, para uma nova geração de indivíduos, utilizando os princípios Darwinianos de reprodução e sobrevivência dos mais aptos, realizando operações genéticas de seleção, “*crossover*” e mutação.

### **1.4. Objetivos**

Um projeto estrutural deve garantir de forma primordial e com um custo acessível que a estrutura seja capaz de cumprir de maneira eficaz todas as funções dela requerida, como, por exemplo, suportar os carregamentos que a mesma está imposta. Uma maneira de garantir os objetivos citados acima com segurança e economia é fazendo a otimização do produto e/ou serviço. Segundo Maia (2009) uma grande vantagem de otimizar projetos é o abandono de parâmetros baseados na intuição ou na experiência dos engenheiros, enfatizando a busca por uma solução que atenda as exigências de projetos otimizando uma função objetivo, geralmente relacionada com o custo de produção e execução do projeto.

Visando a otimização de seções transversais poligonais em concreto armado sob flexão oblíqua composta, o principal objetivo desse trabalho é utilizar um algoritmo de otimização para definir a quantidade de aço e sua posição dentro de uma seção poligonal qualquer de concreto sujeita a flexão composta, de forma que a quantidade de aço seja a mínima necessária para resistir aos esforços solicitantes e atender as prescrições normativas referentes ao dimensionamento quanto aos estados limites últimos de elementos lineares de concreto armado sob flexão composta.

Para a realização dos objetivos foi implementado nesse trabalho uma rotina capaz de fornecer os esforços resistentes de uma seção poligonal de concreto reforçado com barras de aço. A rotina tem como parâmetros de entrada a forma da seção transversal, as posições e diâmetros

das barras, as curvas tensão deformação dos materiais concreto e aço, e os parâmetros que define a deformada da seção transversal, ou seja, parâmetros que define a equação de um plano, uma vez que é considerada a hipótese da manutenção da seção plana para elementos de barra sujeito a esforços combinados de flexão e carga axial. No desenvolvimento dessa rotina foram utilizadas formulações desenvolvidas em dissertações e teses do PROPEC-EM-UFOP (Caldas, 2004, Muniz, 2005, Silva, 2007).

Outra implementação necessária para a realização dos objetivos é um método que defina, para uma seção poligonal de concreto armado que resista às ações dos esforços solicitantes atendendo todas as prescrições normativas, como se podem alterar as variáveis de projeto mantendo todas as restrições atendidas e reduzindo a função objetivo, ou seja, um método de otimização. Nesse trabalho é utilizado o método de programação linear sequencial, onde o problema não linear de determinação dos esforços resistentes da seção em relação às variáveis de projeto é aproximado por um problema linear, o qual terá seu ponto ótimo definido a cada passo usando o método Simplex.

Em todas as implementações computacionais desse trabalho utilizou-se a linguagem de programação C++ e o software Visual Studio Community 2015 da Microsoft disponível na data dessa publicação no endereço: <https://www.visualstudio.com/pt-br/downloads/download-visual-studio-vs.aspx>.

## **1.5. Organização do Trabalho**

Este trabalho encontra-se dividido em cinco capítulos. No primeiro capítulo faz-se uma introdução expondo conceitos relevantes do concreto armado e sobre otimização, apresentando também os objetivos.

Uma revisão bibliográfica acerca do tema da dissertação está presente no capítulo 2. Pode-se através deste capítulo perceber a relevância do tema em estudo e como a otimização está presente em distintas áreas.

O capítulo 3 apresenta um breve estudo sobre o concreto incluindo as propriedades geométricas, a deformação da seção, os materiais utilizados e suas respectivas curvas de tensão-deformação e os esforços solicitantes e resistentes do elemento em análise, além de algumas considerações referentes ao tipo de otimização utilizada na implementação computacional.

A busca da solução ótima para o problema proposto nesse trabalho foi executada utilizando o método de programação linear sequencial juntamente com o SIMPLEX, que será apresentado no capítulo 4. Este capítulo contempla ainda a exposição do algoritmo indicando a base e linguagem computacional utilizadas.

Algumas aplicações feitas através do programa implementado podem ser encontradas no capítulo 5. Com estas aplicações é possível validar e comprovar a eficiência do programa desenvolvido neste trabalho.

Finalizando, o capítulo 6 traz uma síntese de todo o trabalho desenvolvido, expondo as conclusões e contribuições adquiridas ao longo da dissertação. Apresenta-se também as possibilidades de novas pesquisas futuras e as referências utilizadas para a execução desse trabalho.

# Capítulo 2

## Revisão Bibliográfica

A otimização de produtos, serviços e processos está cada vez mais presente no nosso dia a dia. Estamos sempre em uma constante busca pelo melhor e a otimização visa justamente isso, tornar algo ótimo ou ideal. Atualmente, grande parte das pesquisas acadêmicas estão voltadas para busca de soluções mais viáveis e eficazes de determinados problemas nas mais variadas áreas possíveis, não só na engenharia civil, como é o caso desse trabalho.

A seguir são apresentados os trabalhos mais atuais na área de otimização, destacando aqueles com enfoque em problemas de engenharia relacionados ao dimensionamento de elementos lineares de concreto armado.

### **2.1. Otimização na análise de elementos lineares de concreto armado**

A otimização está presente nas distintas áreas da engenharia civil, pode-se otimizar processos, produtos e serviços. Como esse trabalho tem como enfoque a otimização estrutural em concreto armado, segue abaixo um breve resumo de alguns autores que trabalharam com essa linha de pesquisa.

Eboli (1989) desenvolveu um programa para otimização de seções de concreto armado sujeitas à flexão oblíqua composta. O autor utilizou técnicas de Programação Matemática, trabalhando com um número reduzido de variáveis e de restrições e utilizando o algoritmo de Han-Powell para definição do ponto de ótimo. Ao invés de utilizar a deformação axial e a rotação nos eixos  $x$  e  $y$ , para descrever as configurações da deformada da seção, o autor utilizou em sua formulação somente dois parâmetros, a inclinação da linha neutra e o parâmetro que caracteriza a deformada no Estado Limite Último. O objetivo foi determinar, para uma seção de geometria dada e com as características mecânicas dos materiais já definidas, a área de aço de cada barra de posição pré-fixada, de forma que a área total de armadura seja mínima e a seção apresente reserva de segurança aos diversos casos de flexo compressão oblíqua envolvidas no dimensionamento.

Rath *et al.* (1999) desenvolveram uma formulação para otimização de uma seção de concreto armado, inicialmente retangular subdividida em várias faixas. Foram adotadas como variáveis de projeto além do diâmetro e posicionamento das armaduras, as dimensões de cada faixa da discretização da seção transversal. O algoritmo genético foi utilizado para otimizar o número de barras da armadura e a forma da seção transversal ao longo do comprimento do elemento. Os resultados mostraram uma economia significativa de material, 40 a 56%, e de custos, além de estruturas esteticamente mais agradáveis.

Rigo (1999) trabalhou com técnicas de otimização através da análise de estruturas com comportamento não linear, característica que pode ser decorrente da condição de vinculação da estrutura. Os problemas estruturais foram formulados via Método de Energia, que resulta na minimização de funções quadráticas sujeita a um conjunto de restrições. Os Métodos tipo Gradiente, Newton e Quase Newton são discutidos no trabalho, porém, por apresentar melhores resultados o Método de Newton foi combinado com uma estratégia de conjuntos ativos para o caso de minimização com variáveis canalizadas.

Silva (2001) usou Algoritmos Genéticos para determinação das variáveis de projeto do problema de análise e dimensionamento de pórticos e pilares em concreto armado que otimizassem uma função objetivo relacionada aos custos dos materiais. Foi elaborado um programa no Fortran 90 para a obtenção dos esforços nodais, que foi utilizado também na verificação das seções estruturais. As seções foram verificadas para a flexão composta normal e oblíqua. Para a otimização de pilares foram consideradas como variáveis de projeto a altura da seção, a bitola das armaduras e o número de barras utilizadas. A função objetivo considerou o custo por metro da seção de concreto. Porém não se obteve bons resultados, visto que a maioria dos indivíduos gerados eram descartados por não atender as restrições. Já para a otimização de pórticos o programa desenvolvido apresentou bons resultados.

Bastos (2004) desenvolveu um programa para o cálculo otimizado de seções retangulares de concreto armado submetidas a esforços de flexo-compressão oblíqua. Foi usada a técnica de algoritmos genéticos para implementar o programa. Os resultados foram validados com a comparação de resultados obtidos por outros autores e do dimensionamento convencional. Também foi realizado um estudo de sensibilidade dos custos dos materiais, avaliando assim, o impacto do custo final da solução ótima. Com base nos resultados obtidos concluiu-se que a formulação proposta foi implementada com sucesso.

Chaves (2004) desenvolveu um programa computacional para a determinação da seção transversal de pilares de concreto armado com o custo mínimo e a determinação do índice de confiabilidade da estrutura em análise para um estado limite. A solução do problema foi alcançada através da resolução analítica do sistema de equações não lineares gerado, a partir da aplicação do método dos multiplicadores de Lagrange e das condições de Kuhn – Tucker. As variáveis do problema são as dimensões da seção transversal dos pilares e a área das armaduras longitudinais. Foi considerado uma seção transversal retangular e com armaduras distribuídas simetricamente em duas faces da seção.

Nina (2006) desenvolveu uma rotina computacional para otimizar o pré-dimensionamento de edifícios em concreto armado. A partir do posicionamento dos elementos e dos valores limites para as variáveis envolvidas, utilizando o método de programação quadrática sucessiva para desenvolver o problema geral de programação não-linear, aplica-se uma função de custo mínimo para a seção transversal das vigas e dos pilares. Para a otimização das vigas verificou-se que a altura das mesmas foram entre 11 e 16% do maior vão, bem próxima dos valores geralmente adotado por projetistas que varia entre 8 e 10%. Já para os pórticos planos obteve-se uma média de 7,15% do maior vão, valor abaixo do geralmente utilizado. Para os pilares observou-se que independente do domínio de deformação onde a seção está, a curva gerada pela função custo com o aumento da solicitação normal pode ser dividida em duas etapas, sendo a primeira mais econômica que a segunda. O programa desenvolvido foi validado com a análise de diversos exemplos da literatura.

Junior (2006) elaborou um algoritmo para otimizar seções retangulares, circulares e seções T, em concreto armado sob flexão. Adotou-se o método da Penalidade Exterior devido a sua fácil implementação para solução de problemas não lineares. O programa desenvolvido busca o menor custo considerando as dimensões das peças, disposições construtivas, resistência dos materiais e esforços solicitantes. Além disso, o programa respeita as restrições impostas por normas, processo de fabricação, transporte e montagem. Os códigos computacionais também geram as linhas de influência e envoltória de esforços para uma viga principal de pontes rodoviárias com a superestrutura em viga contínua. Foi analisado um dimensionamento a flexão para seção retangular e circular, otimização do custo e a obtenção de linhas de influência para vigas. Todos os exemplos analisados apresentaram bons resultados, mostrando assim a eficiência do código computacional desenvolvido.

Bonet *et al.* (2006) comparam alguns métodos de dimensionamento de seções de concreto armado retangular e circular sob flexo-compressão. Os autores desenvolvem um algoritmo

numérico para a análise das seções de concreto reforçado com barras de aço comparando os resultados com estudos analíticos desenvolvidos pelos mesmos.

Guerra e Kioussis (2006) implementaram um algoritmo de otimização não-linear que procura por uma solução de custo mínimo que satisfaça as exigências do ACI 318-05. Os autores trabalharam com elementos lineares de concreto armado submetidos a cargas axiais e de flexão, o algoritmo de programação quadrática sequencial foi implementado no MatLab. Vários exemplos foram resolvidos comprovando a eficiência do programa.

Chaves e Debs (2008) desenvolveram um programa computacional para a determinação da seção transversal de pilares de concreto armado com o custo mínimo e a determinação do índice de confiabilidade desta estrutura para um estado limite. As variáveis de otimização são a largura, altura, posição da linha neutra e área do aço da seção transversal do pilar. A função custo é o custo total por metro linear considerando o concreto, o aço e as fôrmas. Foram incluídas restrições para garantir que o dimensionamento esteja no domínio 5 além das restrições em função na NBR 6118 (2014).

Nogueira e Venturini (2009) desenvolveram um modelo com a principal característica de aliar a economia com a segurança no dimensionamento de vigas em concreto armado. Segundo eles a combinação entre teorias de otimização e confiabilidade representam uma ferramenta em potencial para o projeto de estruturas em engenharia. Eles executaram um modelo de otimização baseado na confiabilidade aplicado às vigas em concreto armado. Os resultados obtidos considerando o comportamento não linear dos materiais concreto e aço foram satisfatórios. A única desvantagem observada foi o tempo de análise quando comparado com os métodos baseados em modelos lineares.

Silva *et al.* (2010) realizou a otimização de vigas T em concreto armado submetidas à flexão simples. O modelo proposto pelos autores busca no máximo reduzir o custo de fabricação das vigas e gera soluções entre os domínios 3 e 4. As dimensões principais da viga T e as áreas das armaduras foram consideradas variáveis de projeto. O programa foi implementado utilizando o método de Programação Quadrática Sequencial. Os resultados obtidos com o programa desenvolvido foram positivos e mostram ser bem competitivos em relação aos projetos usuais.

Nogueira (2010) teve como objetivo em sua tese desenvolver um programa computacional para a análise de estruturas como vigas, pilares e pórticos planos em concreto armado, com a possibilidade de determinar as dimensões ótimas dos elementos estruturais impondo-se a segurança desejada. O trabalho abrangeu áreas do conhecimento como mecânica dos materiais

e das estruturas, segurança estrutural via teoria da confiabilidade, otimização de estruturas em concreto armado e o seu acoplamento com os modelos de confiabilidade.

Sales (2010) desenvolveu ferramentas computacionais, com acesso pela internet, para o dimensionamento e esboço do detalhamento de seções retangulares de concreto armado solicitadas à flexão normal simples, à flexão normal composta e ao cisalhamento. As ferramentas foram desenvolvidas usando a linguagem Java e foram compiladas na forma de *Applet* para possibilitar o acesso pela internet. Durante o processo de dimensionamento a altura útil da seção pode variar de acordo com o diâmetro das barras de aço, cobrimento e disposição das barras. Obtém-se como resultado desse dimensionamento a seção transversal e longitudinal além de uma vista em 3D do detalhamento final da viga.

Ramos (2011) apresenta um método para otimização restrita que é baseado em um algoritmo de direções viáveis (FDIPA-AG), que permite obter soluções viáveis mantendo a eficiência dos algoritmos baseados no gradiente, e na aproximação das derivadas. Para efeito de comparação e validação os exemplos foram resolvidos usando os algoritmos FDIPA, anterior ao FDIPA-AG e o algoritmo genético de lagrangiano aumentado, todos os algoritmos citados foram implementados em linguagem MatLab.

Sias (2014) implementou um algoritmo com o auxílio do software MathLab e seus pacotes de otimização utilizando métodos de programação matemática. Sendo eles a programação quadrática sequencial e o método dos pontos interiores. Esses métodos foram escolhidos após a análise e comparação de alguns métodos propostos, como, algoritmo genéticos, programação quadrática sequencial e método dos pontos interiores. O programa desenvolvido pelo autor otimiza uma seção de pilares de concreto armado minimizando uma função custo que considera o aço, o concreto e a forma da seção em análise. Para validar o software e o método desenvolvido o autor analisou vários exemplos obtendo bons resultados para todos e ainda observou que o custo dos pilares obtido utilizando a programação sequencial quadrática e dos pontos interiores quando comparados com o dos algoritmos genéticos foram menores em todas as situações. E todos os métodos de otimização, quando comparado com o método tradicional de dimensionamento, apresentava menores valores de custo.

Sias e Alves (2016) desenvolveram no *software* MathLab um algoritmo de otimização no qual trabalharam com a programação matemática, neste caso o método dos pontos interiores. A rotina desenvolvida pelos autores é capaz de realizar o dimensionamento ótimo de pilares circulares considerando tanto a seção de concreto, geometria e resistência, quanto a seção de

aço. Eles consideraram o diâmetro da seção transversal, a área de aço da seção transversal, a profundidade da linha neutra em relação ao bordo mais comprimido da seção transversal, a inclinação da linha neutra e o  $f_{ck}$  do concreto como as variáveis do problema. A função objetivo foi definida como a soma do custo por metro de aço, concreto e forma. Já as restrições são os critérios relacionados a resistência, as armaduras e a geometria da seção. O algoritmo foi validado comparando o dimensionamento convencional, via ábaco, e com o do *software* comercial Eberick V9.

## 2.2. Otimização via método Simplex

O método Simplex é um algoritmo iterativo que busca a solução que minimiza uma determinada função objetivo atendendo a específicas restrições de igualdade e desigualdade. Foi desenvolvido há mais de 65 anos por Dantzig e após a evolução dos computadores tornou-se uma ferramenta poderosa de otimização no campo da economia, administração e engenharia.

No método Simplex, as restrições e a função objetivo devem ter relações lineares com as variáveis do projeto, sendo por isso chamado de programação linear. Esse método é o mais utilizado na prática para a solução de problemas de programação linear. A seguir são apresentados alguns trabalhos de otimização que usaram o método para definir o ponto de ótimo do problema analisado. No caso de problemas não lineares alguns pesquisadores têm trabalhado com o algoritmo de programação linear sequencial utilizando, a cada passo do processo iterativo da programação sequencial, o algoritmo Simplex para definir o próximo passo em busca do ponto de ótimo do problema não-linear. Essa definição do próximo passo consiste na solução do ponto de ótimo de um problema linear.

Bona *et al.* (2000) desenvolveram um aplicativo de otimização de processos influenciados por variáveis contínuas e/ou qualitativas usando o Simplex. Segundo os autores o aplicativo desenvolvido é portátil e amigável, podendo ser utilizado para a otimização de diversos sistemas.

Anaut *et al.* (2006) apresentam uma análise da redução de perdas elétricas por efeito Joule em redes de distribuição primária. Encontrar a configuração radial que fornece as perdas mínimas, melhorar o perfil de tensão e confiabilidade aumento de rede, é um problema de otimização não-linear com uma função objetivo quadrática. O método Simplex foi usado para resolver esse problema, permitindo a análise de todas as combinações possíveis para a configuração da rede,

enquanto responde por restrições impostas e desta forma atinge uma solução ideal para o problema.

Maia (2009) utilizou a ferramenta Solver do software comercial Microsoft Excel na otimização de problemas de vigas de concreto armado. Essa ferramenta permite escolher o método de análise entre o Simplex, o método de desvio e limite e o Método do Gradiente Reduzido Generalizado. Duas vigas foram analisadas, a primeira foi uma viga de seção variável que foi analisada pelo Solver onde buscou uma solução ótima para minimizar o volume da peça estrutural. A segunda foi uma viga contínua com função objetivo dada por uma função custo total. Nessa segunda análise foi executada uma análise linear com e sem restrição. Na análise com restrição constatou uma economia de 7,39%, motivando a utilização de métodos de otimização no dimensionamento de vigas de concreto armado.

Silva *et al.* (2010) apresentaram um processo para a determinação das dimensões do perfil de aço do tipo I de seções transversais de vigas mista aço-concreto de forma que a área da seção transversal de aço seja mínima e as restrições de projeto, definidas por normas, sejam satisfeitas. O objetivo principal foi a implementação de uma rotina de otimização dentro de um programa de elementos finitos. As dimensões da seção de concreto e as barras de reforço foram definidas pelo projetista, sendo as dimensões do perfil I de aço consideradas como as variáveis de projeto. O problema não linear de variação do comportamento estrutural da viga mista em relação às dimensões do perfil I de aço é aproximado por uma sequência de problemas lineares através do método da programação linear sequencial. Para a definição do próximo passo das iterações do método da programação linear sequencial é utilizado o método Simplex para a solução do problema linear com restrições.

Silva *et al.* (2011) realizaram a otimização de vigas mistas de aço-concreto discretizadas em elementos finitos de barra usando o método da programação linear sequencial associado ao método Simplex. As variáveis de projeto são consideradas sob duas abordagens: na primeira, essas variáveis são dadas pelos parâmetros que definem a seção transversal do perfil I do aço e a seção de concreto; na segunda, adicionou-se a rigidez longitudinal da conexão deformável buscando uma distribuição ótima dos conectores de cisalhamento ao longo da viga mista. As restrições de projeto são aquelas definidas em normas referentes ao dimensionamento de elementos lineares de concreto, aço ou misto.

## **2.3. Considerações Normativas**

As normas são códigos técnicos desenvolvidos por pesquisadores e empresas que trabalham na área do tema. Elas servem como uma orientação técnica para os engenheiros e demais profissionais na elaboração de seus projetos. Esses não são obrigados a seguir fielmente as prescrições das normas, no entanto, quando o fazem estão respaldados tecnicamente pelas mesmas. No Brasil o órgão responsável pela distribuição, gerenciamento de elaboração de novas normas, revisão de normas antigas, é a Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT). No caso de dimensionamento de seções transversais de elementos lineares de concreto armado a norma brasileira sobre esse tema é a NBR 6118 (2014). As prescrições dessa norma visam principalmente a obtenção de uma estrutura segura e durável.

Como já dito, o objetivo desse trabalho é desenvolver um programa de computador que a partir dos dados de entrada que defina a seção transversal, propriedades dos materiais, esforços solicitantes, prescrições de norma, fornece os diâmetros, a quantidade e posições das armaduras na seção transversal para que a seção obtida no final seja segura, durável, executável, e otimizada em termos da quantidade de aço utilizada. A seguir são apresentadas de forma breve as prescrições da norma supracitada utilizadas nesse trabalho.

### **2.3.1. Cobrimento**

De acordo com a NBR 6118 (2014), o cobrimento mínimo da armadura é o menor valor que deve ser respeitado ao longo de todo o elemento considerado. Em elementos lineares de concreto armado essa distância geralmente é dada pela face externa do estribo até a fôrma do elemento. Tem como função prevenir os mecanismos de deteriorações preponderantes relativos à armadura, como por exemplo, a despassivação por carbonatação ou por ação de cloretos, proteger as armaduras sobre as ações físicas e químicas que atuam sobre a estrutura de concreto, ou seja, de acordo com a agressividade de cada ambiente. O cobrimento nominal pode ser determinado pela Tabela 2.1 a seguir (NBR 6118, 2014).

Como pode-se observar a espessura do cobrimento depende diretamente da agressividade do ambiente onde a estrutura está localizada, ou seja, o cobrimento mínimo exigido é cada vez maior quanto mais agressivos for o meio que a estrutura está imersa.

Tabela 2.1 – Correspondência entre a classe de agressividade ambiental e o cobrimento nominal para  $\Delta_c = 10\text{mm}$

Tipo de Estrutura	Componente ou elemento	Classe de agressividade ambiental (Tabela 6.1)			
		I	II	III	IV
		Cobrimento nominal (mm)			
Concreto armado	Laje	20	25	35	45
	Viga/pilar	25	30	40	50
	Elementos estruturais em contato com o solo	30		40	50
Concreto protendido	Laje	25	30	40	50
	Viga/pilar	30	35	45	55

$\Delta_c$  (Cobrimento mínimo acrescido da tolerância de execução), NBR 6118 (2014)

### 2.3.2. Espaçamento mínimo entre as barras

O espaçamento mínimo entre as barras está relacionado à execução do elemento estrutural, já que entre uma barra e outra deve-se ter um espaço mínimo para garantir que o concreto em seu estado fresco preencha todo o volume da peça. Segundo a NBR 6118 (2014), o espaçamento livre entre as faces das barras longitudinais, medido no plano da seção transversal, deve ser igual ou superior ao maior dos seguintes valores:

- a) Na direção horizontal ( $a_h$ )
  - 20mm;
  - diâmetro da barra, do feixe ou da luva;
  - 1,2 vez a dimensão máxima característica do agregado graúdo;
- b) Na direção vertical ( $a_v$ )
  - 20mm;
  - diâmetro da barra, do feixe ou da luva;
  - 0,5 vez a dimensão máxima característica do agregado graúdo;

A definição do espaçamento mínimo entre as barras na direção horizontal para as vigas é dada pela distância entre as barras que estão na mesma camada; já para a direção vertical, pela distância entre camadas de barras. Para os pilares a norma prescreve o item (a) dado acima para

o espaçamento livre entre as faces das barras longitudinais, medido no plano da seção transversal, fora da região de emendas, não distinguindo direção horizontal de vertical.

# Capítulo 3

## Seções de Concreto Armado sob Flexão Composta

### 3.1. Considerações Referentes a Otimização

A otimização também tem como destaque a possibilidade de sistematização de procedimentos para o dimensionamento ótimo das estruturas (Maia, 2009). Nesse trabalho esse dimensionamento ótimo será quantificar as barras de aço em uma seção poligonal qualquer de concreto sujeita à flexão composta, obtendo-se assim, a quantidade mínima de aço para que a seção suporte os esforços solicitantes impostos atendendo as restrições de deformações limites dos materiais. Para isso, será utilizado o método da programação linear sequencial junto ao método Simplex de otimização de problemas restritos lineares. Na programação sequencial linear as funções objetivos e restrições são aproximadas por funções lineares usando a expansão em série de Taylor truncada no termo de primeira ordem. Conhecido um ponto que atenda as restrições do problema é definido um novo ponto na direção do ponto de ótimo determinando a direção de busca como sendo o ponto que minimiza um problema linear restrito, onde é usado o método Simplex.

Segundo Bastos (2004) o projeto estrutural ótimo é obtido a partir de diversas análises, levando-se em consideração as inúmeras possibilidades das variáveis de projeto dentro de um conjunto viável de soluções, condicionado às restrições de norma e de desempenho. Para que se tenha sucesso nos problemas de otimização deve-se definir de maneira bem clara a variáveis de projeto, a função objetivo e as restrições do problema em questão. A seguir esses itens serão definidos para o problema proposto nesse trabalho.

### 3.2. Função Objetivo

Também conhecida como função desempenho, é a função que se deseja determinar o seu mínimo ou o seu máximo. Em problemas determinísticos de otimização estrutural a função objetivo geralmente é o volume ou o peso da estrutura, e as restrições estão relacionadas aos requisitos normativos quanto a tensões e deslocamentos (Verzenhassi, 2008). Nesse caso como o objetivo é determinar a quantidade mínima de barras de aços e seus diâmetros, para que a seção em análise resista aos esforços solicitantes com segurança, deve-se então determinar o

mínimo da função objetivo dada pela Equação (3.1), onde:  $n$  é o número de barras;  $A_{si}$  são as áreas da  $n$  barras; e  $\mathbf{x}$  é o vetor de incógnitas apresentado no item seguinte.

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n A_{si} \quad (3.1)$$

Considerando que as áreas das barras podem apenas ser positivas ou nulas, o menor valor possível para a função objetivo seria zero. Nesse caso, a seção de concreto não precisaria da contribuição da armadura de aço para resistir aos esforços solicitantes, atendendo as prescrições de norma. Caso contrário, existirão algumas áreas e o algoritmo de otimização tentará reduzir a soma dessas atendendo a todas as restrições de projeto.

### 3.3. Variáveis de Projeto

Variáveis de projeto são as variáveis que se alteram durante o processo de otimização. Pode-se descrever um sistema de otimização por um conjunto de quantidades, nesse conjunto pode existir dois tipos de variáveis, as discretas e as contínuas. As variáveis do primeiro tipo podem assumir apenas valores inteiros, ou seja, índices que são associados a descrição do problema, como, por exemplo, o índice que define a posição de um elemento no vetor cujos elementos definem os diâmetros comerciais de armadura para estruturas de concreto armado. Já o segundo tipo, as variáveis contínuas, podem assumir um valor real qualquer dentro de um determinado intervalo, como, por exemplo, o diâmetro de uma armadura pode ser considerado um valor real qualquer maior que zero.

Segundo Silva (2001) de um ponto de vista físico, as variáveis de projeto podem representar as seguintes informações sobre a estrutura:

- Propriedades mecânicas ou físicas do material;
- A topologia da estrutura, isto é, o padrão de conexão dos elementos ou o número de elementos em uma estrutura;
- A configuração ou forma geométrica de uma estrutura;
- Dimensões de seções transversais ou comprimento dos elementos.

No processo de otimização implementado nesse trabalho as variáveis de projeto (representadas pelo vetor  $\mathbf{x}$  mostrado na Equação (3.2)) são todas contínuas sendo dadas pelas áreas das barras e os parâmetros que definem a deformada da seção, ou seja, deformação axial da seção,

curvatura da seção no eixo  $x$  e curvatura da seção no eixo  $y$ . Nos subitens seguintes são dadas as definições de cada variável desse projeto.

$$\mathbf{x} = (A_{s1} \ A_{s2} \ \dots \ A_{sn} \ \varepsilon_0 \ k_x \ k_y)^T \quad (3.2)$$

Foi também implementado nesse trabalho um algoritmo para transformar a seção obtida do processo de otimização descrito no parágrafo anterior, em uma seção comercial, ou seja, as variáveis contínuas referentes às áreas das barras foram substituídas por valores discretos dados pelo fabricante do material.

### 3.3.1. Área das barras

No processo de otimização essas variáveis são contínuas com restrições laterais, ou seja, não podem ser menores que zero e nem maior que uma área limite dada por um diâmetro comercial especificado pelo usuário do programa desenvolvido nesse trabalho. No algoritmo de definição da seção transversal comercial (ver capítulo 4, item 4.6 desse trabalho) é implementado um processo iterativo onde cada barra da seção é substituída pelo diâmetro comercial fornecido pelo usuário ou um diâmetro comercial inferior. O programa permite duas situações a serem definidas pelo usuário, como descritas a seguir:

- (i) Todas as barras são substituídas pelo valor do diâmetro comercial dado pelo usuário, ficando a seção final detalhada com todas as barras de mesmo diâmetro. A substituição das barras não é feita de uma só vez, primeiro substitui-se aquela que tem maior área, essa barra é fixada na seção e retirada do vetor de variáveis de projeto, assim o processo de otimização é reanalisado. Esse processo é repetido até que todas as barras sejam trocadas.
- (ii) As barras são substituídas pelo valor do diâmetro comercial dado pelo usuário ou um diâmetro comercial inferior, ficando a seção final detalhada com barras de diâmetros comerciais menores ou iguais ao fornecido pelo usuário. Assim como em (i), primeiro é substituída barra que tem maior área, escolhendo o diâmetro comercial maior e mais próximo de uma lista pré-definida, essa barra é fixada na seção e retirada do vetor de variáveis de projeto e o processo de otimização é reanalisado. Esse processo é repetido até que todas as barras sejam trocadas.

### 3.3.2. Deformada da seção

Na definição da equação da deformada da seção transversal de um elemento linear de concreto armado sob flexão composta, serão consideradas as hipóteses da teoria de viga de Euler-

Bernoulli, ou seja: seções inicialmente planas e ortogonais ao eixo da barra, permanecem planas após deformações e ortogonais ao eixo deformado da barra. Também será considerada uma perfeita aderência entre o concreto e o aço das armaduras o que garante uma deformação única para toda a seção.

De acordo com as considerações do parágrafo anterior a deformada da seção é dada pela Equação (3.3), onde:  $\varepsilon$  é a deformação axial na origem do sistema de referências;  $k_x$  e  $k_y$  são as rotações da seção em relação aos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente. O eixo local  $xyz$  pode ser observado na Figura 3.1.

$$\varepsilon(x, y) = \varepsilon + k_x y - k_y x \quad (3.3)$$

Quando a seção está imposta a um carregamento, neste caso flexão composta, a mesma pode rotacionar tanto no eixo  $x$  quanto no eixo  $y$ , devido a ação deste carregamento. Como pode-se observar na Equação (3.3), a rotação da seção influencia diretamente na deformação axial.

Estas rotações possuem um limite, ou seja, pode-se rotacionar a seção desde que os esforços solicitantes sejam menores ou iguais aos esforços resistentes da seção em análise, caso contrário, a seção não resiste a rotação imposta nela, portanto, não é recomendado aplicar esta rotação na seção. Na Figura 3.1 pode-se observar os eixos de rotação,  $K_x$  e  $K_y$ , em uma seção inicial, ou seja, sem sofrer nenhuma rotação. Já na Figura 3.2 está indicando uma seção inicial, na cor azul, e a seção rotacionada no eixo  $x$  e no eixo  $y$  e com um deslocamento de origem, na cor vermelha.

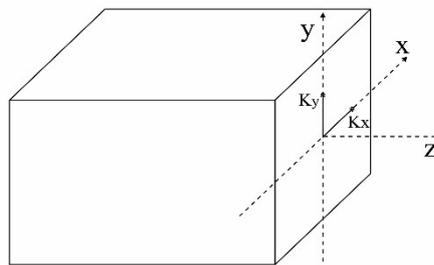


Figura 3.1 – Definindo os eixos de rotação

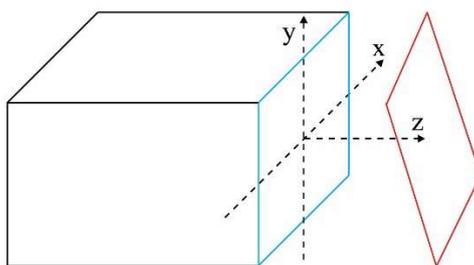


Figura 3.2 – Deformação nos três eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$

### 3.3.3. Quantidade e posições das barras

Essas variáveis não podem ser consideradas variáveis de otimização, pois as mesmas não variam durante o processo de otimização que consiste na aplicação do método da programação sequencial linear em conjunto com o Simplex. Porém, elas podem ser consideradas variáveis do problema, visto que, a configuração das barras (quantidade e posicionamento) da seção do ponto de partida pode ser diferente da seção final obtida pelo programa. A maneira como é definido esse ponto de partida está descrita de forma detalhada no Capítulo 4, item 4.5 desse trabalho.

## 3.4. Restrições

As restrições são condições que devem ser satisfeitas para que o projeto seja aceitável, pode-se dizer também que são funções de igualdade ou desigualdade das variáveis de projeto que descrevem situações de projeto que devem ser atendidas. Segundo Sias (2014) para a completa definição do problema devem-se determinar as restrições na qual o problema possui, definindo assim os limites nos quais o algoritmo desenvolvido irá trabalhar para achar o ponto de ótimo.

Para o dimensionamento e detalhamento de uma seção poligonal qualquer de concreto armado sob flexão composta são definidas as seguintes restrições: deformação limite no concreto, deformação limite no aço, esforços internos na seção maiores ou iguais aos esforços solicitantes. Outras restrições que devem ser consideradas são referentes às restrições de fronteiras, as quais são: diâmetro das barras (limite inferior e superior) e o tamanho do passo. Essa última restrição de fronteira é definida para que seja válida a aproximação linear usada no método da programação sequencial linear. A seguir são apresentadas todas as restrições supracitadas.

### 3.4.1. Deformações limites do concreto

A Figura 3.3 apresenta os limites de deformações para uma seção transversal de um elemento linear de concreto armado sob ação de flexão composta segundo NBR6118 (2014). De acordo com a figura a fibra mais comprimida da seção deve apresentar deformação específica linear em valor absoluto menor ou igual a  $\varepsilon_{cu}$ . No caso de seções totalmente comprimidas a deformação específica linear em valor absoluto na fibra a  $\frac{\varepsilon_{cu}-\varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{cu}} h$  da fibra mais comprimida deve ser menor que  $\varepsilon_{c2}$ . Já a deformação específica linear limite nos pontos de aplicação das barras deve ser menor que 1%. Em resumo, a Figura 3.3 mostra que uma seção está segura se a deformada da seção, obtida para um carregamento dado pela combinação última das ações, está à direita do ponto A e à esquerda dos pontos B e C.

A deformada de uma seção em relação ao eixo  $xy$  é dada pela Equação (3.3), como já foi visto anteriormente, porém, essa mesma deformada pode ser determinada em relação a outro sistema de referência, o sistema  $x'y'$ . A Figura 3.4 mostra este novo sistema,  $x'y'$ . Considerando que  $\operatorname{tg}\theta = k_y/k_x$ , tem-se a Equação (3.4) para a deformada da seção, onde  $\varepsilon' = \varepsilon$  e  $k_x' = k_y \operatorname{sen}\theta + k_x \operatorname{cos}\theta$ .

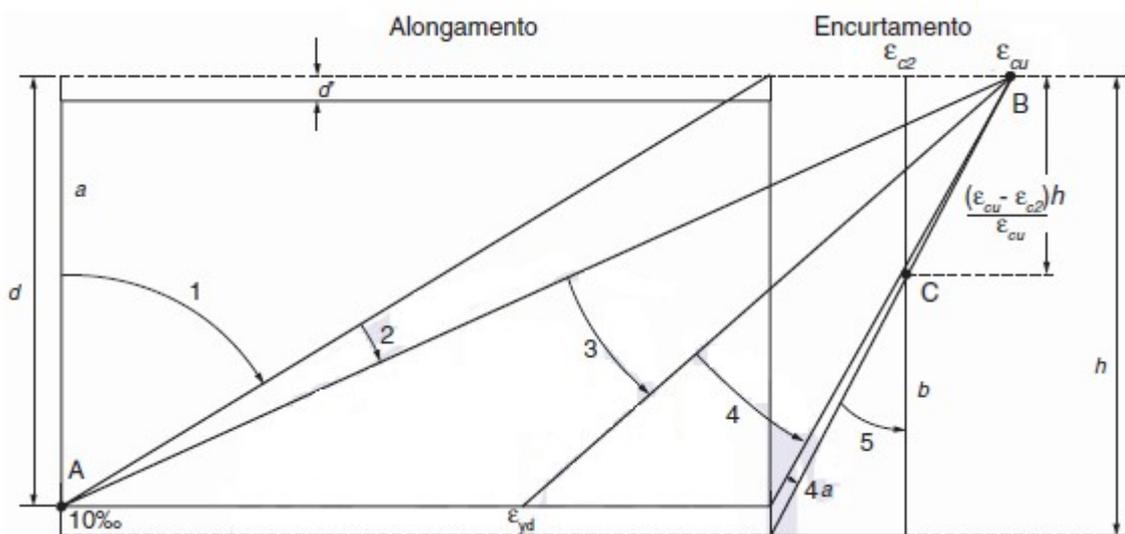


Figura 3.3 – Domínios do concreto armado

$$\varepsilon_{(x',y')} = \varepsilon' + y' k_x' \quad (3.4)$$

Para o sistema  $x'y'$  define-se  $h_1$  como sendo a coordenada  $y'$  do vértice da seção poligonal de maior coordenada  $y'$ , já  $h_2$  é a coordenada  $y'$  do vértice de menor coordenada  $y'$ . Esses vértices são destacados na Figura 3.4.

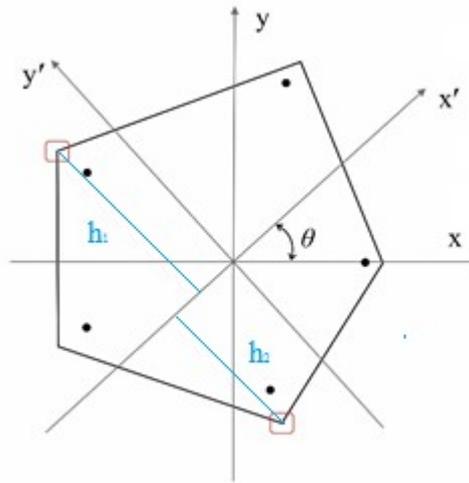


Figura 3.4 – Seção poligonal com o sistema de coordenadas  $x'y'$

Definindo  $h$  como sendo a distância entre os vértices destacados na Figura 3.4, ou seja,  $h = h_1 - h_2$ , determina-se a posição dos pontos que estão a  $\frac{\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{cu}} h$  do vértice  $h_1$  e do vértice  $h_2$ , definindo-se assim as posições na seção de  $h_3$  e  $h_4$ , respectivamente. Com essas definições chega-se as Equações (3.5) a (3.8) para as restrições referentes as deformações limites no concreto. Nessas equações  $\varepsilon_{cu}$  e  $\varepsilon_{c2}$  são deformações específicas lineares de compressão e são tomadas com seus valores negativos. De acordo com a NBR 6118 (2014) para concreto até C50, tem-se  $\varepsilon_{cu} = -0,35\%$  e  $\varepsilon_{c2} = -0,2\%$ . Para concreto com  $f_{ck}$  maior que 50MPa essas deformações dependem do  $f_{ck}$ .

$$C_1(\mathbf{x}) = \varepsilon + k_x 'h_1 - \varepsilon_{cu} \geq 0 \quad (3.5)$$

$$C_2(\mathbf{x}) = \varepsilon + k_x 'h_2 - \varepsilon_{cu} \geq 0 \quad (3.6)$$

$$C_3(\mathbf{x}) = \varepsilon + k_x 'h_3 - \varepsilon_{c2} \geq 0 \quad (3.7)$$

$$C_4(\mathbf{x}) = \varepsilon + k_x 'h_4 - \varepsilon_{c2} \geq 0 \quad (3.8)$$

### 3.4.2. Deformações limites do aço

Das Equações (3.5) a (3.8) verifica-se a limitação da deformada da seção quanto as deformações de compressão, já para as deformações de tração esse limite é imposto pelas Equações (3.9)

dadas a seguir. Essas equações foram definidas de acordo com a Figura 3.3 (NBR 6118, 2014) que fixa o valor limite de 1% para a deformação de tração nos pontos da seção onde se posicionam as barras de reforço.

$$1\% - \varepsilon(x_i, y_i) \geq 0 \quad i=1,2,\dots,n \quad \text{onde } n \text{ é o n}^\circ \text{ de barras} \quad (3.9)$$

Nas Equações (3.9),  $(x_i, y_i)$  é a coordenada da barra  $i$  dentro da seção,  $i$  varia de 1 até  $n$ , logo  $n$  é o número de barras na seção.

Definindo  $h_{b1}$  como sendo a coordenada  $y'$  da barra de maior coordenada  $y'$ , e  $h_{b2}$  como sendo a coordenada  $y'$  da barra de menor coordenada  $y'$ , como mostrado na Figura 3.5, chega-se as restrições dadas pelas Equações (3.10) e (3.11) para a deformação nas barras mais solicitadas.

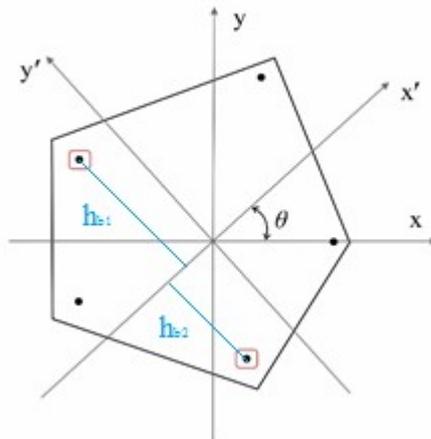


Figura 3.5 – Barras mais solicitada na seção

$$C_5(\mathbf{x}) = 0,01 - (\varepsilon + k_x' h_{b1}) \geq 0 \quad (3.10)$$

$$C_6(\mathbf{x}) = 0,01 - (\varepsilon + k_x' h_{b2}) \geq 0 \quad (3.11)$$

### 3.4.3. Esforços Resistentes

Nesse trabalho são analisadas seções poligonais de concreto armado sujeitas a flexão composta, ou seja, a seção transversal pode estar submetida a um esforço combinado de flexão e carga axial. No caso da flexão é considerado o caso mais geral, ou seja, o momento de flexão pode ser aplicado excentricamente em relação aos eixos principais de inércia da seção, chamado na literatura de flexão oblíqua.

Os esforços solicitantes de flexão composta é o caso mais complexo de carregamento para a determinação da armadura longitudinal de um elemento linear de concreto armado, sendo assim, o programa desenvolvido nesse trabalho possibilita a análise de várias situações de projetos, desde as mais simples, como dimensionamento de vigas de seções retangulares sob flexão, até as mais complexas, como o dimensionamento de pilares de seção poligonal sob flexão oblíqua composta.

O momento obtido a partir da configuração das barras analisadas ( $M_R$ ) deve ser maior ou igual ao momento solicitante. Trabalhando com as componentes desse vetor momento em relação aos eixos  $x$  e  $y$  tem-se as Equações (3.12) e (3.13) para os momentos resistentes da seção. As equações de restrição para satisfazer o momento solicitante são dadas pelas Equações (3.14) e (3.15), onde os momentos resistentes e solicitantes são considerados com seus valores absolutos.

$$M_{R_x} = \int_A \sigma(x, y) y dA + \sum_{i=1}^n \sigma(x_i, y_i) y_i A_{s_i} \quad (3.12)$$

$$M_{R_y} = \int_A \sigma(x, y) x dA + \sum_{i=1}^n \sigma(x_i, y_i) x_i A_{s_i} \quad (3.13)$$

Nas Equações (3.12) e (3.13),  $\sigma(x, y)$  é a tensão normal no ponto de coordenada  $(x, y)$  da seção transversal.  $\sigma(x_i, y_i)$  é a tensão normal na barra de reforço posicionada no ponto de coordenada  $(x_i, y_i)$  da seção transversal.  $A_{s_i}$  é a área da barra de reforço de índice  $i$  com  $i$  variando de 1 até  $n$ , sendo  $n$  o número de barras de reforço na seção.

$$C_7(\mathbf{x}) = M_{R_x} - M_{S_x} \geq 0 \quad (3.14)$$

$$C_8(\mathbf{x}) = M_{R_y} - M_{S_y} \geq 0 \quad (3.15)$$

O esforço axial obtido a partir da configuração adotada das barras ( $N_R$ ), dado pela equação (3.16), deve ser igual ao esforço normal solicitante ( $N_S$ ). A equação (3.17) mostra essa restrição de igualdade. Nesse texto, as restrições de desigualdade são elementos do vetor **C**, enquanto as restrições de igualdade são elementos do vetor **D**.

$$N_R = \int_A \sigma(x, y) dA + \sum_{i=1}^n \sigma(x_i, y_i) A_{s_i} \quad (3.16)$$

$$D_1(\mathbf{x}) = N_R - N_S = 0 \quad (3.17)$$

Como é mostrado nas equações (3.14), (3.15) e (3.17), as restrições dos esforços são consideradas de desigualdade para  $M_{Rx}$  e  $M_{Ry}$ , e de igualdade para  $N_R$ . Espera-se que, se o esforço normal resistente é igual ao solicitante e os momentos resistentes são maiores que os momentos solicitantes a seção esteja segura. Isso ocorre para maioria das seções e configurações de barras de reforço, no entanto, existem seções com determinada configuração de barras de reforço para as quais o momento resistente sendo maior que o solicitante não garante segurança da seção, um tipo desse de seção é analisada no capítulo de exemplos desse trabalho. Para essas seções as restrições de desigualdade devem ser trocadas pelas restrições de igualdade dadas pelas equações (3.18) e (3.19) a seguir.

$$D_2(\mathbf{x}) = M_{Rx} - M_{Sx} = 0 \quad (3.18)$$

$$D_3(\mathbf{x}) = M_{Ry} - M_{Sy} = 0 \quad (3.19)$$

No método de busca do ponto de ótimo implementado nesse trabalho, parte-se de um ponto que satisfaz todas as restrições, sendo que as restrições dos esforços solicitantes são atendidas na condição de igualdade. Durante o processo iterativo de definição de um novo ponto que atenda as restrições e reduza a função objetivo há uma tendência de que todos os esforços solicitantes continuem iguais aos resistentes mesmo com as restrições de desigualdades. Se em uma iteração do método observar que um ou os dois momentos resistente começa a ficar, em valor absoluto, maior que o momento solicitante, deve-se verificar se o ponto  $(M_{Rx}, M_{Ry})$  permanece dentro da curva de iteração dos momentos para a seção analisada sobre a ação do esforço normal ( $N_R = N_S$ ). Caso permaneça, as restrições são mantidas de desigualdades nas iterações seguintes do algoritmo de programação sequencial linear, caso contrário, a restrição do momento (ou dos momentos) analisado é transformada em uma restrição de igualdade, para as iterações seguintes do algoritmo.

A curva de interação dos momentos, citada no parágrafo anterior, para uma determinada seção com uma configuração de armadura e sujeita a um determinado esforço normal é definida, por exemplo, atribuindo valores para  $M_{Rx}$  e determinando o valor de  $M_{Ry}$  para o qual as deformações na seção atingem os limites definidos pela NBR 6118 (2014), mencionados nos dois tópicos que antecedem a esse. Essa curva tem geralmente a característica de que ao aumentar o momento em uma direção o momento suportado na outra direção reduz, já que a seção permanece a mesma enquanto o momento em uma direção é aumentado. No entanto, em algumas seções para determinada configuração da armadura isso não acontece, e são essas

seções em que as restrições de momentos são alteradas para restrições de igualdade. No quinto e no sexto exemplo que estão respectivamente nos itens 5.5 e 5.6 deste trabalho, foram definidas as curvas de iteração para as seções em análise. Na Figura 5.24 pode-se observar a curva de iteração de uma seção retangular vazada para uma carga axial de -500kN, já na Figura 5.27 pode-se observar uma curva de iteração de uma seção L e uma carga axial de -600kN.

### 3.4.4. Restrições laterais

As restrições de fronteiras são limitações práticas das variáveis de projeto, por exemplo, uma variável de projeto referente a uma dimensão não pode na prática ser menor que zero ou maior que um determinado limite, fixando assim restrições de fronteiras ou barreiras para a variável de projeto. Geralmente são comuns a todos os problemas de otimização com restrição.

No item 3.3 desse trabalho foram definidas as variáveis de projeto. Dentre elas as variáveis referentes a área das barras devem ter barreiras, ou seja, elas devem ter diâmetros menores ou iguais ao diâmetro definido pelo usuário e maior que zero, definindo assim as restrições dadas pelas equações (3.20) e (3.21). Nessas equações,  $\bar{A}_s$  é a área limite para as barras, ou seja, área da barra de diâmetro dado pelo usuário, e  $i = 1, 2, \dots, n$  com  $n$  sendo o número de barras.

$$C_{i+8}(\mathbf{x}) = A_{si} \geq 0 \quad (3.20)$$

$$C_{i+n+8}(\mathbf{x}) = \bar{A}_s - A_{si} \geq 0 \quad (3.21)$$

No método de busca do ponto de ótimo implementado nesse trabalho, define-se um ponto de partida  $\mathbf{x}_0$  e obtém-se o próximo ponto que atenda as restrições de projeto e gere uma redução na função objetivo a partir da equação iterativa  $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{d}$ , onde  $\mathbf{d}$  é o tamanho do passo. Dessa forma o problema não-linear analisado passa ser uma sequência de problemas lineares com as variáveis dadas pelo vetor  $\mathbf{d}$ , pode-se dizer que  $\mathbf{d}$  é o conjunto  $\mathbf{x}$  linearizado. Para que seja válida a aproximação linear usada no método implementado nesse trabalho, deve-se impor restrições de barreiras para o tamanho do passo, ou seja,  $|\mathbf{d}| \leq \Delta$ . Dessa forma, chega-se ao conjunto de restrições dadas a seguir, onde  $i$  varia de 1 até  $n+3$ , com  $n$  o número de barras.

$$C_{i+2n+8}(\mathbf{d}) = \Delta_i + d_i \geq 0 \quad (3.22)$$

$$C_{i+3n+11}(\mathbf{d}) = \Delta_i - d_i \geq 0 \quad (3.23)$$

### 3.5. Propriedades Geométricas

Como já mencionado, o objetivo desse trabalho é a otimização de seções poligonais de concreto armado sujeita à flexão composta. A identificação da seção será feita através do seu número de vértices e de suas coordenadas planas. Os vértices devem ser colocados em uma sequência contornando a seção poligonal no sentido anti-horário, como pode ser visualizado na Figura 3.6 abaixo. As barras de aço que compõem a armadura do elemento linear de concreto armado são definidas de forma pontual no interior da seção.

Podem ser definidos furos na seção transversal, seus vértices são definidos de forma análoga à seção externa descrita no parágrafo anterior. O programa de computador implementado tem uma rotina que transforma a seção externa e os furos em uma seção poligonal única, composta de todos os vértices da seção externa e dos furos, sendo que para os furos os vértices são sequenciados no sentido horário enquanto os vértices da seção externa são sequenciados no sentido anti-horário.

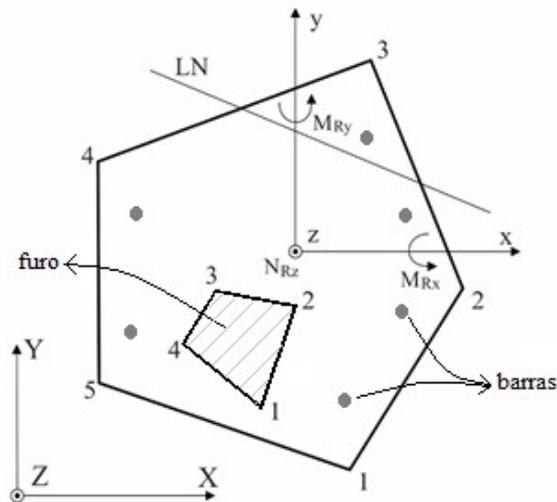


Figura 3.6 – Definição do sistema de coordenadas e seção transversal

No cálculo dos esforços resistentes da seção será utilizado o teorema de Green que transforma a integral ao longo da área da seção transversal em uma integral ao longo do contorno dessa. O sentido em que se contorna a seção influencia no sinal do resultado da integral, por isso a exigência que os vértices da seção sejam orientados de forma que delimitem o contorno da seção em um determinado sentido.

### 3.6. Materiais

A identificação dos materiais será feita por meio de suas relações tensão-deformação. Essas, por sua vez, serão definidas através de curvas dadas por um número qualquer de faixas de deformação, onde em cada faixa pode ser definido um polinômio de até grau 3 para a relação tensão-deformação do material. A Figura 3.7 a seguir ilustra um gráfico para uma curva possível de ser representada na metodologia utilizada nesse trabalho. Esta curva pode ser dividida em um número qualquer de faixas, representada pelos  $F_i$  na Figura 3.7, com  $i$  variando de 1 até o número total de faixas. Para cada faixa serão definidos os coeficientes que caracterizarão a curva polinomial a ser considerada e suas deformações limites à direita e à esquerda, representada pelos  $L_i$  na Figura 3.7 com  $i$  variando de 1 até o número de faixas de deformação mais um.

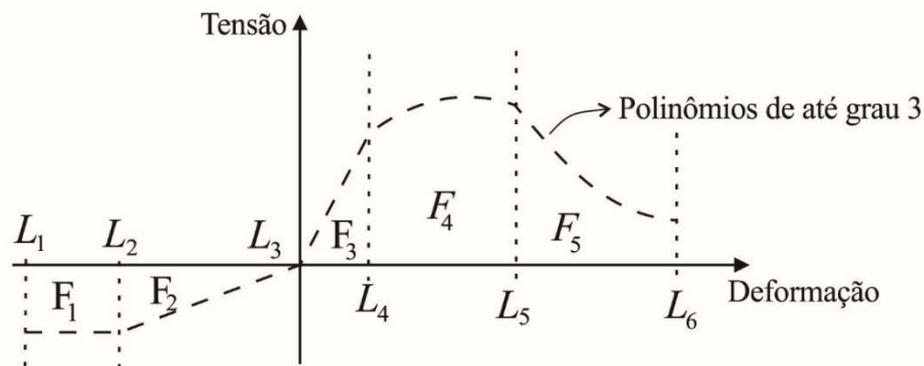


Figura 3.7 – Relação tensão deformação ilustrativa de um material;

Nesse trabalho a seção de concreto poderá ter uma forma poligonal qualquer e não será considerada como variável no projeto de otimização. Já a quantidade da armadura, o seu posicionamento, e as áreas das barras, são consideradas variáveis no programa de computador desenvolvido nesse trabalho, no entanto, apenas as áreas das barras de aço são consideradas variáveis de projeto contínuas no processo de otimização implementado. No algoritmo desenvolvido para a definição da seção transversal final as áreas de aço deverão ser substituídas pelas barras de diâmetro comercial dados pelas Tabelas 3.1 e 3.2 a seguir.

Tabela 3.1 – Diâmetro nominal aço CA25 e CA50

Diâmetro Nominal (mm)	Massa Nominal (Kg/m)	Tolerância (%)	Seção Nominal (mm <sup>2</sup> )
6,3	0,245	±10	31,2
8,0	0,395	±10	50,3
10,0	0,617	±6	78,5
12,5	0,963	±6	122,7
16,0	1,578	±6	201,1
20,0	2,466	±6	314,2
25,0	3,853	±6	490,9
32,0	6,313	±6	804,2

Tabela 3.2 - Diâmetro nominal aço CA60

Diâmetro Nominal (mm)	Massa Nominal (Kg/m)	Tolerância (%)	Seção Nominal (mm <sup>2</sup> )
4,2	0,109	±10	13,9
5,0	0,154	±10	19,6
6,0	0,222	±6	28,3
7,0	0,302	±6	38,5
8,0	0,395	±6	50,3
9,5	0,558	±6	70,9

### 3.7. Relação Tensão-Deformação do Concreto

O modelo da curva tensão-deformação do concreto que é usado nesse trabalho é o modelo fornecido pela NBR 6118 (2014). A Equação (3.24) a seguir mostra as equações analíticas desse modelo.

$$\sigma_c(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{para } \varepsilon < 0 \\ 0,85 f_{cd} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c2}} \right)^n \right] & \text{para } 0 < \varepsilon < \varepsilon_{c2} \\ 0,85 f_{cd} & \text{para } \varepsilon_{c2} \leq \varepsilon < \varepsilon_{cu} \\ 0 & \text{para } \varepsilon > \varepsilon_{cu} \end{cases} \quad (3.24)$$

Na Equação (3.24),  $f_{cd}$  é a resistência de cálculo do concreto, as tensões e deformações de compressão são tomadas positivas e as de tração negativas. Os valores adotados para o parâmetro  $n$  dependem de  $f_{ck}$  (resistência característica do concreto) e são definidos na Equação (3.25) dada a seguir.

$$n = \begin{cases} 2 & \text{para } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \\ n = 1,4 + 23,4 \left[ \frac{90 - f_{ck}}{100} \right]^4 & \text{para } f_{ck} \geq 50 \text{ MPa} \end{cases} \quad (3.25)$$

Já os parâmetros  $\varepsilon_{c2}$  (deformação específica linear de encurtamento no início do patamar plástico) e  $\varepsilon_{cu}$  (deformação específica linear de encurtamento do concreto na ruptura) são definidos a seguir:

- Para concretos de classe até C50:

$$\varepsilon_{c2} = 2.0\%$$

$$\varepsilon_{cu} = 3.5\%$$

- Para concretos de classe C55 até C90:

$$\varepsilon_{c2} = 2,0\% + 0,085\% (f_{ck} - 50)^{0,53}$$

$$\varepsilon_{cu} = 2,6\% + 36\% \left[ \frac{90 - f_{ck}}{100} \right]^4$$

De acordo com a NBR 6118 (2014) para o dimensionamento de elementos em concreto deve-se utilizar a resistência de cálculo à compressão dada pela Equação (3.26). Nessa equação  $f_{ck}$  é a resistência à compressão característica do concreto obtida por meio de um tratamento estatístico dos resultados de ensaios de ruptura à compressão simples de um determinado número de corpos de prova do concreto.  $\gamma_c$  é um coeficiente de segurança maior que a unidade. Já o valor de 0,85 está associado a uma redução no  $f_{ck}$  observada experimentalmente quando se aplica uma taxa de variação da carga no ensaio de compressão simples de forma mais lenta.

$$f_c = 0.85 \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \quad (3.26)$$

O gráfico da curva tensão-deformação do concreto dada pela Equação (3.24) é mostrado na Figura 3.8 a seguir. Para classe de concreto até C50 no intervalo  $0 < \varepsilon < \varepsilon_{c2}$  a curva é descrita por uma parábola, sendo, por isso, chamada no meio técnico de curva parábola-retângulo. Já para classes C55 até C90 a curva não tem mais a forma analítica de uma parábola nesse trecho, já que o parâmetro  $n$ , definido na Equação (3.25) acima, para esses concretos não é mais inteiro e igual a dois.

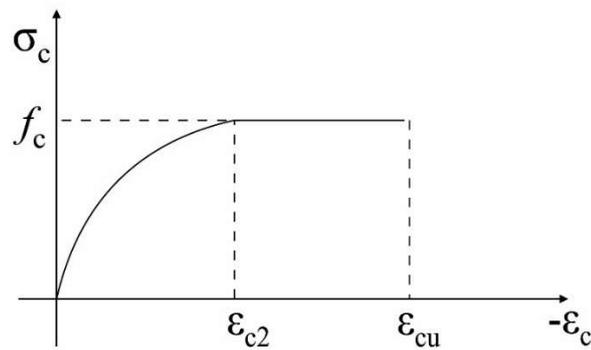


Figura 3.8– Diagrama tensão-deformação do concreto

Nesse trabalho as tensões de compressão na seção de concreto serão determinadas através da Equação (3.24) reescrita na forma da Equação (3.27), onde  $a = 1000$  e  $b = 250000$ , concreto classe até C50, e as deformações e tensões de compressão são consideradas negativas. De acordo com item 3.6, para a definição dos materiais essa curva do concreto será definida por meio de duas faixas e três limites de deformação. Para deformações fora das faixas definidas, as rotinas de análise do programa consideram tensão nula (CALDAS, 2004).

$$\sigma_c = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 < \varepsilon \\ (a\varepsilon + b\varepsilon^2) & \text{para } -0,002 < \varepsilon < 0 \\ -f_c(a\varepsilon + b\varepsilon^2) & \text{para } \varepsilon_{cu} \leq \varepsilon < -0,002 \\ 0 & \text{para } \varepsilon < \varepsilon_{cu} \end{cases} \quad (3.27)$$

### 3.8. Relação Tensão-Deformação do Aço

A relação tensão-deformação para o aço que será usada nesse trabalho é dada pela Equação (3.28). Essa equação é fornecida pela ABNT NBR 6118 (2014) e vale tanto para as barras de aço CA25 e CA50 quanto para os fios de aço CA60, diferenciando entre elas apenas nos valores da deformação e tensão de escoamento. O gráfico dessa equação é ilustrado na Figura 3.9 onde podem ser observados os limites de deformação dados no item 3.4.1 e 3.4.2 para o concreto e aço. Ressaltando que as barras de aço estão envolvidas por concreto, então a deformação limite do aço na compressão é dada pela deformação limite do concreto na compressão.

$$\sigma_s = \begin{cases} E_s \varepsilon & \text{para } -\varepsilon_y \leq \varepsilon \leq \varepsilon_y \\ -f_y & \text{para } -0,35\% < \varepsilon < -\varepsilon_y \\ f_y & \text{para } \varepsilon_y < \varepsilon < 1\% \end{cases} \quad (3.28)$$

Na Equação (3.28),  $E_s$  é o módulo de elasticidade longitudinal do aço, igual a 210GPa segundo

ABNT NBR 6118 (2014).  $\varepsilon_y = \frac{f_s}{E_s}$  onde  $f_s = \frac{f_y}{\gamma_s}$  é a tensão de escoamento de cálculo do aço

das armaduras com  $\gamma_s$  sendo um coeficiente maior que a unidade e  $f_y$  é a tensão de escoamento do aço, ou seja, 25, 50 ou 60KN/cm<sup>2</sup>. De acordo com item 3.6 para a definição dos materiais a curva do aço mostrada na Figura 3.9 será definida por meio de três faixas e quatro limites de deformação. Para deformações fora das faixas definidas, as rotinas de análise do programa consideram tensão nula.

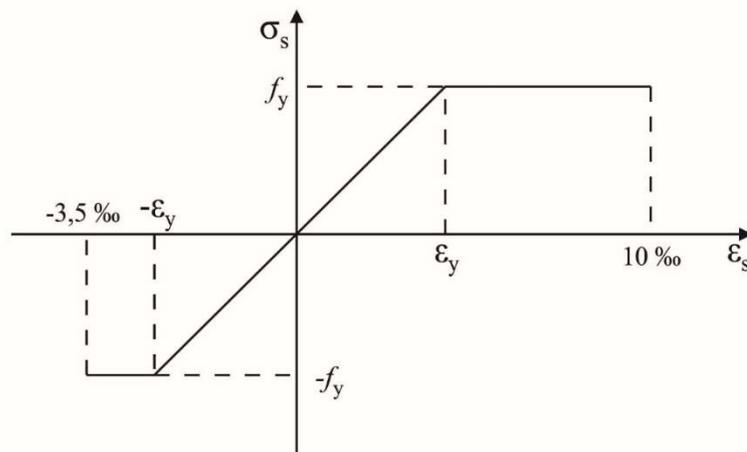


Figura 3.9 – Diagrama tensão-deformação do aço

### 3.9. Esforços Resistentes

Elementos estruturais onde o comprimento é muito maior que as dimensões da seção transversal estão sujeitos, em uma seção transversal imaginária ao longo do seu comprimento, a uma distribuição de tensão normal quando submetidos a ação conjunta de flexão e força axial centrada. A partir dessa distribuição de tensão pode-se determinar os momentos fletores,  $M_{Rx}$ ,  $M_{Ry}$  e o esforço normal  $N_{Rz}$ , os quais são definidos como esforços resistentes da seção transversal em análise. Esses são descritos segundo um sistema de coordenadas  $xyz$  com origem em um ponto qualquer do plano que contém a seção, como mostra a Figura 3.10 (Caldas, 2004).

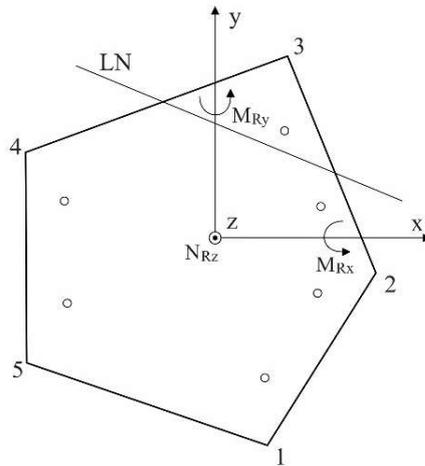


Figura 3.10 – Sistema local de coordenadas

Em termos de solução analítica do problema, a origem do sistema local de referência não interfere no resultado. No entanto, segundo CALDAS (2004), a utilização da origem do sistema de referência local coincidente com o centroide plástico da seção mostra-se mais adequada quando se trabalha com seções assimétricas, observando-se menores problemas de convergência em métodos iterativos, quando essa metodologia é empregada dentro de um programa de análise de elementos finitos de barra. As Equações (3.29) e (3.30) mostram as equações para determinação das coordenadas do centroide plástico ( $X_{CP}$ ,  $Y_{CP}$ ) de uma seção poligonal composta por concreto e aço.

$$Y_{CP} = \frac{Y_c A_c \alpha f_{ck} / \gamma_c + Y_s A_s f_{yk} / \gamma_s}{A_c \alpha f_{ck} / \gamma_c + A_s f_{yk} / \gamma_s} \quad (3.29)$$

$$X_{CP} = \frac{X_c A_c \alpha f_{ck} / \gamma_c + X_s A_s f_{yk} / \gamma_s}{A_c \alpha f_{ck} / \gamma_c + A_s f_{yk} / \gamma_s} \quad (3.30)$$

Nas Equações (3.29) e (3.30),  $X_c$ ,  $Y_c$ ,  $X_s$ ,  $Y_s$  são as coordenadas dos centroides do concreto e do aço respectivamente no sistema XYZ;  $A_c$  e  $A_s$  são as áreas de concreto e aço, respectivamente (nesse trabalho o aço corresponde às barras de armadura, no entanto, a consideração de uma seção mista não traz muitas dificuldades);  $f_{ck}$  e  $f_{yk}$  são, respectivamente, resistência característica do concreto e aço das armaduras;  $\gamma_c$  e  $\gamma_s$  são os coeficientes de resistência maiores que a unidade.

Os esforços resistentes são obtidos por integração das tensões normais ao longo da seção transversal, como é mostrado nas Equações (3.31) a (3.33). Nessas equações,  $n$  é o número de barras na seção transversal,  $A_{si}$  é a área dessas  $n$  barras,  $x_{si}$  e  $y_{si}$  são as coordenadas do centro

da barra,  $\sigma_{si}$  é a tensão normal à seção transversal no ponto coincidente com o centro da barra, e  $\sigma_c$  é a tensão normal à seção transversal em um ponto qualquer da seção.

$$N_{Rz} = \iint_A \sigma_c dA + \sum_{i=1}^n A_{si} \sigma_{si} \quad (3.31)$$

$$M_{Rx} = \iint_A \sigma_c y dA + \sum_{i=1}^n A_{si} \sigma_{si} y_{si} \quad (3.32)$$

$$M_{Ry} = \iint_A \sigma_c x dA + \sum_{i=1}^n A_{si} \sigma_{si} x_{si} \quad (3.33)$$

### 3.9.1. Integração

As integrais que aparecem nas equações de cálculo dos esforços resistentes são resolvidas usando o Teorema de Green que transforma integrais de superfícies, ou seja, de área, em integrais de contorno, o que pode ser verificado na Equação (3.34) a seguir. Esse teorema permite obter de forma analítica qualquer integral polinomial em domínio plano fechado, porém, para isso ser possível é necessário que a seção seja descrita por segmentos de retas.

$$\iint_A \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint (P dx + Q dy) = \sum_{i=1}^{n_{seg}} \oint_{P_{i-1}P_i} (P dx + Q dy) \quad (3.34)$$

Na equação (3.34),  $P$  e  $Q$  são funções polinomiais em  $x$  e  $y$ ,  $n_{seg}$  é o número de segmentos da seção poligonal qualquer,  $P_0, P_1, \dots, P_n$  são os vértices da seção poligonal, e  $P_0 P_1$  é o segmento de reta que parte de  $P_0$  e finaliza em  $P_1$ .

No item 3.6 desse trabalho referente aos materiais, foi definido que a curva tensão-deformação dos materiais concreto e aço podem ser representadas, no programa de computador desenvolvido nesse trabalho, por um número qualquer de faixas de deformações onde em cada faixa pode ser definida uma função polinomial de até grau três. Como a seção se deforma mantendo-se plana, logo, a equação da deformação da seção é linear em relação as coordenadas  $(x,y)$  de um ponto qualquer na seção. Sendo assim, os integrandos das equações dos esforços resistentes são dados por funções polinomiais em  $(x,y)$ .

Com a parametrização do segmento poligonal que define a região a ser integrada e manipulando a definição das funções  $P$  e  $Q$ , obtém-se a expressão abaixo para a avaliação das integrais, com  $a$  e  $b$  inteiros.

$$I_{ab} = \iint_A x^a y^b dx dy \quad (3.35)$$

Dado um segmento genérico conforme a Figura 3.11, e fazendo a parametrização do mesmo obtém-se a Equação (3.36).

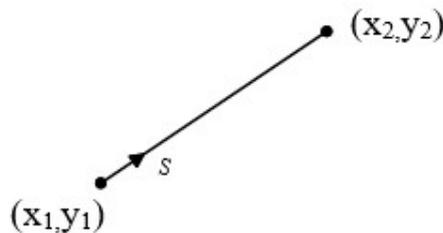


Figura 3.11 – Parametrização do Segmento

$$\begin{aligned} x &= x_1 + S(x_2 - x_1) \\ y &= y_1 + S(y_2 - y_1) \quad \text{com } 0 \leq S \leq 1 \end{aligned} \quad (3.36)$$

Utilizando a Equação (3.35) com os termos  $a$  e  $b$  iguais a zero, obtém-se:

$$I_{00} = \iint_A x^0 y^0 dx dy = \int_0^1 x dy = \int_0^1 [x_1 + S(x_2 - x_1)](y_2 - y_1) ds = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)\Delta y \quad (3.37)$$

Para  $a$  e  $b$  iguais a um e zero respectivamente

$$I_{10} = \iint_A x^1 y^0 dx dy = \int_0^1 \frac{x^2}{2} dy = \int_0^1 \frac{[x_1 + S(x_2 - x_1)]^2}{2} (y_2 - y_1) ds = \Delta y \left( \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_1 \Delta x}{2} + \frac{\Delta x^2}{6} \right) \quad (3.38)$$

As demais expressões que serão necessárias podem ser encontradas no trabalho do Caldas (2004).

# Capítulo 4

## Otimização

Nesse capítulo são apresentados os métodos de otimização utilizados nesse trabalho para o problema de otimização não linear com restrições, esse consiste na busca de uma resposta otimizada do problema de definição da armadura de aço longitudinal de seções transversais poligonais de concreto sujeitas a esforços combinados de flexão e carga axial.

### 4.1. Programação Linear Sequencial

A Equação (4.1) a seguir apresenta o problema geral de otimização com restrições de igualdade e desigualdade. Nessa equação,  $\mathbf{x}$  é o vetor das variáveis de projeto,  $f$  é a função objetivo que se deseja minimizar,  $C$  e  $D$  são funções das variáveis de projeto que definem, respectivamente, as restrições de desigualdade e igualdade do problema analisado.

$$\min_x f(\mathbf{x}) \text{ sujeito a } C_i(\mathbf{x}) \geq 0 \text{ e } D_j(\mathbf{x}) = 0 \quad (4.1)$$

A programação sequencial linear é um método bastante simples que consiste na linearização das funções objetivo e restrições do problema analisado. Essa linearização é feita usando a expansão em série de Taylor das funções objetivo e restrições truncadas no termo de primeira ordem. Ou seja:

$$f(\mathbf{x}_k + \mathbf{d}) \cong f(\mathbf{x}_k) + \nabla^T f_k \mathbf{d}, \quad (4.2)$$

$$C_i(\mathbf{x}_k + \mathbf{d}) \cong C_i(\mathbf{x}_k) + \nabla^T C_{ik} \mathbf{d}, \text{ e} \quad (4.3)$$

$$D_i(\mathbf{x}_k + \mathbf{d}) \cong D_i(\mathbf{x}_k) + \nabla^T D_{ik} \mathbf{d}. \quad (4.4)$$

Nas Equações (4.2) a (4.4),  $\nabla^T f_k$  é um vetor linha com  $n$  termos onde seus termos são dados pelas derivadas parciais de primeira ordem da função objetivo em relação às variáveis de projeto avaliadas no ponto  $\mathbf{x}_k$ . De forma análoga define-se  $\nabla^T C_{ik}$  e  $\nabla^T D_{ik}$ .

Admitindo que se conheça um ponto de partida  $\mathbf{x}_0$  que satisfaça todas as restrições de projeto, o problema mostrado na Equação (4.1) pode ser analisado de forma iterativa através da programação sequencial linear que consiste em determinar a cada iteração o passo  $\mathbf{d}$  que deve ser dado para buscar o ponto de mínimo do problema (4.1). Ou seja, a cada iteração deve-se definir  $\mathbf{d}$  de forma que  $f(\mathbf{x}_{k+1})$  seja menor que  $f(\mathbf{x}_k)$  e  $\mathbf{x}_{k+1}$  satisfaça todas as restrições. Aplicando essas condições nas aproximações lineares das funções objetivo e restrições chega-se ao problema linear da Equação (4.5) para a definição do passo  $\mathbf{d}$ .

$$\min_{\mathbf{d}} \nabla^T \mathbf{f}_k \mathbf{d} \text{ sujeito a } \nabla^T C_{ik} \mathbf{d} \geq -C_i(\mathbf{x}_k) \text{ e } \nabla^T D_{jk} \mathbf{d} = -D_j(\mathbf{x}_k). \quad (4.5)$$

O problema mostrado na Equação (4.5) apresenta funções objetivo e restrições lineares em relação à variável definida pelos termos do vetor  $\mathbf{d}$ . Sendo assim, um algoritmo de otimização para problemas lineares pode ser usado para a determinação do passo  $\mathbf{d}$  na iteração  $k$  do método de programação sequencial linear. Nesse trabalho é utilizado o método Simplex para a solução do problema mostrado na Equação (4.2).

## 4.2. Simplex

O método Simplex é um algoritmo iterativo que busca a solução que minimiza uma determinada função objetivo atendendo a específicas restrições de igualdade e desigualdade. Foi desenvolvido há mais de 65 anos por Dantzig e após a evolução dos computadores tornou-se uma ferramenta poderosa de otimização no campo da economia, administração e engenharia.

Nesse método, as restrições e a função objetivo devem ter relações lineares com as variáveis de projeto, sendo por isso chamado de programação linear. A programação linear é iniciada e analisada na sua forma padrão dada pela Equação (4.6) a seguir. Nessa equação,  $\mathbf{c}$  e  $\mathbf{x}$  são vetores em  $\mathfrak{R}^n$ ,  $\mathbf{b}$  é um vetor em  $\mathfrak{R}^m$  e  $\mathbf{A}$  é uma matriz  $m \times n$ .

$$\min \mathbf{c}^T \mathbf{x} \text{ sujeita a } \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \quad (4.6)$$

Todo problema de otimização linear com restrições de igualdade e desigualdade pode ser facilmente colocado na forma padrão dada pela Equação (4.6). Para detalhes das diferentes técnicas usadas para transformar um problema de programação linear qualquer na sua forma padrão deve-se consultar as referências Vanderplaats (1984), Haftka e Kamat (1985) e Nocedal e Wright (2006).

Se o vetor  $\mathbf{x}$  satisfaz o problema da Equação (4.6) diz-se que ele é um ponto viável. Se  $\mathbf{x}$  é um ponto viável com no máximo  $m$  componentes não nulas e, definindo  $\beta(\mathbf{x})$  como um subconjunto de  $\{1 \ 2 \ \dots \ n\}$  tal que,  $\beta(\mathbf{x})$  contém exatamente  $m$  índices, se  $i \notin \beta(\mathbf{x})$  então  $x_i = 0$ , e a matriz quadrada dada por  $\mathbf{B}_{m \times m} = [\mathbf{A}_i]_{i \in \beta(\mathbf{x})}$  formada por  $m$  colunas da matriz  $\mathbf{A}$  é não singular, então,  $\mathbf{x}$  é um ponto viável básico. O conjunto de pontos viáveis básicos forma um poliedro convexo com suas faces dadas por polígonos. Em problemas de otimização linear o mínimo local é sempre o mínimo global, característica atribuída também aos problemas convexos, já que o problema linear é um problema convexo.

Bazaraa e Shetty (1993) apresentam as condições de otimalidade de primeira ordem de KKT (Karush, Kuhn e Tucker) demonstrando que se um ponto viável  $\mathbf{x}^*$  de um problema de programação linear satisfaz essas condições então o menor valor que a função objetivo pode assumir respeitando todas as restrições é esse ponto. O método Simplex gera em seu processo iterativo uma sequência de pontos viáveis básicos, parando quando um desses pontos satisfizer as condições de otimalidade de primeira ordem de KKT, identificando esse ponto como o ponto de ótimo.

### 4.3. Ponto Viável Básico para o Simplex

No item anterior a esse foi definido o ponto viável básico e dito que o Simplex gera uma sequência desses pontos até encontrar aquele que é o ponto de ótimo do problema linear analisado. No algoritmo do método Simplex baseado na sua formulação descrita no item 4.2 anterior a esse, para mais detalhes ver Nocedal e Wright (2006), necessita de um ponto viável básico para iniciar o seu processo de geração de novos pontos viáveis básicos até achar aquele que é o ponto de ótimo. Conforme a definição de um ponto viável básico, dependendo do problema linear analisado, não é tão simples a determinação de um desses pontos. Nocedal e Wright (2006) apresentam o método descrito a seguir para a determinação de um ponto possível básico para um problema linear escrito na sua forma padrão dada pela Equação (4.6).

Considerando que as restrições do problema em análise sejam linearmente independente, então a matriz  $\mathbf{A}_{m \times n}$  tem posto linha completo (posto de  $\mathbf{A}=m$ ), ou seja, o sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  possui uma matriz ( $m = n$ ) ou infinitas soluções. Se uma restrição puder ser escrita como combinação linear de outras, essa solução pode ser eliminada do problema.

O método Simplex gera uma sequência  $\mathbf{x}^k$  de pontos possíveis básicos, como citado no item 4.2. Dessa forma, o método só faz sentido se o ponto de ótimo do problema em análise for um ponto possível básico. Os pontos possíveis básicos são os vértices dos polígonos que limitam os planos formados pela interseção entre as restrições e a função objetivo, e entre duas ou mais restrições.

No livro Nocedal e Wright (2006) pode-se encontrar algumas comprovações e provas referentes aos pontos possíveis básicos, como por exemplo, a matriz  $\mathbf{A}_{m \times n}$  tem posto linha completo, ou seja, existem  $m$  colunas linearmente independentes na matriz. Sendo assim, todo ponto possível  $\mathbf{x}$  com  $p$  termos não nulos e  $p \leq m$  será um ponto possível básico. Os autores concluem após as demonstrações das provas que sempre que existe uma solução para o problema linear pode-se definir um ponto possível básico solução do problema.

#### 4.4. Forma Padrão para o Problema Analisado

Para poder definir o próximo passo do método da programação sequencial linear resolvendo o problema de otimização dado pela Equação (4.5) usando o método Simplex, deve-se colocar o problema linear da Equação (4.5) na forma padrão da programação linear dada pela Equação (4.6). Dessa forma, chega-se ao problema dado pela Equação (4.7) a seguir:

$$\min_{\mathbf{d}^*} \begin{bmatrix} \nabla^T f_k & -\nabla^T f_k & \mathbf{0}_{1 \times m} \end{bmatrix} \mathbf{d}^*$$

$$\text{sujeito a } \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla^T C \\ \nabla^T D \end{bmatrix}_{m \times n+3} & -\begin{bmatrix} \nabla^T C \\ \nabla^T D \end{bmatrix}_{m \times n+3} & -\begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}_{m \times m} \end{bmatrix} \mathbf{d}^* = \begin{bmatrix} -[C(\mathbf{x}_k)]_{q \times 1} \\ -[\Delta]_{r \times 1} \\ -[D(\mathbf{x}_k)]_{p \times 1} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Na Equação (4.7),  $\mathbf{d}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{d}^{+T} & \mathbf{d}^{-T} & \mathbf{u}^T \end{bmatrix}^T$ , onde  $\mathbf{d}^+$  e  $\mathbf{d}^-$  são dois vetores com  $n+3$  componentes (número de variáveis de projeto),  $\mathbf{u}$  é um vetor com  $m$  componentes (número de restrições de desigualdade).  $\mathbf{I}_{m \times m}$  é uma matriz identidade de ordem  $m$ , e  $\mathbf{0}_{p \times m}$  é uma matriz nula com  $p$  linhas e  $m$  colunas, onde  $p$  é o número de restrições de igualdade.  $q$  representa o número de restrições de desigualdade excluindo aquelas referentes ao tamanho do passo, ou seja,  $q = m - r$ , com  $r = 2n+6$  sendo as restrições de desigualdade referente ao tamanho do passo. Para maiores informações de como chegar nessa forma padrão consultar Vanderplaats (1984), Haftka e Kamat (1985).

Para o problema analisado em questão as variáveis de projetos são dadas pelas  $n$  barras que reforçam a seção de concreto mais os três parâmetros que definem a deformada da seção transversal. O número de restrições de desigualdade e igualdades depende do comportamento das restrições referentes aos momentos resistentes, como discutido no item 3.5 desse trabalho. Dessa forma, existem duas possibilidades, em uma delas o número das restrições de desigualdade é dado por  $4n+14$ , enquanto tem apenas uma restrição de igualdade. Na outra, o número das restrições de desigualdade é dado por  $4n+12$ , e as restrições de igualdade são em três.

As derivadas em relação à função objetivo e as restrições  $C_i(\mathbf{x})$ , com exceção das restrições devido aos esforços resistentes, são obtidas de forma analítica derivando essas expressões em relação às  $n+3$  variáveis de projeto, ou seja,  $x_1 = A_{s1}, \dots, x_n = A_{sn}, x_{n+1} = \varepsilon, x_{n+2} = k_x$  e  $x_{n+3} = k_y$ . Já as derivadas em relação aos esforços solicitantes são obtidas usando o método aproximado das diferenças finitas.

A Equação (4.8) apresenta as derivadas da função objetivo em relação às  $n+3$  variáveis de projeto.

$$\nabla^T f_k = (1 \quad 1 \quad \dots \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0) \quad (4.8)$$

As Equações (4.9) a (4.23) apresentam as derivadas das  $m$  restrições de desigualdade em relação às  $n+3$  variáveis de projeto. No item 3.4 desse trabalho foram definidas as restrições de projeto identificando as variáveis que aparecem nas Equações (4.9) a (4.23).

$$\nabla^T C_1(x) = \left( 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 + \frac{\partial h_1}{\partial \varepsilon} k_x' \quad \frac{\partial k_x'}{\partial k_x} h_1 + \frac{\partial h_1}{\partial k_x} k_x' \quad \frac{\partial k_x'}{\partial k_y} h_1 + \frac{\partial h_1}{\partial k_y} k_x' \right) \quad (4.9)$$

$$\nabla^T C_2(x) = \left( 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 + \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} k_x' \quad \frac{\partial k_x'}{\partial k_x} h_2 + \frac{\partial h_2}{\partial k_x} k_x' \quad \frac{\partial k_x'}{\partial k_y} h_2 + \frac{\partial h_2}{\partial k_y} k_x' \right) \quad (4.10)$$

$$\nabla^T C_3(x) = \left( 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 + \frac{\partial h_3}{\partial \varepsilon} k_x' \quad \frac{\partial k_x'}{\partial k_x} h_3 + \frac{\partial h_3}{\partial k_x} k_x' \quad \frac{\partial k_x'}{\partial k_y} h_3 + \frac{\partial h_3}{\partial k_y} k_x' \right) \quad (4.11)$$

$$\nabla^T C_4(x) = \left( 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 + \frac{\partial h_4}{\partial \varepsilon} k_x' \quad \frac{\partial k_x'}{\partial k_x} h_4 + \frac{\partial h_4}{\partial k_x} k_x' \quad \frac{\partial k_x'}{\partial k_y} h_4 + \frac{\partial h_4}{\partial k_y} k_x' \right) \quad (4.12)$$

$$\nabla^T C_5(x) = \left( 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad -(1 + \frac{\partial h_{b1}}{\partial \varepsilon} k_x') \quad -(\frac{\partial k_x'}{\partial k_x} h_{b1} + \frac{\partial h_{b1}}{\partial k_x} k_x') \quad -(\frac{\partial k_x'}{\partial k_y} h_{b1} + \frac{\partial h_{b1}}{\partial k_y} k_x') \right) \quad (4.13)$$

$$\nabla^T C_6(x) = \left( 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad -(1 + \frac{\partial h_{b2}}{\partial \varepsilon} k_x') \quad -(\frac{\partial k_x'}{\partial k_x} h_{b2} + \frac{\partial h_{b2}}{\partial k_x} k_x') \quad -(\frac{\partial k_x'}{\partial k_y} h_{b2} + \frac{\partial h_{b2}}{\partial k_y} k_x') \right) \quad (4.14)$$

Nas Equações (4.9) a (4.14), as derivadas parciais de  $k'_x$  em relação a  $k_x$  e  $k_y$  são determinadas a partir da relação de  $k'_x$  com  $k_x$  e  $k_y$  como apresentada no item 3.4.1 desse trabalho. Essas

derivadas são apresentadas nas Equações (4.15) e (4.16) onde  $tg\theta = \frac{k_y}{k_x}$ ,  $\frac{\partial\theta}{\partial k_x} = \frac{\sec^2\theta}{k_y}$ , e

$$\frac{\partial\theta}{\partial k_y} = -\frac{k_x \sec^2\theta}{k_y^2}.$$

$$\frac{\partial k'_x}{\partial k_x} = (k_y \cos\theta - k_x \text{sen}\theta) \frac{\partial\theta}{\partial k_x} + \cos\theta \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial k'_x}{\partial k_y} = (k_y \cos\theta - k_x \text{sen}\theta) \frac{\partial\theta}{\partial k_y} + \text{sen}\theta \quad (4.16)$$

$$\nabla^T C_7(\mathbf{x}) = \left( \frac{\partial M_{Rx}}{\partial A_{s1}} \quad \frac{\partial M_{Rx}}{\partial A_{s2}} \quad \dots \quad \frac{\partial M_{Rx}}{\partial A_{sn}} \quad \frac{\partial M_{Rx}}{\partial \varepsilon} \quad \frac{\partial M_{Rx}}{\partial k_x} \quad \frac{\partial M_{Rx}}{\partial k_y} \right) \quad (4.17)$$

$$\nabla^T C_8(\mathbf{x}) = \left( \frac{\partial M_{Ry}}{\partial A_{s1}} \quad \frac{\partial M_{Ry}}{\partial A_{s2}} \quad \dots \quad \frac{\partial M_{Ry}}{\partial A_{sn}} \quad \frac{\partial M_{Ry}}{\partial \varepsilon} \quad \frac{\partial M_{Ry}}{\partial k_x} \quad \frac{\partial M_{Ry}}{\partial k_y} \right) \quad (4.18)$$

Nas Equações (4.17) e (4.18), as derivadas parciais dos esforços resistentes em relação às variáveis de projeto são determinadas usando o método das diferenças finitas mostrado na Equação (4.19). Nessa equação,  $\mathbf{e}_j$  é um vetor com seus termos nulos, exceto o termo na posição  $j$  do vetor que igual à unidade. Quanto menor o valor adotado para  $dx_j$  melhor a aproximação do método da diferença finita, no entanto, valores muito pequenos podem gerar erros devido à precisão da máquina na representação de valores numéricos ( $TOL$ ), sendo recomendável na literatura que se utilize valores maiores ou iguais a raiz quadrada de  $TOL$ .

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} = \lim_{\Delta x_j \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + \Delta x_j \mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x})}{\Delta x_j} \cong \frac{f(\mathbf{x} + dx_j \mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x})}{dx_j} \quad (4.19)$$

$$\nabla^T C_{i+8}(\mathbf{x}) = \left( 0 \quad \dots \quad 0 \quad \underbrace{1}_{i\text{-ésima posição}} \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right) \text{ com } i = 1, \dots, n \quad (4.20)$$

$$\nabla^T C_{i+n+8}(\mathbf{x}) = \left( 0 \quad \dots \quad 0 \quad \underbrace{-1}_{i\text{-ésima posição}} \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right) \text{ com } i = 1, \dots, n \quad (4.21)$$

$$\nabla^T C_{i+2n+8}(\mathbf{d}) = \left( 0 \quad \dots \quad 0 \quad \underbrace{1}_{i\text{-ésima posição}} \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right) \text{ com } i = 1, \dots, n+3 \quad (4.22)$$

$$\nabla^T C_{i+3n+11}(\mathbf{d}) = \left( 0 \quad \dots \quad 0 \quad \underbrace{-1}_{i\text{-ésima posição}} \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right) \text{ com } i = 1, \dots, n+3 \quad (4.23)$$

A Equação (4.24) apresenta a derivada da restrição de igualdade do esforço axial resistente em relação às  $n+3$  variáveis de projeto. As derivadas parciais que aparecem nessa equação são obtidas usando o método da diferença finita dado pela Equação (4.19). Já as Equações (4.25) e (4.26) apresentam as derivadas das restrições referentes aos momentos resistentes quando essas são consideradas restrições de igualdade no problema, ver item 3.4.3 desse trabalho.

$$\nabla^T D_1(\mathbf{x}) = \left( \frac{\partial N_R}{\partial A_{s1}} \quad \frac{\partial N_R}{\partial A_{s2}} \quad \dots \quad \frac{\partial N_R}{\partial A_{sn}} \quad \frac{\partial N_R}{\partial \varepsilon} \quad \frac{\partial N_R}{\partial k_x} \quad \frac{\partial N_R}{\partial k_y} \right) \quad (4.24)$$

$$\nabla^T D_2(\mathbf{x}) = \nabla^T C_7(\mathbf{x}) \quad (4.25)$$

$$\nabla^T D_3(\mathbf{x}) = \nabla^T C_8(\mathbf{x}) \quad (4.26)$$

## 4.5. Ponto de Partida

Como mostrado no item 4.1 desse capítulo, o método de programação sequencial linear busca o ponto de ótimo de um problema não linear através de uma sequência de aproximações lineares da função objetivo e restrições. Ou seja, a cada iteração do método é resolvido um problema de programação linear e um novo ponto é definido reduzindo a função objetivo e mantendo as restrições satisfeitas. Sendo assim, para a utilização desse método é necessário a definição de um ponto de partida que atenda a todas as restrições do problema.

A definição do ponto de partida consiste em admitir valores para as variáveis de projeto de tal forma que as restrições sejam satisfeitas. Como já discutido, as variáveis de projeto são as áreas das  $n$  barras dispostas dentro da seção poligonal qualquer de concreto, mais os três parâmetros que definem a deformada da seção. A seguir é discutido como é definido a quantidade de barras e suas posições dentro da seção para o ponto de partida.

Inserir-se o máximo de barras possíveis em uma camada na linha que define o cobrimento da seção, esse cobrimento é definido pelo usuário e deve respeitar prescrições de norma conforme discutido no item 2.3.1 desse trabalho. A Figura 4.3 ilustra uma seção hipotética com o contorno mais externo possível todo preenchido por barras. A quantidade de barras que é disposta em cada aresta da seção poligonal qualquer é definida admitindo um espaçamento uniforme entre as barras que seja maior ou igual ao espaçamento definido pelo usuário, esse deve respeitar as prescrições de norma citadas no item 2.3.2 desse trabalho. O diâmetro da barra também influenciará nessa quantidade de barras, esse diâmetro é definido pelo usuário e deve ser um dos diâmetros comerciais dado na Tabela 3.2 no item 3.6 desse trabalho. A verificação da

necessidade de utilizar outras camadas de barras na parte mais interior da seção é verificada no procedimento descrito a seguir para definir as variáveis referentes à deformada da seção.

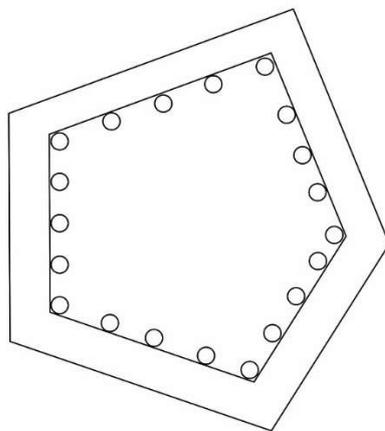


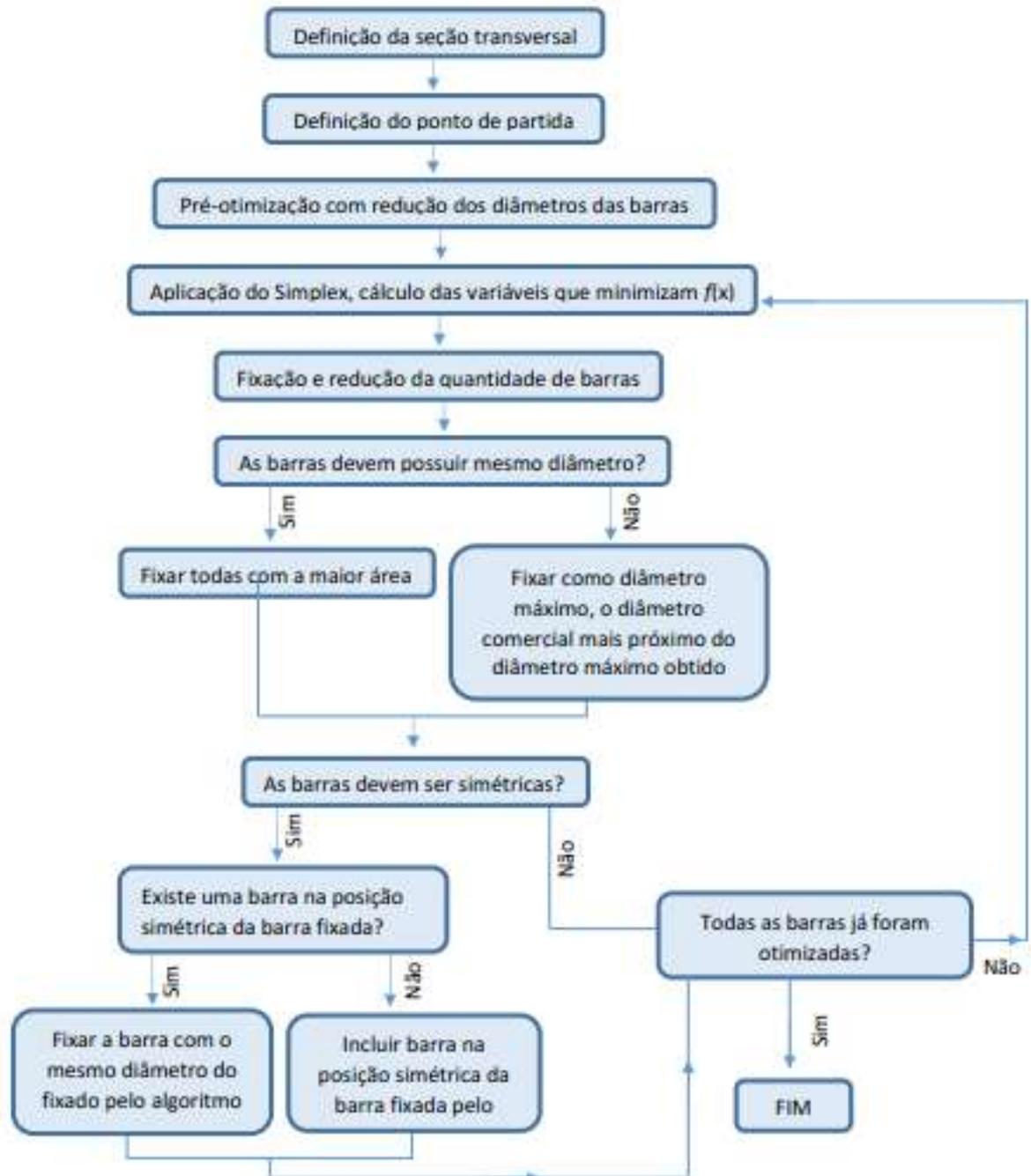
Figura 4.1 – Seção transversal com o máximo de barras possível em uma camada

Foi desenvolvida nesse trabalho uma rotina que calcula a deformada da seção para um determinado esforço solicitante de flexão combinado com carga axial. É passado para essa rotina informações da seção transversal, dos materiais concreto e aço, e ela devolve a deformação axial da seção e as suas rotações em  $x$  e  $y$ , de tal forma que os esforços resistentes sejam iguais aos esforços solicitantes. Essa rotina baseia-se no processo incremental iterativo do método de Newton-Rapson para resolver o problema não linear analisado por ela. Existem duas possibilidades de insucesso dessa rotina, a primeira consiste em não convergência do método incremental iterativo, concluindo que a seção não é capaz de gerar esforços resistentes compatíveis com os solicitantes. Na segunda, o método incremental iterativo converge, mas as deformadas da seção geram deformações máximas de compressão ou tração que violam as restrições de deformações limites, citadas no item 3.4.1 desse trabalho. Para os dois casos de insucesso da rotina deve ser inserida mais uma camada de barras na seção, desde que isso seja possível fisicamente e não exceda a taxa de armadura máxima definida na NBR6118 (2014).

Com a rotina descrita no parágrafo anterior, são definidas as variáveis referentes à deformada da seção que gera, para a seção com a quantidade e distribuição de barras dadas como discutido anteriormente nesse item, esforços resistentes iguais aos esforços solicitantes atendendo aos critérios de deformações limites, ou seja, é assim definido o ponto de partida de análise do método de programação sequencial adotado nesse trabalho.

## 4.6. Fluxograma

A seguir é apresentado o fluxograma do algoritmo desenvolvido, o detalhamento de cada passo pode ser encontrado no item 4.7 onde está descrito o algoritmo.



## 4.7. Algoritmo

A seguir é descrito o algoritmo para definir a quantidade de barras, sua disposição na seção, e os seus diâmetros, de tal forma que seja possível definir um vetor  $\mathbf{x}$  das variáveis de projeto que minimiza a função objetivo  $f(\mathbf{x})$  e satisfaça todas as restrições de projeto conforme definidas nos itens 3.3 e 3.4 do capítulo anterior.

**Passo 1** - Definir a seção transversal, propriedades mecânicas dos materiais, diâmetro da armadura e esforços solicitantes ( $M_x$ ,  $M_y$  e  $N_z$ ). A forma com que esses parâmetros são definidos foi discutida no capítulo 3.

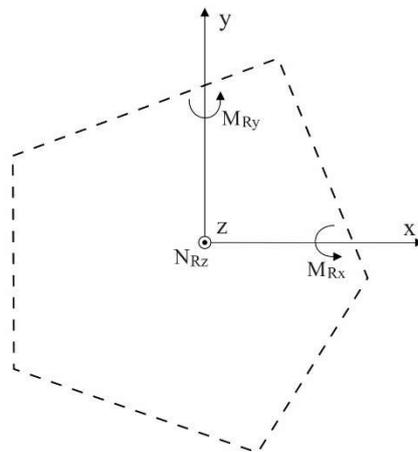


Figura 4.2 – Sistema local de coordenadas

**Passo 2** - Deve-se determinar um ponto de partida que atenda a todas as restrições de projeto. Esse ponto é necessário para iniciar o processo iterativo de busca do ponto de ótimo usando aproximações lineares para as restrições e função objetivo a cada passo. No item anterior a esse é descrito a forma que esse ponto é definido.

**Passo 3** – Para um melhor comportamento do método de programação sequencial linear é feita, antes da aplicação desse método, uma alteração da seção obtida no Passo 2, conforme descrita a seguir.

**Passo 3.1** - Definir  $m$  como o número de barras obtidas no passo 2. Nesse passo todas as barras possuem o mesmo diâmetro definido pelo usuário no arquivo de entrada.

**Passo 3.2** - Calcular as derivadas dos esforços resistentes em relação a cada uma das  $m$  barras. Essas derivadas são calculadas usando o método da diferença finita como descrito no item 4.4 Equação (4.19). Dos valores encontrados para as derivadas de cada esforço em relação a uma barra específica define-se a sua soma  $S_j$  de acordo com a Equação (4.27).

$$S_j = \left| \frac{\partial N_R}{\partial A_{sj}} \right| + \left| \frac{\partial M_{Rx}}{\partial A_{sj}} \right| + \left| \frac{\partial M_{Ry}}{\partial A_{sj}} \right| \text{ para } j = 1, \dots, m \quad (4.27)$$

**Passo 3.3** - Verificar qual das barras possui menor soma das derivadas, ou seja, menor  $S_j$ . Essa barra é a que menos contribui para os esforços resistentes da seção analisada, sendo assim, uma redução do seu diâmetro não gerará grandes alterações nos esforços resistentes e deformada da seção. Ou seja, a soma das derivadas é uma medida da sensibilidade de cada uma das barras, podendo verificar assim qual barras influencia mais na resistência e deformada da seção.

**Passo 3.4** – Reduzir em 25% a área da barra obtida no Passo 3.3.

Foi escolhido esta redução de 25% pois se reduzirmos muito a área das barras, a resistência da seção do ponto anterior comparada ao próximo ponto tende a ser muito diferente. Como o algoritmo sempre adotada a configuração anterior da que viola as deformações limites, Passo 3.6, com uma grande redução da área a tendência é que a configuração final seja mais distante da deformação limite. Por este motivo, foi escolhido esta porcentagem de redução que apesar de ser pequena e necessitar de mais iterações para chegar ao resultado, ela traz resultados melhores do que quando é adotado uma grande redução.

**Passo 3.5** – Para a nova configuração da seção obtida no passo anterior, calcular a deformada da seção que gera esforços resistentes iguais aos esforços solicitantes. Para isso é utilizada a rotina descrita no item 4.5 desse capítulo.

**Passo 3.6** – Com a deformada obtida no passo anterior calcula-se os valores máximos de deformação no concreto e aço e as compara com os valores limites, citados nos itens 3.4.1 e 3.4.2 desse trabalho. Se as deformações calculadas forem menores em valor absoluto do que as suas respectivas deformações limites, voltar ao Passo 3.2 continuando o processo de redução das barras. Caso contrário, adotar a seção anterior a essa analisada, ou seja, antes de alterar esse último diâmetro, e ir para o Passo 4.

**Passo 4** – Aplicar um método iterativo de fixação de determinadas barras e retirada de outras. Como descrito nos passos seguintes, esse método otimiza uma nova seção a cada iteração, sendo essa nova seção obtida com a fixação das barras de maior área e retirada das barras de áreas nulas.

**Passo 4.1** - Definir  $k = m$ . Onde,  $k$  é uma variável inteira que controla a quantidade de barras da seção para cada iteração do Passo 4, e  $m$  é o número de barras obtidas no Passo 2.

**Passo 4.2** - Calcular as variáveis de projeto que minimizam a função objetivo  $f(\mathbf{x})$  respeitando todas as restrições definidas no item 3.4. Nesse passo é aplicado o método da programação sequencial linear em conjunto com o método Simplex para definir novas áreas das barras que minimiza a função objetivo  $f(\mathbf{x})$ . NBR6118 (2014)

**Passo 4.3** – O passo anterior vai alterar as áreas das barras da configuração analisada. Como o diâmetro das barras é limitado pelo diâmetro definido pelo usuário, aquelas barras que contribuem de forma mais significativa para os esforços resistentes da seção tendem a ser amplificadas até o valor limite do diâmetro. Já as barras que contribuem menos, tendem a reduzir o diâmetro até o limite inferior. Logo, nesse passo será fixado as barras que tem diâmetro igual ao diâmetro comercial fornecido pelo usuário, ou muito próximo dele, e retirar as barras que tiveram seu diâmetro zerado, ou muito próximo de zero. A Figura 4.3 ilustra a retirada de umas barras e a fixação de outras.

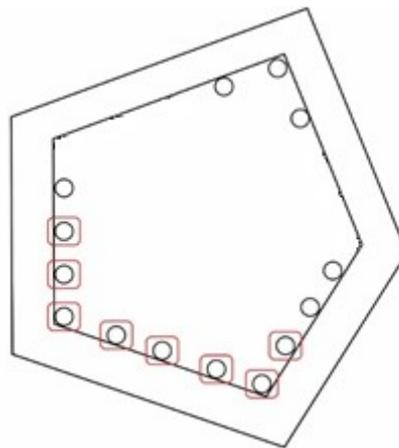


Figura 4.3 – Seção transversal com as barras com diâmetro limite demarcadas e algumas barras retiradas

**Passo 4.4** - No arquivo de entrada o usuário pode escolher se as barras devem ter todas um mesmo diâmetro ou se as mesmas só devem ter um diâmetro máximo, podendo assim variar do maior valor determinado pelo usuário até o menor valor comercial.

Se o usuário escolheu todas barras de mesmo diâmetro, tem-se: das barras que não foram excluídas ou fixadas no Passo 4.3, verificar a que possui maior área e fixá-la para o diâmetro estabelecido pelo usuário. Reduzir  $k$  de acordo com as barras fixadas e retiradas, e seguir para o Passo 4.5.

Se o usuário escolheu barras com diâmetros distintos, tem-se: das barras que não foram excluídas ou fixadas no Passo 4.3, verificar a que possui maior área e fixá-la definindo para ela um diâmetro comercial maior e mais próximo dessa área, que será no máximo o diâmetro

definido pelo usuário. Reduzir  $k$  de acordo com as barras fixadas e retiradas, e seguir para o Passo 4.5.

**Passo 4.5** - No arquivo de entrada o usuário, além de escolher se as barras devem possuir o mesmo diâmetro pode escolher se as mesmas devem ser dispostas de forma simétrica na seção ou não. Se as barras devem ser simétricas vá para o Passo 4.5.1, se não vá para o Passo 4.6.

**Passo 4.5.1** – Este passo verifica se existe uma barra na posição simétrica da barra que foi fixada pelo algoritmo. Se existir a barras na posição simétrica, a mesma deve ser fixada com o mesmo diâmetro da barra fixada pelo algoritmo. Se não existir uma barra, será incluída e fixada uma barra na posição simétrica da barra fixada pelo algoritmo.

**Passo 4.6** - Se  $k > 0$  voltar ao Passo 4.2 com a nova configuração da seção e fixar o restante das armaduras. Caso contrário, ir para o Passo 5.

**Passo 5** - Encerrar o procedimento iterativo com o ponto de ótimo dado pela última configuração de barras. Ou seja, é definida uma quantidade de barras, as suas posições na seção transversal, e os seus diâmetros. Sendo que esses últimos, de acordo com a opção do usuário, podem ser todos do mesmo diâmetro fixado pelo usuário, ou com diâmetros comerciais menores ou iguais a esses.

O algoritmo apresentado trabalha com variáveis discretas, quando se está fixando e retirando barras, definido uma nova quantidade de barras, e quando se está definindo o diâmetro final das barras, esse deve ser definido pelo usuário e também é uma variável discreta. As variáveis contínuas aparecem no passo 4.2, quando são alteradas as áreas da seção transversal das barras e a deformada da seção para minimizar a função objetivo. Vale ressaltar que todas as figuras utilizadas para representar o método são meramente ilustrativas.

## 4.8. Implementação computacional

Para implementação do algoritmo descrito no item anterior e todas as formulações descritas nesse trabalho foi utilizada a linguagem de programação C++ e o software comercial Visual Studio 2015 gerando um programa de computador que, a partir de um arquivo de entrada de dados referentes à seção, materiais, esforços, e prescrições de norma, fornece a quantidade, posicionamento das barras na seção e seus diâmetros de forma a satisfazer todas as restrições de projeto e minimizar a função obtivo dada pela quantidade de aço.

Considerada uma linguagem de nível médio, a linguagem C++ combina características de linguagem de alto e baixo nível, foi desenvolvida por Bjarne Stroustrup em 1983 como um

adicional à linguagem C. Originalmente a linguagem C++ foi nomeada como *C with Classes*, ou seja, o C com a inclusão de *classes*. Objetos de uma mesma *classe* possuem características iguais e possuem relação de *herança* até *herança múltipla*, nas quais novas classes criadas herdam as características das classes existentes, porém, podem conter características únicas.

A representação de cada elemento em termos de um objeto ou classe é uma característica da programação orientada a objetos (POO), metodologia de programação que será usada nesse trabalho. Pode-se dizer que esse tipo de representação fornece um modo intuitivo de ver o processo de programação, isto é, modelar objetos do mundo real, seus atributos e seus comportamentos (Deitel e Deitel, 2001).

# Capítulo 5

## Aplicações

Nesse capítulo são analisados diferentes exemplos de seções transversais de concreto armado sob flexão composta. Algumas dessas seções foram avaliadas por outros autores e terão seus resultados comparados com os obtidos nesse trabalho, outras seções tiveram seus resultados comparados com a solução analítica do problema.

### 5.1. Seção retangular 20x30 sob flexão reta composta

Nesse exemplo será determinada a menor quantidade de aço longitudinal para que a seção retangular da Figura 5.1 consiga resistir a um esforço combinado de uma carga axial de compressão de 120kN e um momento de 20kNm. A carga axial está atuando no centro geométrico da seção e o momento flexionando a barra no plano  $yz$ , ou seja, momento atuando sobre o eixo  $x$ , tracionando a parte inferior da seção retangular. São consideradas para os materiais as curvas tensão-deformação dadas no item 3.6, com  $f_{ck} = 25\text{MPa}$  e aço CA50 ( $f_y = 50\text{kN/cm}^2$ ).

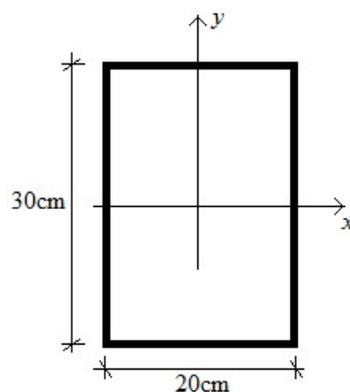


Figura 5.1 – Seção retangular sob flexão reta composta

O exemplo da Figura 5.1 será resolvido utilizando as equações de equilíbrio da seção transversal, Equações (5.1) e (5.2), e utilizando o programa desenvolvido neste trabalho.

### 5.1.1. Resolução através das equações de equilíbrio

As Equações (5.1) e (5.2) representam o equilíbrio de forças e momentos, respectivamente, em uma seção imaginária de um elemento linear de concreto armado sob flexão reta composta. Essas equações foram desenvolvidas considerando armaduras concentradas em um ponto e distribuição constante da tensão normal na região de concreto comprimida. Para que essa última consideração dê resultados satisfatórios, a região comprimida da seção é reduzida em 20%.

$$F_d = 0,68\sigma_c b d \beta_x + A_{s1}\sigma_{s1} + A_{s2}\sigma_{s2} \quad (5.1)$$

$$M_d = 0,68\sigma_c b d^2 \beta_x (1 - 0,4\beta_x) + A_{s1}\sigma_{s1} (d - d') - (d - h/2) F_d \quad (5.2)$$

Nas equações (5.1) e (5.2),  $F_d$  é o esforço axial atuando no centro geométrico da seção retangular e deve ser considerado positivo quando for de compressão.  $A_{s1}$  é a armadura no lado comprimido por  $M_d$  e  $A_{s2}$  é a armadura no lado tracionado.  $\sigma_c$  é a tensão na fibra mais comprimida do concreto.  $\sigma_{s1}$  é a tensão no aço no lado comprimido por  $M_d$  e  $\sigma_{s2}$  é a tensão no aço no lado tracionado.  $d$  é altura útil da seção, ou seja, a distância do centroide da distribuição da armadura  $A_{s2}$  até a fibra mais comprimida da seção. Nesse exemplo, foi considerada armadura de 10mm distribuída apenas em uma camada com cobrimento de 3cm de concreto, logo  $d = h - 3,5$ cm.  $d'$  é a distância do centroide da distribuição da armadura  $A_{s1}$  até a fibra mais comprimida da seção.  $b$  e  $h$  são, respectivamente, a largura e altura da seção.  $\beta_x$  é a profundidade da linha neutra, distância da deformação nula até a fibra mais comprimida, dividida pela altura útil.

Buscando uma solução otimizada em termo da quantidade de aço, será verificada a possibilidade de dimensionamento da seção considerando armadura apenas na região tracionada por  $M_d$ , ou seja, será tomado  $A_{s1}$  nulo.

Verificando o dimensionamento nos domínios 2b, 3 ou 4 (NBR 6118, 2014) e adotando  $A_{s1} = 0$ , tem-se como incógnitas  $A_{s2}$  e  $\beta_x$ . Nos domínios em análise tem-se que  $\varepsilon_c > 0,2\%$ , e, portanto,  $\sigma_c = f_{cd}$ . Substituindo esses valores na Equação (5.2) e sendo,  $M_d = 20kNm$ ,  $d = 26,5cm$ ,  $h = 0,3cm$ ,  $b = 0,2cm$  e  $f_{cd} = 25MPa/1,4$ , obtém-se  $\beta_x = 0,2170$  que pertence ao domínio 2b [0,1667; 0,2593], como considerado de início.

Sabe-se que para o domínio 2 tem-se  $\varepsilon_s = 1\%$  e, portanto,  $\sigma_{s2} = -f_{yd}$  (o sinal negativo deve-se ao fato desse esforço normal ser de tração). Substituindo na Equação (5.1) obtém-se uma área de aço  $A_{s2} = 0,45\text{cm}^2$ .

### 5.1.2. Resolução através do programa desenvolvido

O algoritmo implementado nesse trabalho para análise de seções poligonais de concreto armado sujeito a flexão composta, começa-se inserindo uma quantidade de armadura no contorno da seção respeitando o cobrimento da armadura em relação ao contorno externo e o espaçamento entre as barras, esses dados são definidos pelo usuário juntamente com o diâmetro da barra. Nesse exemplo foi considerado cobrimento e espaçamento de 3,0cm e barras de 10mm. Sendo assim, a seção será composta inicialmente por 16 barras de 10mm como mostra a Figura 5.2. A Tabela 5.1 a seguir mostra as coordenadas dessas barras considerando o centro geométrico da seção coincidente com a origem do sistema de referência adotado.

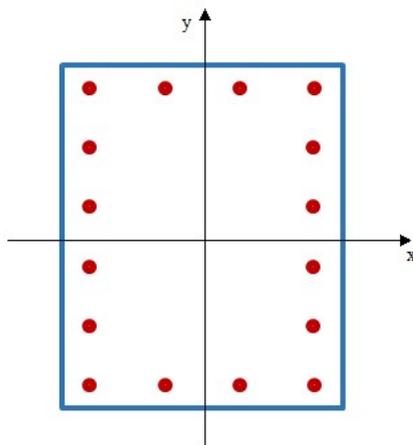


Figura 5.2 – Configuração da seção inicial

O próximo passo do algoritmo consiste em determinar uma deformada para a seção de tal forma que as restrições do problema sejam satisfeitas. Caso isso não seja possível deve-se inserir mais uma camada de barras na seção e o processo deve ser repetido. Esse processo é feito conforme o Passo 2 do algoritmo apresentado no item 4.6 desse trabalho, chegando aos valores de  $\varepsilon = 1,26 \times 10^{-7}$ ,  $k_x = -3,90 \times 10^{-3}$  e  $k_y = 0$  para a deformada da seção que gera, para a seção da Figura 5.1, esforços resistentes iguais aos solicitantes.

Tabela 5.1 – Coordenadas das barras

	<b>b1</b>	<b>b2</b>	<b>b3</b>	<b>b4</b>	<b>b5</b>	<b>b6</b>	<b>b7</b>	<b>b8</b>
$x$ (mm)	-22	22	65	65	65	65	65	65
$y$ (mm)	-115	-115	-115	-69	-23	23	69	115
	<b>b9</b>	<b>b10</b>	<b>b11</b>	<b>b12</b>	<b>b13</b>	<b>b14</b>	<b>b15</b>	<b>b16</b>
$x$ (mm)	22	-22	-65	-65	-65	-65	-65	-65
$y$ (mm)	115	115	115	69	23	-23	-69	-115

Após a definição do ponto de partida  $x_0$  são feitas alterações nos diâmetros das barras, aproximando a seção do ponto de ótimo do problema seguindo as linhas de raciocínio descritas no Passo 3 do algoritmo apresentado no item 4.6 desse trabalho. Essa aproximação ocorre até uma das restrições de deformações limites estar bem próxima de ser violada, depois disso é utilizado o método da programação sequencial linear em conjunto com o método Simplex até a definição do ponto de ótimo, como descrito no Passo 4.3 do algoritmo apresentado no item 4.6. Na Tabela 5.2 a seguir é mostrada a variação da área de cada barra ao longo do processo iterativo descrito nesse parágrafo.

Tabela 5.2 – Variação das áreas da barra durante processo iterativo

Iterações	<b>b1</b>	<b>b2</b>	<b>b3</b>	<b>b4</b>	<b>b5</b>	<b>b6</b>	<b>b7</b>	<b>b8</b>
1	0.785	0.785	0.785	0.785	0.785	0.785	0.785	0.785
7	0.785	0.785	0.785	0.785	0.157	0.157	0.785	0.785
14	0.785	0.785	0.785	0.471	0.157	0.000	0.471	0.785
21	0.628	0.785	0.785	0.471	0.000	0.000	0.314	0.628
28	0.628	0.628	0.628	0.314	0.000	0.000	0.314	0.471
35	0.471	0.471	0.471	0.157	0.000	0.000	0.157	0.314
42	0.314	0.314	0.314	0.157	0.000	0.000	0.000	0.157
49	0.157	0.157	0.157	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
56	0.000	0.137	0.169	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
63	0.000	0.167	0.147	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
70	0.000	0.127	0.171	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
77	0.000	0.137	0.163	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Iterações	b9	b10	b11	b12	b13	b14	b15	b16
1	0.785	0.785	0.785	0.785	0.785	0.785	0.785	0.785
7	0.785	0.785	0.785	0.785	0.157	0.314	0.785	0.785
14	0.785	0.785	0.785	0.471	0.157	0.157	0.471	0.785
21	0.628	0.628	0.628	0.314	0.000	0.000	0.471	0.785
28	0.471	0.471	0.471	0.157	0.000	0.000	0.314	0.628
35	0.314	0.314	0.314	0.157	0.000	0.000	0.314	0.471
42	0.157	0.157	0.157	0.000	0.000	0.000	0.157	0.471
49	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.157	0.157
56	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.166
63	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.156
70	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.172
77	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.168

As áreas das barras mostrada na Tabela 5.2 são dadas em  $\text{cm}^2$ . Como as 16 barras tem inicialmente diâmetro de 10mm, essas áreas iniciam com valor de  $0,785\text{cm}^2$  para todas as barras e, após 77 iterações somente as barras b2, b3 e b16 tem área não nula. Essas barras são dispostas no lado inferior da seção retangular, como pode ser comprovado da Tabela 5.1 e Figura 5.2.

A Figura 5.3 a seguir mostra a redução da função objetivo durante o processo iterativo. O eixo vertical dessa figura nos dá a área de aço em  $\text{cm}^2$  após um determinado número de iterações. O valor final da soma das áreas de aço das três barras obtido pelo processo iterativo apresentado nesse trabalho é de  $0,46\text{cm}^2$ .

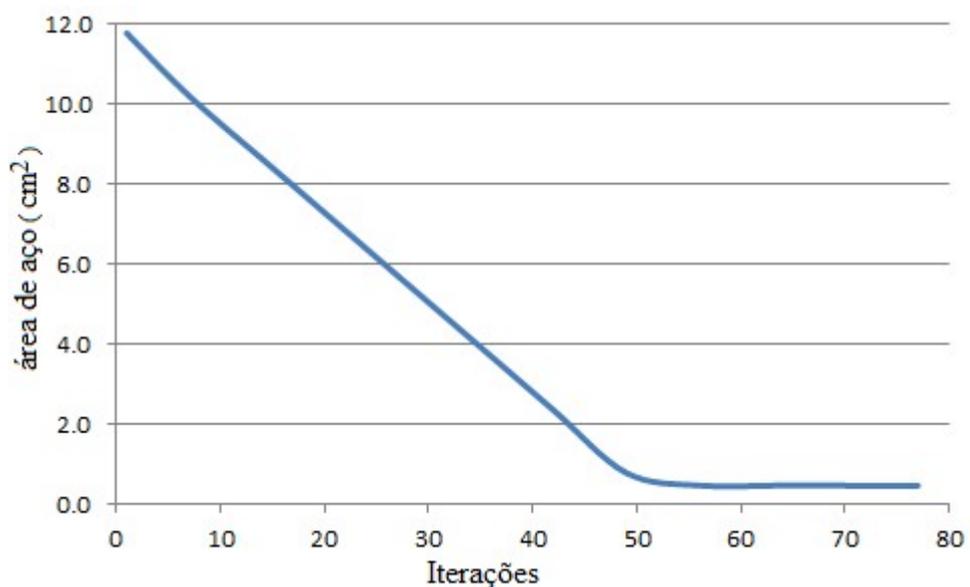


Figura 5.3 – Variação da área total das barras no processo iterativo

A Figura 5.4 a seguir mostra a variação das restrições referentes às deformações limites na fibra mais comprimida e na barra mais tracionada durante o processo iterativo. Por questão de

ilustração no gráfico as deformações de compressão na fibra mais comprimida foram tomadas com seus valores absolutos. Observa-se da figura que as deformações para o ponto de partida eram bem menores que a deformação limite para o aço (1%) e concreto (0,35%). Durante o processo iterativo as áreas de aço vão reduzindo, a deformada da seção vai aumentando, e as restrições, por força do método implementado, são todas atendidas, no entanto a folga que as restrições de desigualdade tinham no início vão diminuindo com o avanço nas iterações, como pode ser evidenciado na Figura 5.4.

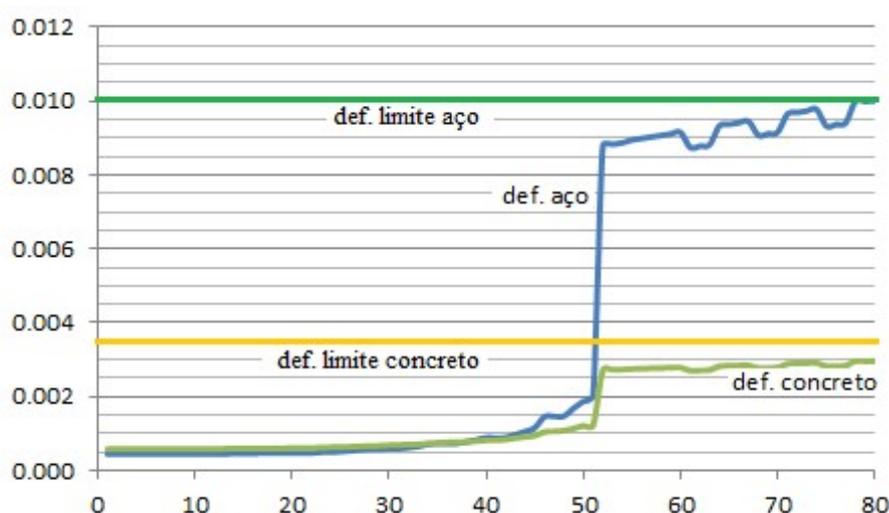


Figura 5.4 – Variação das restrições referentes à deformação no processo iterativo

Como pode ser observada nessa aplicação, a resposta obtida usando as equações de equilíbrio e o programa implementado nesse trabalho são praticamente coincidentes, para a resolução com a equação de equilíbrio obteve-se uma área de aço de  $0,45\text{cm}^2$ , enquanto para a resolução através do programa desenvolvido foi de  $0,46\text{cm}^2$ . Esta pequena diferença deve-se ao fato de que no programa implementado a variação da tensão normal na seção transversal é representada conforme diagrama tensão deformação do concreto definido pela NBR6118 (2104), enquanto que nas equações de equilíbrio essa variação é considerada constante reduzindo a área comprimida em 20%.

## 5.2. Seção retangular 30x60 sob flexão oblíqua composta

O problema proposto nesse exemplo é uma seção retangular de 30 por 60cm sob a ação de um esforço normal solicitante  $N_d = 1550\text{kN}$  aplicado de forma excêntrica em relação ao centro geométrico da seção, sendo essas excentricidades dadas por  $e_x = 7,5\text{cm}$  e  $e_y = 20\text{cm}$ . Sendo assim, a seção está sob ação de flexão oblíqua composta onde os momentos solicitantes são dados por  $M_{xd} = 310\text{kNm}$  e  $M_{yd} = 116,25\text{kN}$ . A distância considerada do centro das armaduras

até a face é de 3cm. Essas armaduras são consideradas de aço do tipo CA50 e a resistência à compressão característica do concreto ( $f_{ck}$ ) é dada por 20MPa.

Esse exemplo foi analisado por Carvalho e Pinheiro (2009), onde os autores, de acordo com sua experiência, propuseram a geometria da seção e para essa definiram a área de aço usando ábacos de dimensionamento de seção retangular de concreto armado sob flexão oblíqua composta, considerando uma determinada configuração da armadura. Segundo Sias (2014) essa situação, de determinar a área da seção pela experiência, é muito comum na prática. Os projetistas definem a geometria da seção pela experiência e com o auxílio de algum software de dimensionamento estrutural definem a área de aço necessária para o dado carregamento da estrutura.

A seção mínima foi encontrada por Carvalho e Pinheiro (2009) através de tentativas usando diferentes combinações para a armadura e realizando a verificação por meio de ábacos de dimensionamento de seção retangular de concreto armado sob flexão oblíqua composta. Os autores pararam a verificação para a configuração mostrada na figura dada a seguir, para a qual encontraram uma área de aço de  $39,6\text{cm}^2$  necessária para resistir aos esforços solicitantes, sugerindo a escolha de 8 barras de 25mm o que fornece uma área de aço de  $39,3\text{cm}^2$ , bem próximo do valor necessário. A Figura 5.5 mostra essa configuração final.

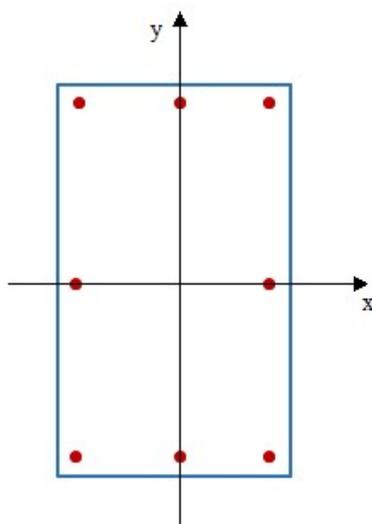


Figura 5.5 – Seção transversal com as barras com diâmetro limite demarcadas

A seção mínima encontrada por Sias (2014) através de algoritmos de otimização que ele implementou com o auxílio do software MathLab e seus pacotes de otimização utilizando métodos de programação matemática, foi com uma área de aço de  $40,3\text{cm}^2$ , apenas 1% maior

que a área obtida por Carvalho e Pinheiro (2009). Sendo assim, ele sugeriu a mesma configuração de Carvalho e Pinheiro (2009).

Usando o algoritmo implementado neste trabalho, foram feitas quatro análises diferentes. Na primeira, foi considerado que os diâmetros das barras deveriam ter um limite máximo de 25mm e que as mesmas deveriam ser simétricas em relação aos eixos  $x$  e  $y$ . A seção otimizada obtida com as configurações supracitadas é composta por 10 barras sendo, 4 barras de 25mm e 6 barras de 20mm, totalizando uma área de aço de  $38,48\text{cm}^2$ , esta seção está representada na Figura 5.6-b.

Para a definição da seção inicial que atenda as restrições de projeto foi considerada que todas as barras tenham um diâmetro inicial de 25mm e devem estar espaçadas de no mínimo 3cm. Dessa forma, o algoritmo gera uma seção inicial composta por 26 barras de 25mm conforme é mostrado na Figura 5.6-a.

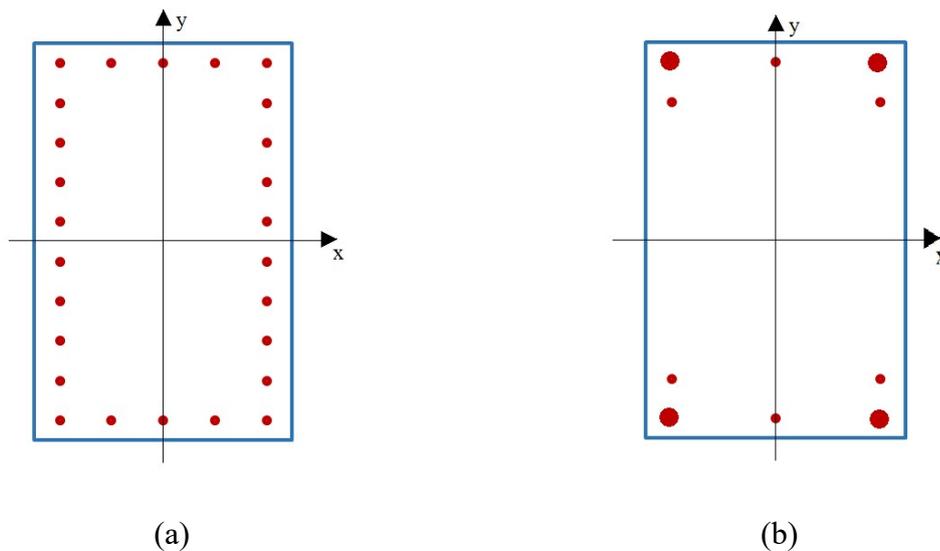


Figura 5.6 – (a)Seção inicial e (b)Seção obtida na primeira análise

Para se ter a simetria da disposição das barras foi adotada a forma simplista dada a seguir. No processo de fixação das barras mostrado no Passo 4 do algoritmo dado no item 4.6 desse trabalho, sempre que for fixar uma barra em uma determinada posição, verifica-se se existe uma barra na posição simétrica desejada, caso exista essa barra também é fixada com o mesmo diâmetro da barra fixada de acordo com o algoritmo. Caso não exista, essa barra será criada e fixada na posição simétrica desejada. Esse método é simplista já que a forma mais precisa de se ter essa simetria seria dispor uma seção inicialmente simétrica e associar as barras simétricas considerando-as com uma variável única. Essa técnica é proposta nos trabalhos futuros.

Já na segunda análise, foi considerado diâmetros fixos de 25 mm para as barras e que as mesmas deveriam ser dispostas de forma simétrica em relação aos eixos  $x$  e  $y$ . A seção otimizada obtida nesse caso é composta por 8 barras de 25mm, conforme mostra a Figura 5.7 a seguir, totalizando uma área de aço de  $39,27\text{cm}^2$ . A seção inicial para esse caso é igual à seção inicial para a primeira análise.

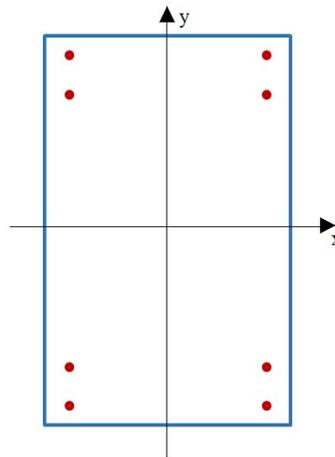


Figura5.7 – Seção obtida na segunda análise

Na terceira análise, foi considerado que os diâmetros das barras deveriam ter um limite máximo de 25mm, sendo que as barras podem ser dispostas sem considerar a simetria em relação aos eixos  $x$  e  $y$ . A seção otimizada obtida com as configurações dessa terceira análise é composta por 7 barras, sendo: 1 barra de 25mm, 2 barras de 22mm, 1 barras de 16mm, 2 barras de 12,5mm e 1 barra de 8mm, totalizando uma área de aço de  $17,48\text{cm}^2$ , como é mostrado na Figura 5.8. A seção inicial para esse caso é igual à seção inicial para a primeira análise.

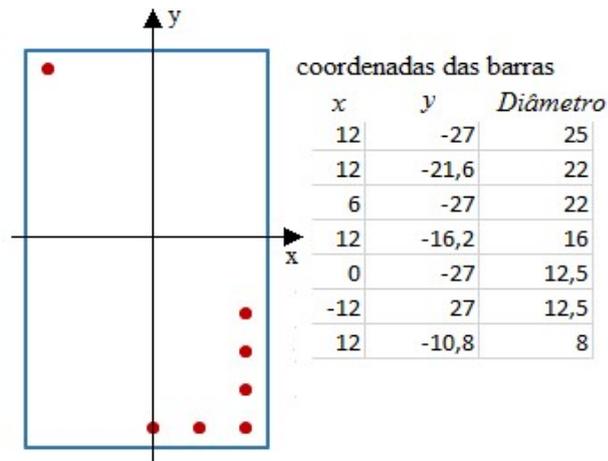


Figura 5.8 – Seção obtida na terceira análise

Na quarta e última análise, foi considerado diâmetros das barras fixos de 16mm, sendo que as barras podem ser dispostas sem considerar a simetria em relação aos eixos  $x$  e  $y$ . A seção otimizada obtida com as configurações dessa análise é composta por 12 barras de 16mm, como mostra a Figura 5.9, totalizando uma área de aço de 24,13 cm<sup>2</sup>.

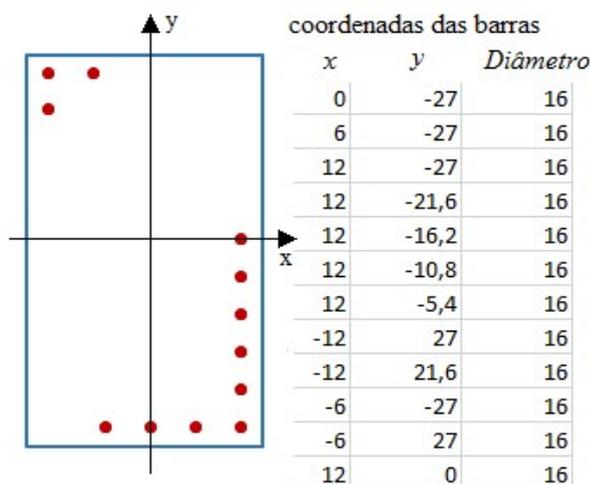


Figura 5.9 – Seção obtida na quarta análise

Resumo das análises:

Carvalho e Pinheiro(2009) – 39,6cm<sup>2</sup>

Sias(2014) – 40,3cm<sup>2</sup>

Primeira Análise – 38,48cm<sup>2</sup>

Segunda Análise – 39,27cm<sup>2</sup>

Terceira Análise – 17,48cm<sup>2</sup>

Quarta Análise – 24,13cm<sup>2</sup>

### 5.3. Seção retangular 30x70 sob flexão oblíqua composta

O problema proposto nesse exemplo é uma seção retangular de 30 por 70cm submetida a um esforço normal solicitante de  $N_d = 1400\text{kN}$  aplicado de forma excêntrica em relação ao centro geométrico da seção, com as excentricidades dadas por  $e_x = 6\text{cm}$  e  $e_y = 28\text{cm}$ . Logo, a seção está sob flexão oblíqua composta sendo os momentos dados por  $M_{xd} = 392\text{kNm}$  e  $M_{yd} = 84\text{kNm}$ . A distância considerada do centro das armaduras até a face é de 3cm. O aço utilizado foi o CA50 e o concreto possui um  $f_{ck}$  de 15Mpa. Esse exemplo foi analisado por Fusco (1995) e também por Sias (2014).

A seção mínima foi encontrada por Fusco (1995) através de tentativas usando diferentes combinações para a armadura e realizando a verificação por meio de ábacos de dimensionamento de seção retangular de concreto armado sob flexão oblíqua composta. O autor encontrou para a configuração mostrada na Figura 5.10 uma área de aço de  $38,74\text{cm}^2$  necessária para resistir aos esforços solicitantes. No entanto, para a configuração usada pelo autor, mostrada na Figura 5.10, seria necessárias 4 barras de diâmetro de 35mm, o que não é um diâmetro comercial.

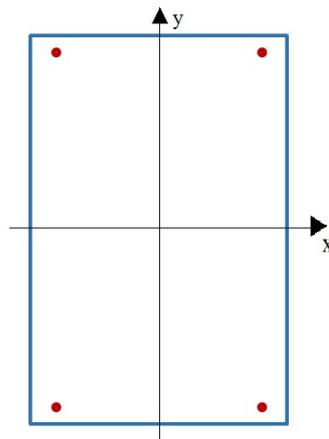


Figura 5.10 – Seção encontrada por Fusco(1995)

A seção mínima encontrada por Sias (2014) através de algoritmos de otimização que ele implementou com o auxílio do software MathLab e seus pacotes de otimização utilizando métodos de programação matemática. O autor encontrou uma área de aço de  $38,45\text{cm}^2$  para a configuração da seção mostrada na Figura 5.11. Nesse caso seriam necessárias 12 barras de 20,2mm, diâmetro muito próximo do diâmetro comercial de 20mm.

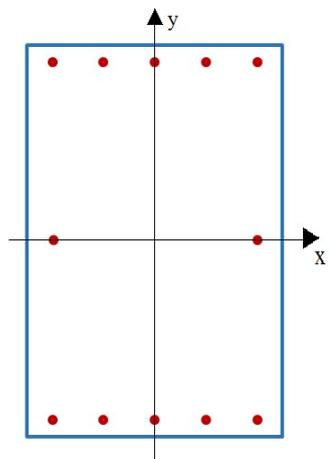
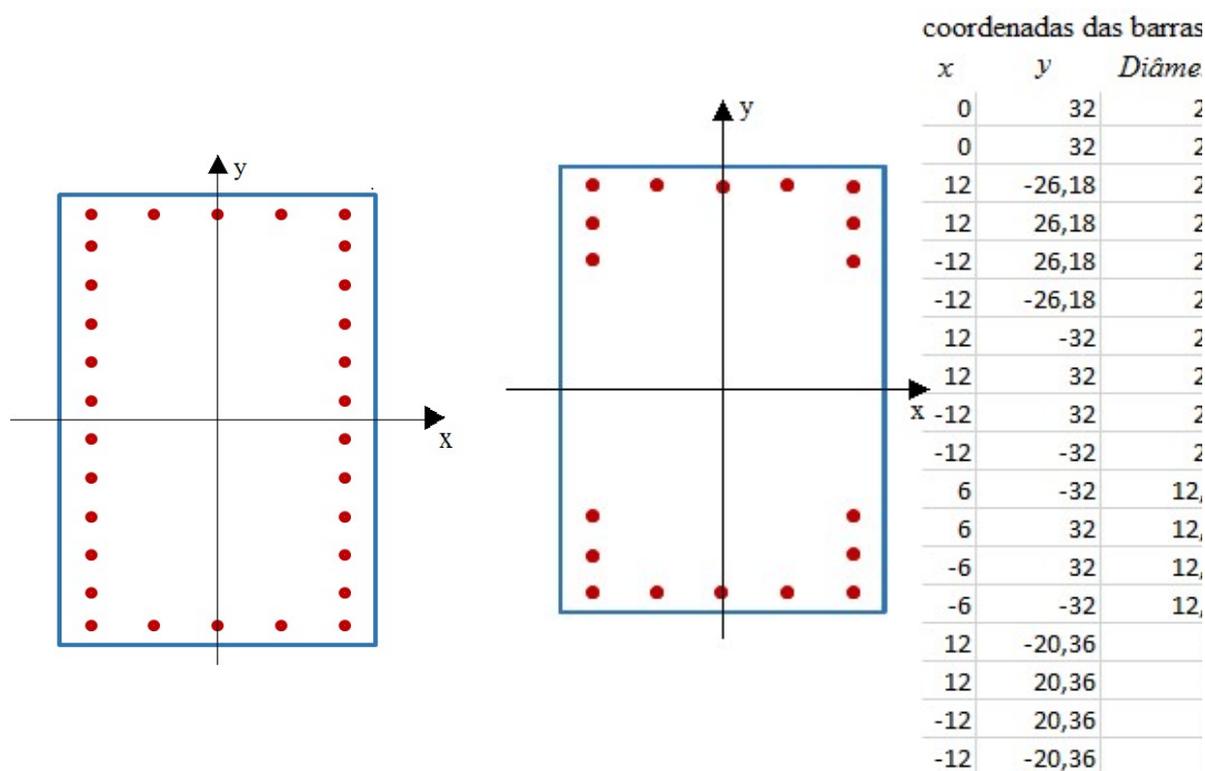


Figura 5.11 – Seção encontrada por Sias(2014)

Usando o algoritmo implementado nesse trabalho, foram feitas duas análises diferentes. Na primeira análise foi considerada a utilização de barras com diâmetro comercial de 20mm ou inferior, sendo que as barras devem ser dispostas de forma simétrica em relação aos eixos  $x$  e  $y$ . A seção obtida é composta por 18 barras, sendo 10 de 20mm, 4 de 12,5mm e 4 barras de 5mm, totalizando uma área de aço de  $37,11\text{cm}^2$ , como mostra a Figura 5.12-b.

Para a definição da seção inicial que atenda as restrições de projeto foi considerada que todas as barras tenham um diâmetro inicial de 25mm e devem estar espaçadas de no mínimo 3cm. Dessa forma, o algoritmo gera uma seção inicial composta por 26 barras de 25mm conforme é mostrado na Figura 5.12-a.



(a) Seção inicial e (b) Seção obtida na primeira análise

Na segunda e última análise foi considerada a utilização de barras com diâmetro comercial de 20mm ou inferior, dispostas de forma qualquer dentro da seção, ou seja, sem considerar a simetria em relação aos eixos. A seção obtida é composta por 5 barras de 20mm e 1 de 16mm como mostrada na Figura 5.13 totalizando uma área de aço de  $17,72\text{cm}^2$ . A seção inicial para esse caso é igual à seção inicial para a primeira análise.

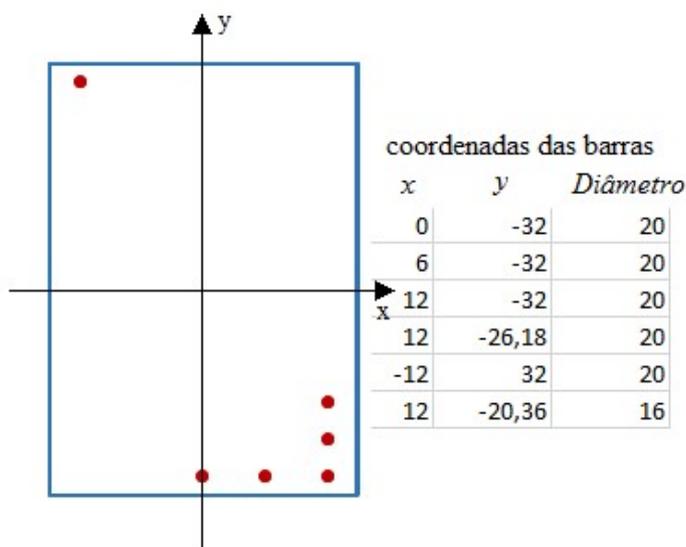


Figura 5.13 – Seção para a segunda análise

Resumo das análises:

Fusco(1995) – 38,74cm<sup>2</sup>

Sias(2014) – 38,45cm<sup>2</sup>

Primeira Análise – 37,11cm<sup>2</sup>

Segunda Análise – 17,72cm<sup>2</sup>

#### 5.4. Seção retangular 40x60 sob flexão oblíqua composta

Bastos (2004) faz uma comparação do dimensionamento tradicional para seções retangulares de concreto armado sob ação de flexão oblíqua composta, ou seja, utilizando os ábacos de iteração, e o dimensionamento usando um algoritmo de otimização, o qual tem sua formulação baseada no método do algoritmo genético. O autor analisou a seção para quatro diferentes casos de carregamento como mostra a Tabela 5.3 a seguir. Nesse trabalho é analisado apenas o Ponto B mostrado na Tabela 5.3.

Tabela 5.3 – Quatro diferentes casos de carregamento

	N <sub>d</sub> (kN)	M <sub>xd</sub> (kN.m)	M <sub>yd</sub> (kN.m)
Ponto A	855	695	255
Ponto B	855	490	230
Ponto C	2570	385	205
Ponto D	4285	235	85

O problema proposto é uma seção retangular de 40 por 60cm sujeita a um esforço normal solicitante  $N_d = 855\text{kN}$  e momentos solicitantes  $M_{xd} = 490\text{kNm}$  e  $M_{yd} = 230\text{kNm}$ , como é mostrado no Ponto B da tabela 5.3. A distância considerada do centro das armaduras até a face é de 2,5cm. Os materiais concreto e aço apresentam curva tensão deformação como apresentadas no item 3.6 desse trabalho, sendo a tensão de escoamento do aço ( $f_y$ ) de 420MPa e a tensão de resistência característica à compressão do concreto ( $f_{ck}$ ) dada por 25MPa.

A definição da quantidade de aço necessária utilizando os ábacos de dimensionamento de seção retangular de concreto armado sob flexão oblíqua composta foi feita utilizando os seguintes parâmetros:  $\nu = 0,2$ ,  $\mu_a = 0,19$ ,  $\mu_b = 0,13$  e  $\omega = 0,6$ . Entrando, com esses parâmetros no ábaco da Figura 5.14, obtêm-se a taxa de armadura de 3,2% que deve ser distribuída de forma uniforme ao longo do perímetro interno da seção como mostrado na Figura 5.14, chegando assim, ao resultado de 16 barras de 25mm distribuídas no contorno da seção, totalizando em uma área de aço de  $78,54\text{cm}^2$ . A Figura 5.15-b mostra a seção obtida através do ábaco.

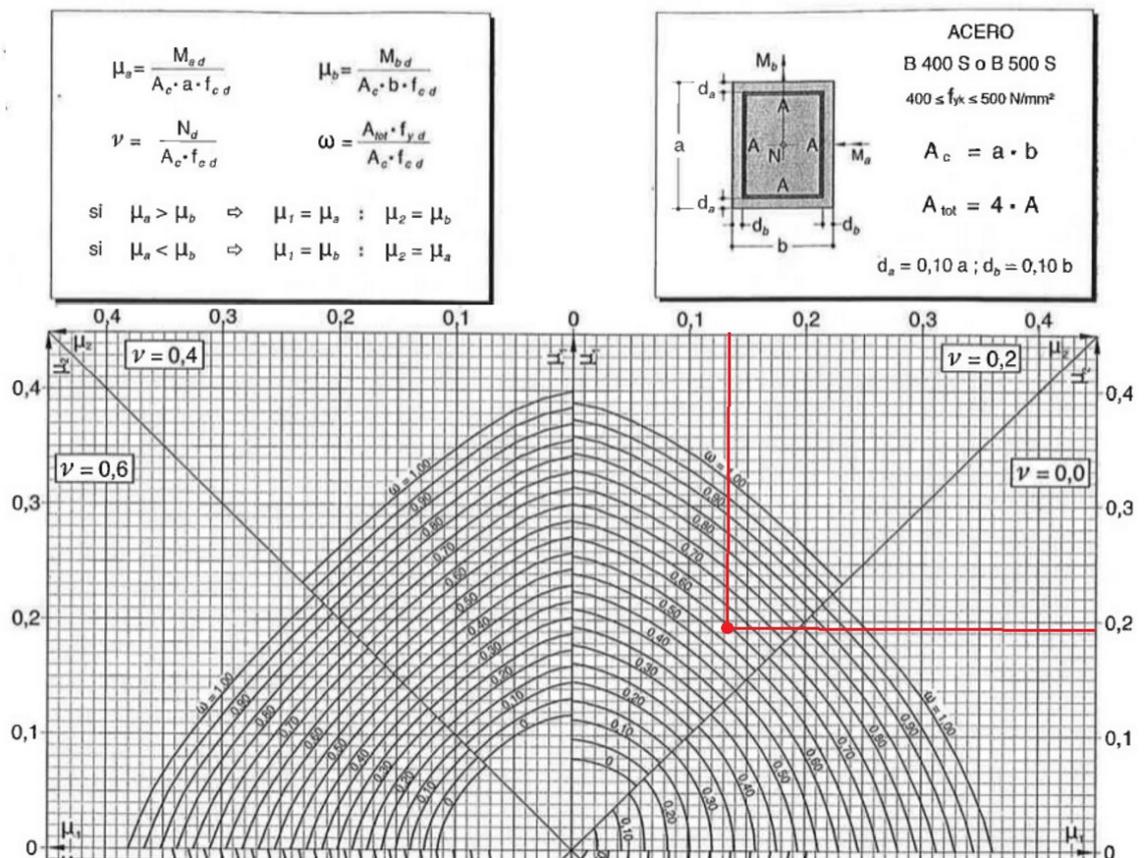


Figura 5.14– Ábaco de dimensionamento à flexão oblíqua

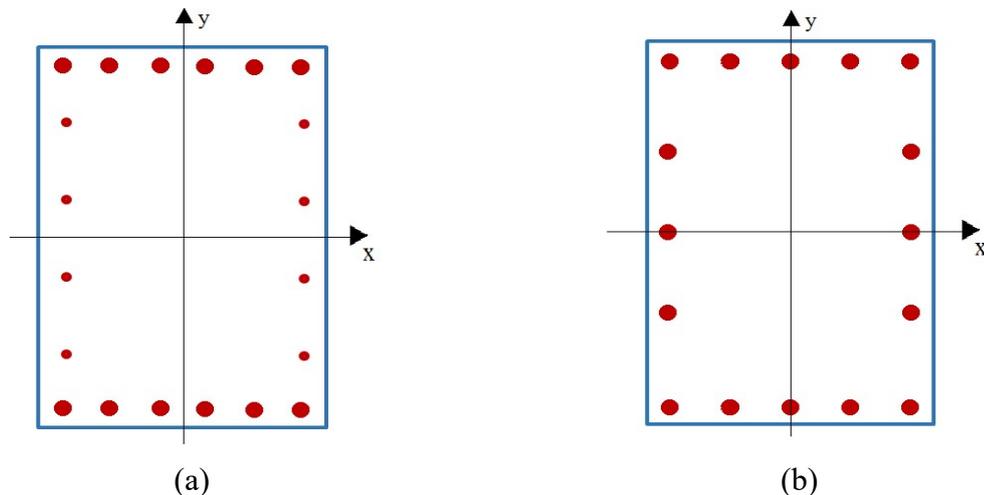
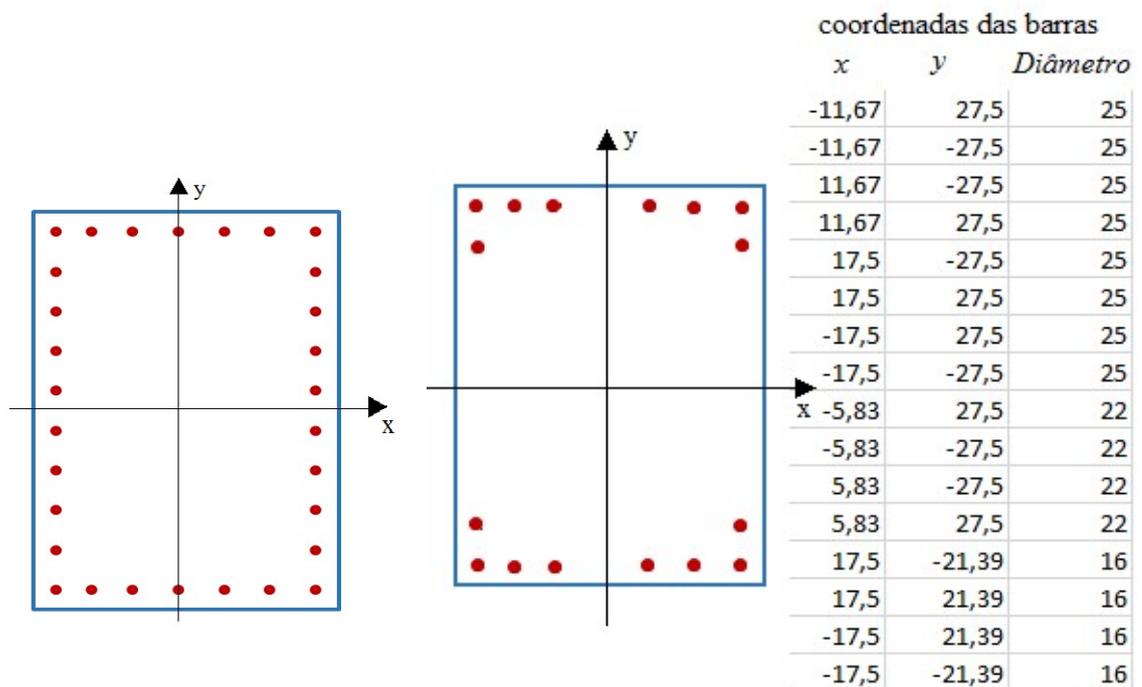


Figura 5.15– (a) Seção obtida por Bastos(2004) e (b) Seção obtida através do ábaco

A seção ótima obtida por Bastos (2004) usando um algoritmo genético é composta por 12 barras de 25mm e 8 barras de 10mm como mostrada na Figura 5.15-a totalizando uma área de aço de  $65,19\text{cm}^2$ .

Usando o algoritmo implementado nesse trabalho, foram feitas duas análises diferentes. Na primeira análise foi considerada a utilização de barras com diâmetro comercial de 25mm ou inferior, sendo que as barras devem ser dispostas de forma simétrica em relação aos eixos  $x$  e  $y$ . A seção obtida é composta por 16 barras, sendo 8 de 25mm, 4 de 22mm e 4 barras de 16mm, totalizando uma área de aço de  $62,52\text{cm}^2$ , como mostra a Figura 5.16-b.

Para a definição da seção inicial que atenda as restrições de projeto foi considerada que todas as barras tenham um diâmetro inicial de 25mm e devem estar espaçadas de no mínimo 3cm. Dessa forma, o algoritmo gera uma seção inicial composta por 30 barras de 25mm conforme é mostrado na Figura 5.16-a.



(a) (b)  
 Figura 5.16 – (a) Seção inicial e (b) Seção obtida na primeira análise

Na segunda e última análise foi considerada a utilização de barras com diâmetro comercial de 25mm ou inferior, dispostas de forma qualquer dentro da seção. A seção obtida é composta por 11 barras sendo, 4 de 25mm, 1 de 22mm, 2 de 20mm, 2 de 16mm, 1 de 12,5mm e 1 de 5mm, como mostrada na Figura 5.17, totalizando uma área de aço de 35,16cm<sup>2</sup>.

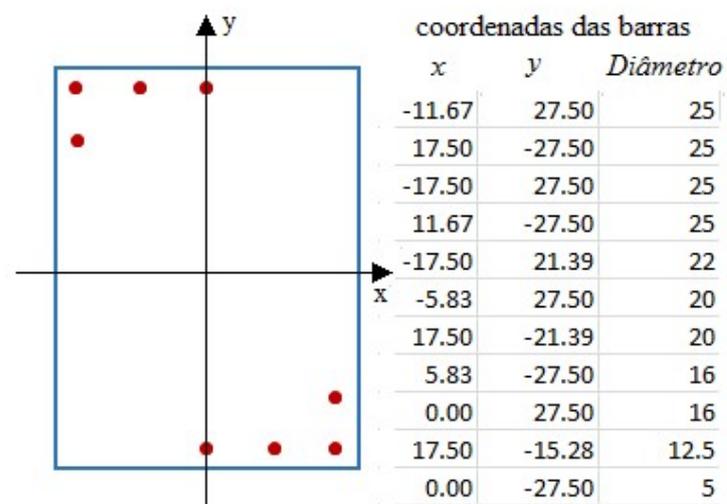


Figura 5.17 – Seção obtida na segunda análise

Resumo das análises:

Ábacos – 78,54cm<sup>2</sup>

Bastos(2004) – 65,19cm<sup>2</sup>

Primeira Análise – 62,52cm<sup>2</sup>

Segunda Análise – 35,16cm<sup>2</sup>

## 5.5. Seção Retangular Vazada

O problema proposto nesse exemplo é uma seção retangular vazada de 25 por 40cm e uma espessura constante de 6cm. A distância considerada do centro das armaduras até a face externa da seção é de 2,5cm. A seção será detalhada com barras de 10mm considerando um espaçamento entre essas barras de pelo menos 2,3cm. As curvas tensão deformação dos materiais aço e concreto são definidas como mostrado no item 3.6 desse trabalho, sendo considerado aço do tipo CA50 e o concreto com resistência característica a compressão ( $f_{ck}$ ) de 25MPa.

Considerando as dimensões da seção, cobertura, espaçamento entre barras, diâmetro das barras, o programa gera a seção inicial definindo o maior número de barras possíveis em um contorno interno da seção, como mostra a Figura 5.18 a seguir. Dessa forma, o programa gera 32 barras de 10mm com centroide distante 2,5cm do contorno externo da seção e 3,3cm de distância mínima entre os centroides das barras. A Tabela 5.4 a seguir fornece as coordenadas dessas barras considerando origem do sistema de referência no centro da seção. O usuário pode excluir essa opção do programa e fornecer o número de barras e suas posições para o ponto de partida.

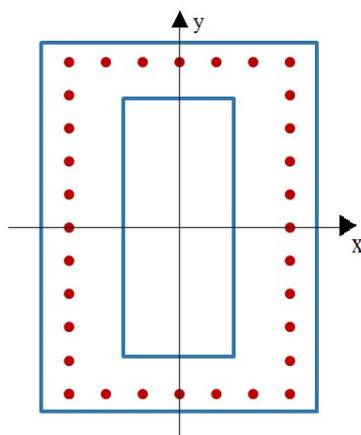


Figura 5.18 – Seção vasada inicial

Tabela 5.4 – Posições das barras dentro da seção inicial

	<b>b1</b>	<b>b2</b>	<b>b3</b>	<b>b4</b>	<b>b5</b>	<b>b6</b>	<b>b7</b>	<b>b8</b>	<b>b9</b>	<b>b10</b>	<b>b11</b>	<b>b12</b>	<b>b13</b>	<b>b14</b>	<b>b15</b>	<b>b16</b>
x(cm)	-6.7	-3.3	0.0	3.3	6.7	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0
y(cm)	-17.5	-17.5	-17.5	-17.5	-17.5	-17.5	-14	-10.5	-7	-3.5	0	3.5	7	10.5	14	17.5
	<b>b17</b>	<b>b18</b>	<b>b19</b>	<b>b20</b>	<b>b21</b>	<b>b22</b>	<b>b23</b>	<b>b24</b>	<b>b25</b>	<b>b26</b>	<b>b27</b>	<b>b28</b>	<b>b29</b>	<b>b30</b>	<b>b31</b>	<b>b32</b>
x (cm)	6.7	3.3	0.0	-3.3	-6.7	-10.0	-10.0	-10.0	-10.0	-10.0	-10.0	-10.0	-10.0	-10.0	-10.0	-10.0
y (cm)	17.5	17.5	17.5	17.5	17.5	17.5	14	10.5	7	3.5	0	-3.5	-7	-10.5	-14	-17.5

Na primeira análise foi considerada flexão apenas no plano  $yz$ , ou seja,  $N = M_y = 0$  e  $M_x = -50kNm$ . Foi exigida simetria das disposições das barras em relação ao eixo  $y$  e todas as barras com diâmetro de 10mm. Com essas especificações o programa converge para uma seção composta por 5 barras de 10mm totalizando uma área de aço de  $3,93cm^2$  como pode ser verificada na Figura 5.19 a seguir.

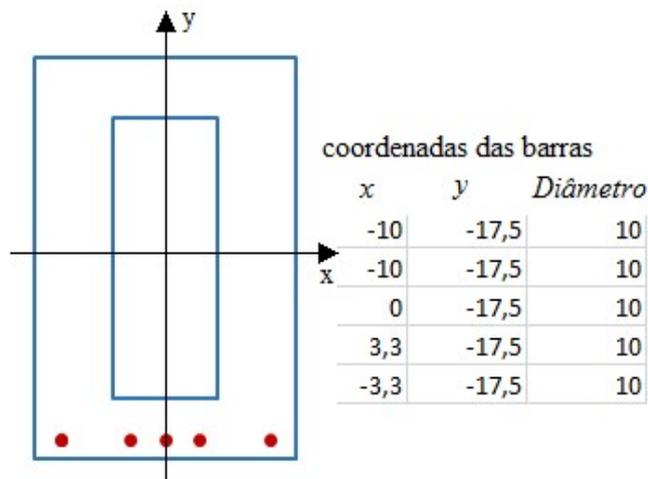


Figura 5.19 – Seção obtida para a primeira análise

A segunda análise é quase igual à primeira em relação as configurações referentes aos esforços solicitantes,  $N = M_y = 0$  e  $M_x = -50kNm$  e a simetria das barras, diferenciando apenas que nessa análise as barras têm diâmetro de 10mm ou inferior, ou seja, 8, 6,3 ou 5mm. Com essas especificações o programa converge para uma seção composta por 4 barras de 10mm e uma de 5mm totalizando uma área de aço de  $3,34cm^2$ , como pode ser verificada na Figura 5.20 a seguir.

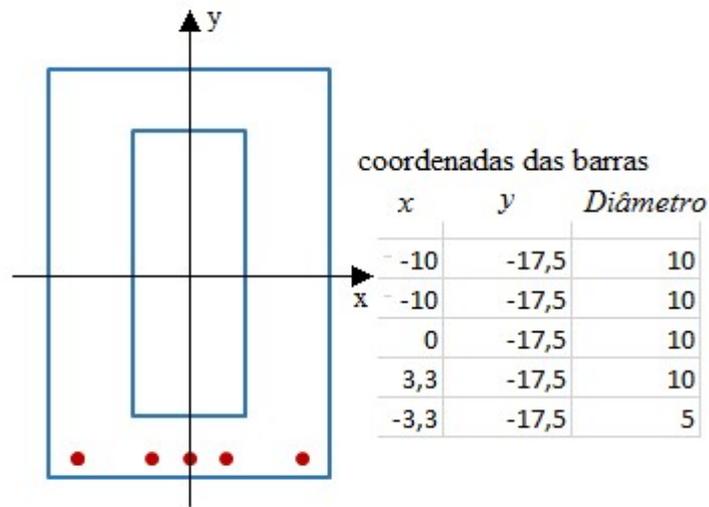


Figura 5.20 – Seção obtida para a segunda análise

Na terceira análise foi considerada flexão oblíqua composta com as seguintes solicitações,  $N_d = 500\text{kN}$ ,  $M_{xd} = -50\text{kNm}$  e  $M_{yd} = 30\text{kNm}$ . Foi exigida simetria das disposições das barras em relação aos eixos  $x$  e  $y$  e todas as barras de diâmetro fixo de 10mm. Com essas especificações o programa converge para uma seção composta por 8 barras de 10mm totalizando uma área de aço de  $6,28\text{cm}^2$  como pode ser verificada na Figura 5.21 a seguir.

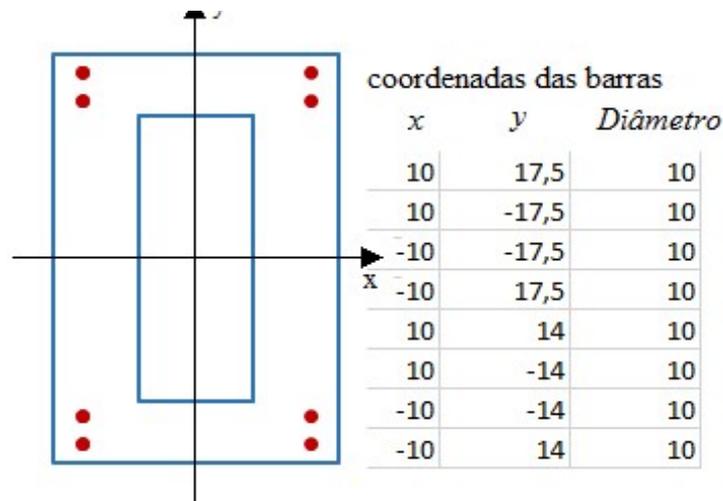


Figura 5.21 – Seção obtida para a terceira análise

A quarta análise é igual à terceira em relação aos esforços solicitantes,  $N_d = 500\text{kN}$ ,  $M_{xd} = -50\text{kNm}$  e  $M_{yd} = 30\text{kNm}$  e simetria, diferenciando apenas que nesta análise as barras têm diâmetro de 10mm ou inferior, ou seja, 8, 6,3 ou 5mm. Com essas especificações o programa converge para uma seção composta por 8 barras, sendo 4 barras de 10mm e 4 barras de 5mm totalizando uma área de aço de  $3,93\text{cm}^2$  como pode ser verificada na Figura 5.22 a seguir.

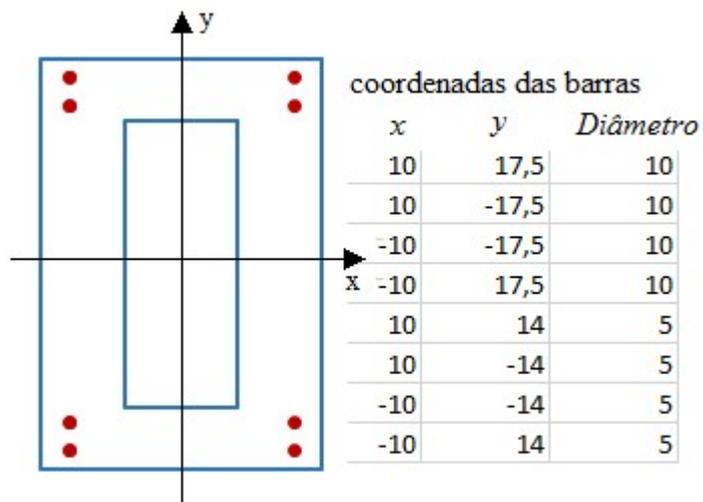


Figura 5.22 – Seção obtida para a quarta análise

Essa quinta e última análise é igual à terceira em relação aos esforços solicitantes,  $N_d = 500\text{kN}$ ,  $M_{xd} = -50\text{kNm}$  e  $M_{yd} = 30\text{kNm}$ , e diâmetro das barras, que podem ser de 10mm ou menor, ou seja, 8, 6,3, ou 5mm, diferenciando apenas que nessa análise não será exigida simetria em relação aos eixos  $x$  e  $y$ . Com essas especificações o programa converge para uma seção composta por 3 barras, sendo 2 barras de 10mm e 1 barra de 5mm totalizando uma área de aço de  $1,77\text{cm}^2$  como pode ser verificada na Figura 5.23 a seguir.

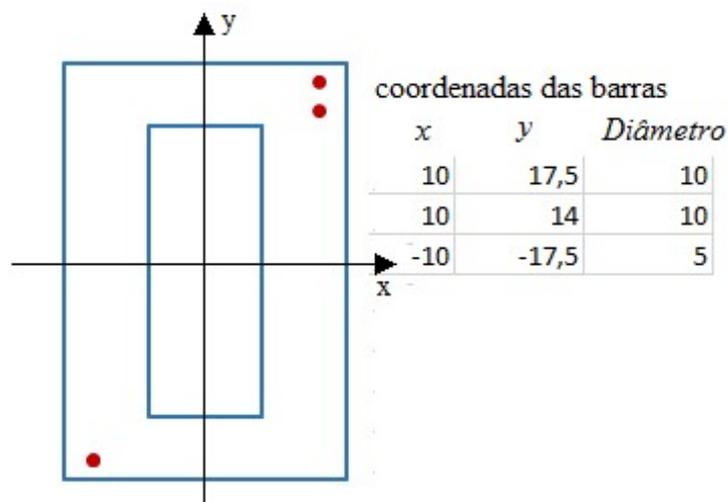


Figura 5.23 – Seção obtida para a quinta análise

Nessa aplicação os resultados encontrados usando o algoritmo implementado nesse trabalho não foram comparados com outros autores na falta desses. Por isso, será apresentada a seguir a curva de interação de momentos da seção mostrada na Figura 5.23 para um esforço axial de compressão de 500kN. Essa curva é determinada ponto a ponto fixando os valores de  $N$  e  $M_x$  e determinando o valor de  $M_y$  até que a seção apresente uma deformada que viole alguma das deformações limites especificadas no item 3.5 desse trabalho. A Figura 5.24 a seguir mostra essa curva para a seção obtida na quinta análise desse exemplo. Como pode ser verificada pela curva o ponto  $M_{xd} = -50\text{kNm}$  e  $M_{yd} = 30\text{kNm}$ , está exatamente no contorno dessa curva indicando segurança e economia na definição dessa seção.

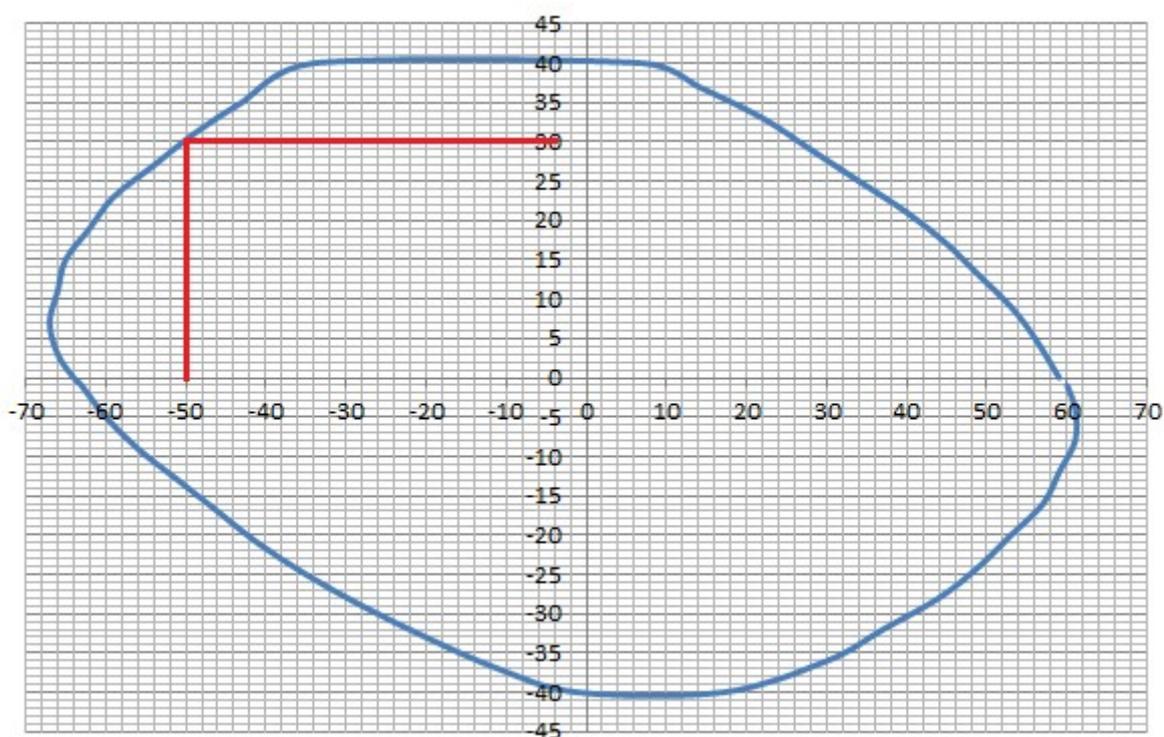


Figura 5.24 – Curva interação dos momentos para  $N_d = -500\text{kN}$

Resumo das análises:

Primeira Análise –  $3,93\text{cm}^2$

Segunda Análise –  $3,34\text{cm}^2$

Terceira Análise –  $6,28\text{cm}^2$

Quarta Análise –  $3,93\text{cm}^2$

Quinta Análise –  $1,77\text{cm}^2$

## 5.6. Seção L

O problema proposto nesse exemplo é uma seção L de abas iguais de 40cm e uma espessura constante de 12cm. A seção será detalhada com barras de 12,5mm considerando um espaçamento entre essas barras de pelo menos 2,3cm e um cobrimento dessas barras de 2,0cm. As curvas tensão deformação dos materiais aço e concreto são definidas como mostrado no item 3.6 desse trabalho, sendo considerado aço do tipo CA50 e o concreto com resistência característica a compressão ( $f_{ck}$ ) de 25MPa. A seção está submetida a um esforço combinado de flexão e carga axial, sendo  $N_d = -600\text{kN}$ ,  $M_{xd} = 30\text{kNm}$  e  $M_{yd} = 40\text{kN}$ . Os esforços estão aplicados no centro geométrico da seção retangular que contorna externamente a seção em análise.

Considerando as dimensões da seção, cobrimento, espaçamento entre barras, diâmetro das barras, o programa gera a seção inicial definindo o maior número de barras possíveis em um contorno interno da seção. Dessa forma, o programa fornece 34 barras de 12,5mm como pode ser verificada na Figura 5.25-a dada a seguir. As barras possuem o centroide distante 2,625cm do contorno externo da seção e 3,55cm de distância mínima entre os centroides das barras. A Tabela 5.5 a seguir fornece as coordenadas dessas barras considerando origem do sistema de referência no centro geométrico da seção retangular que engloba a seção L. O usuário pode excluir essa opção do programa e fornecer o número de barras e suas posições para o ponto de partida.

Como a seção não tem simetria em  $x$  e  $y$ , na primeira análise a única exigência foi que todas as barras tivessem diâmetro de 12,5mm. Com essa exigência o programa converge para uma seção composta por 4 barras de 12,5mm totalizando uma área de aço de  $4,91\text{cm}^2$  como pode ser verificada na Figura 5.25-b.

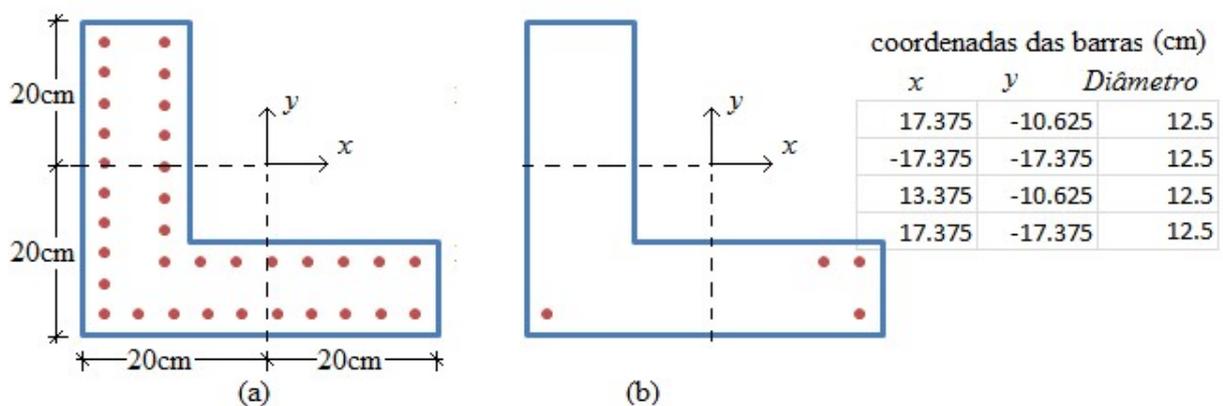


Figura 5.25 – (a) Seção inicial e (b) Seção para a primeira análise

Tabela 5.5 – Posições das barras dentro da seção inicial

	<b>b1</b>	<b>b2</b>	<b>b3</b>	<b>b4</b>	<b>b5</b>	<b>b6</b>	<b>b7</b>	<b>b8</b>	<b>b9</b>	<b>b10</b>	<b>b11</b>	<b>b12</b>	<b>b13</b>	<b>b14</b>	<b>b15</b>	<b>b16</b>	<b>b17</b>
<i>x</i> (cm)	-13.5	-9.65	-5.79	-1.93	1.93	5.79	9.65	13.5	17.4	17.4	13.4	9.38	5.38	1.38	-2.63	-6.63	-10.6
<i>y</i> (cm)	-17.4	-17.4	-17.4	-17.4	-17.4	-17.4	-17.4	-17.4	-17.4	-10.6	-10.6	-10.6	-10.6	-10.6	-10.6	-10.6	-10.6
	<b>b18</b>	<b>b19</b>	<b>b20</b>	<b>b21</b>	<b>b22</b>	<b>b23</b>	<b>b24</b>	<b>b25</b>	<b>b26</b>	<b>b27</b>	<b>b28</b>	<b>b29</b>	<b>b30</b>	<b>b31</b>	<b>b32</b>	<b>b33</b>	<b>b34</b>
<i>x</i> (cm)	-10.6	-10.6	-10.6	-10.6	-10.6	-10.6	-10.6	-17.4	-17.4	-17.4	-17.4	-17.4	-17.4	-17.4	-17.4	-17.4	-17.4
<i>y</i> (cm)	-6.63	-2.63	1.38	5.38	9.38	13.4	17.4	17.4	13.5	9.65	5.79	-1.93	-1.93	-5.79	-9.65	-13.5	-17.4

Na segunda análise foi considerada a possibilidade da variação dos diâmetros das barras considerando o diâmetro de 12,5mm como limite superior, sendo assim, as barras podem ter diâmetros de 12.5, 10, 8, 6.3 e 5mm. Com essa exigência o programa converge para uma seção composta por 4 barras, sendo 3 barras de 12,5mm e 1 barra de 8mm totalizando uma área de aço de 4,18cm<sup>2</sup> como pode ser verificada na Figura 5.26 a seguir.

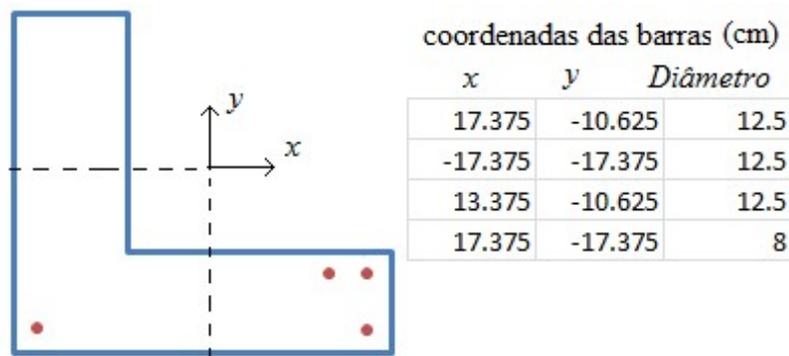


Figura 5.26 – Seção para a segunda análise

Assim como na aplicação do item anterior, os resultados encontrados para essa aplicação usando o algoritmo implementado nesse trabalho não foram comparados com outros autores na falta desses. Por isso, é apresentada a seguir a curva de interação de momentos da seção mostrada na Figura 5.26 para um esforço axial de compressão de 600kN. A Figura 5.27 a seguir mostra essa curva para a seção obtida na segunda análise desse exemplo. Como pode ser verificada pela curva o ponto  $M_{xd} = 30\text{kNm}$  e  $M_{yd} = 40\text{kNm}$ , está exatamente no contorno dessa curva indicando segurança e economia na definição dessa seção.

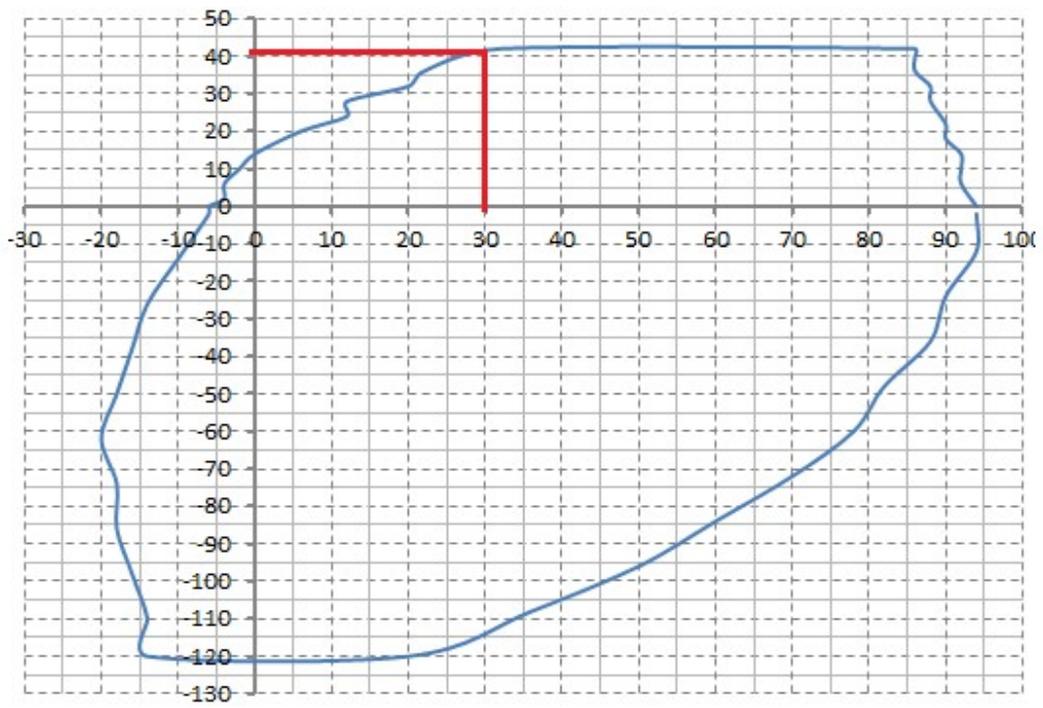


Figura 5.27 – Curva interação dos momentos para  $N_d = -600\text{kN}$

Resumo das análises:

Primeira Análise –  $4,91\text{cm}^2$

Segunda Análise –  $4,18\text{cm}^2$

# Capítulo 6

## Considerações Finais

### 6.1. Síntese do Trabalho

No presente trabalho, foi desenvolvido um programa computacional utilizando métodos de otimização para resolver problemas de otimização não linear com restrições. O algoritmo implementado utilizou o método Simplex e consiste na busca de uma resposta otimizada do problema de definição da armadura de aço longitudinal de seções transversais poligonais de concreto sujeitas a esforços combinados de flexão e carga axial.

Inicialmente o programa definiu uma seção inicial inserindo o máximo de barras possíveis em uma camada na linha que define o cobrimento da seção, esse cobrimento é definido pelo usuário e deve respeitar prescrições de norma conforme o item 2.3.1 desse trabalho. A quantidade de barras que é disposta em cada aresta de uma seção poligonal qualquer é definida admitindo um espaçamento uniforme entre as barras e que o mesmo seja maior ou igual ao espaçamento definido pelo usuário que deve também respeitar as prescrições de norma NBR6118 (2014). O diâmetro da barra é definido pelo usuário e deve ser um dos diâmetros comerciais dado na Tabela 3.2 no item 3.6 desse trabalho. A verificação da necessidade de utilizar outras camadas de barras na parte mais interior da seção foi feita através da rotina desenvolvida nesse trabalho que calcula a deformada da seção para um determinado esforço solicitante de flexão combinado com carga axial. Com as informações da seção transversal, dos materiais concreto e aço ela devolve a deformação axial da seção e as suas rotações em x e y, de tal forma que os esforços resistentes sejam iguais aos esforços solicitantes. Essa rotina foi baseada no processo incremental iterativo do método de Newton-Rapson para resolver o problema não linear analisado por ela. No item 4.5 descreve melhor como obter o ponto de partida.

Para um melhor comportamento do método de programação sequencial linear, é feita antes da aplicação desse método, uma alteração da seção obtida como ponto de partida supracitado. Para isto é calculado a derivada dos esforços resistentes de cada uma das barras obtidas na seção inicial. Analisando as somas das derivadas, pode-se chegar a conclusão de qual barras contribui menos para os esforços resistentes da seção analisada, sendo assim, é feita uma redução de 25% do diâmetro destas barras.

Com a nova seção obtida calcula-se a deformada da seção, se as deformações calculadas forem menores em valor absoluto do que as suas respectivas deformações limites, continua-se o processo de redução das barras. Caso contrário, adota-se a seção anterior a essa analisada, ou seja, antes de alterar esse último diâmetro.

Utilizando o método Simplex calcula-se as variáveis de projeto que minimizam a função objetivo  $f(x)$  respeitando todas as restrições definidas no item 3.4. Aplicando o método iterativo ocorre a fixação de determinadas barras e retirada de outras, esse método otimiza uma nova seção a cada iteração, sendo essa nova seção obtida com a fixação das barras de maior área e retirada das barras de áreas nulas.

O usuário tem a opção de escolher se o diâmetro deve ser único e seu valor ou se o diâmetro deve possuir apenas um valor limite máximo e mínimo. Vale ressaltar que os diâmetros variam de acordo com os diâmetros comerciais. Cabe também ao usuário definir se as barras devem ser distribuídas de forma simétrica em relação ao eixo x, ao eixo y, aos dois ou se não deve ser considerada a simetria das barras.

O programa implementado foi validado analisando seis exemplos. O primeiro, item 5.1, compara os resultados do programa com os resultados obtidas através das equações de equilíbrio. O segundo, item 5.2, é uma seção retangular 30x60, esse exemplo foi resolvido por Carvalho e Pinheiro (2009) e Sias (2014). O terceiro, item 5.3, é uma seção retangular 30x70, esse exemplo foi resolvido por Fusco (1995) e Sias (2014). Já o quarto, item 5.4, é uma seção retangular 40x60, esse exemplo foi resolvido por Bastos (2004). O quinto é uma seção retangular vazada. E por fim, o sexto exemplo é uma seção em L. Em todos os exemplos foram encontradas boas soluções mostrando a eficiência do programa desenvolvido neste trabalho.

## **6.2. Conclusões e Contribuições**

Nesse trabalho foi utilizado um algoritmo de otimização para definir a quantidade de aço e sua posição dentro de uma seção poligonal qualquer de concreto sujeita a flexão composta, de forma que, a quantidade de aço seja a mínima necessária para resistir aos esforços solicitantes. O método de programação sequencial linear é usado para resolver o problema não linear de determinação dos esforços resistentes da seção em relação às variáveis de projeto. Nesse método as funções de restrições e objetivo são aproximadas por suas expansões em série de Taylor truncada no termo de primeira ordem e a partir de um ponto que atenda as restrições, novos pontos são determinados de forma que as restrições continuem sendo atendidas e a função

objetivo diminua. Em cada passo do processo iterativo do método de programação sequencial linear deve-se determinar o próximo passo de forma que a função objetivo tenha uma máxima redução, esse problema foi resolvido nesse trabalho usando o método Simplex. Como observa-se dos exemplos apresentados, o método implementado nesse trabalho mostrou-se bastante eficiente para a conclusão dos objetivos propostos nesse trabalho.

### **6.3. Trabalhos Futuros**

Nos parágrafos seguintes são expostas algumas ideias de trabalhos que podem ser desenvolvidos a partir desta dissertação.

Utilização de outros métodos de otimização para análise do problema estudado nesse trabalho, como, por exemplo, método da programação quadrática sequencial e algoritmo genético.

Definir parâmetros para a geometria da seção e considerá-los como variáveis de projeto junto com as áreas de aço e trabalhar com uma função objetivo de reduzir custo dos materiais concreto e aço. Neste caso a função objetivo deve ser escrita em função da área de aço e concreto. Constantes de proporcionalidades referentes aos custos dos materiais devem ser inseridas na função objetivo para se ter respostas realísticas.

Implementar o método descrito nesse trabalho dentro de uma formulação de elemento finito de barra para dimensionamento e detalhamento de pórticos em concreto armado.

Analisar os casos de seções mistas de aço e concreto com a presença de barras de reforço. As rotinas de cálculo dos esforços resistentes das seções utilizadas neste trabalho, já permite que a seção seja de um número qualquer de materiais, portanto, devem ser alteradas as restrições de projeto e a função objetivo.

## Referências

- ANAUT, D. O., DI MAURO, G.F., SUÁREZ, J.A., DI MAURO, R. R., 2006. Optimal Configuration of Primary Distribution Nets.: Simplex Method. *Information Tecnológica*. v.17(1), p. 85-92.
- BASTOS, E.A., 2004. Otimização de Seções Retangulares de Concreto Armado Submetidas à Flexo-Compressão Oblíqua Utilizando Algoritmos Genéticos. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia da Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- BAZARAA, M. e SHETTY, C., 1993. *Nonlinear programming-theory and algorithms*. Second edition, John Wiley & Sons, Inc., New York.
- BONA, E., BORSATO, D., SILVA, R. S. S. F., HERRERA, R.P., 2000. Aplicativo para Otimização Empregando o Método Simplex Sequencial. *Acta Scientiarum*, v. 22(5), p. 1201-1206.
- BONET J. L., BARROS M. H. F. M. E ROMERO M. L., 2006. Comparative study of analytical and numerical algorithms for designing reinforced concrete sections under biaxial bending. *Computers & Structures*. v. 84, p. 2184–2193.
- CALDAS, R.B., 2004. Análise Numérica de Pilares Mistos de Aço-Concreto. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- CARVALHO, R. C.; PINHEIRO, L. M.; 2009. *Cálculo e Detalhamento de Estruturas Usuais de Concreto*. São Paulo: PINI, v.2, 589 p.
- CHAVES, I. A., 2004. Otimização de Pilares de Concreto Armado Mediante Uniformização do Índice de Confiabilidade. Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil
- CHAVES, I. A. e DEBS, A. L. H. C., 2008. Otimização de Pilares de Concreto Armado Mediante Uniformização do Índice de Confiabilidade. *Cadernos de Engenharia de Estruturas*, São Carlos, v.10, n. 45, p.1-22.

DEITEL, H.M. e DEITEL, P. J., 2001. C ++ Como Programador. Bookman.

EBOLI, C.R., 1989. Dimensionamento Ótimo de Seções de Aço-Concreto à Flexão Composta Oblíqua. Dissertação de Mestrado, Departamento Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

FUSCO, P. B., 1995. Estruturas de Concreto: Solicitações Normais. Rio de Janeiro: Editora Guanabara Dois, 464p.

GUERRA, A. e KIOUSIS, P. D., 2006. Design Optimization of Reinforced Concrete Structures. Computers and Concret, v.3, n.5, p. 313-334.

HAFTKA, R. e KAMAT, M. 1985. Elements of structural optimization. Martinus Nijhoff Publishers, Boston.

JUNIOR, E.C.P., 2006. Otimizações de Seções de Concreto Armado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, Brasil.

LISBOA, E.F.A. 2002. Pesquisa Operacional. Apostila com versão digital disponível <http://www.ericolisboa.eng.br>, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

MAIA, J. P. R, 2009. Otimização Estrutural: estudo e aplicações em problemas clássicos de vigas utilizando a ferramenta solver. Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil.

MUNIZ, C.F.D.G., 2005. Modelos Numéricos para Análise de Elementos Estruturais Mistos, Dissertação de Mestrado, PROPEC, Departamento de Engenharia Civil, Escola de Minas, UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.

NBR ABNT 6118., 2014. Projeto de Estrutura de Concreto-Procedimento. ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas. Rio de Janeiro, MG, Brasil.

NINA, T.C., 2006. Otimizações de Seções Transversais de Concreto Armado: Aplicações a Pórtico Planos, Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade São Paulo, São Carlos, SP, Brasil.

NOCEDAL, J. e WRIGHT, S. J., 2006. Numerical Optimization. Second Edition, Springer-Verlag, New York, USA

NOGUEIRA, C. G., 2010. Desenvolvimentos de Modelos Mecânicos, de Confiabilidade e de Otimização para a Aplicação em Estruturas de Concreto Armado. Tese de Doutorado, Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil

NOGUEIRA, C. G. e VENTURINI, W. S., 2009. Um Modelo para Projeto Ótimo Baseado em Confiabilidade Aplicado a Vigas em Concreto Armado. Cadernos de Engenharia de Estruturas, São Carlos, v.11, n. 53, p.145-149.

RAMOS, H. O. C., 2011. Um Algoritmo para Otimização Restrita com Aproximação de Derivadas. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia da Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

RATH, D. P., AHLAWAT, A.S., RAMASWAMY, A. Dezembro de 1999. Shape Optimization of RC Flexural Members. Journal structural Engineering, p. 1439-1446.

RIGO, E., 1999. Métodos de Otimização Aplicados à Análise de Estruturas. Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil

SALES, R. P., 2010. Uma Ferramenta 3D, Via Web, para Dimensionamento de Seções Retangulares de Concreto Armado com Esboço na Armadura. Dissertação de Mestrado, Engenharia de Estruturas, Escola Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.

SIAS, F. M., 2014. Dimensionamento Ótimo de Pilares de Concreto Armado. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Departamento de Engenharia Civil. Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, ES, Brasil.

SIAS, F. M. e ALVES, E. C., 2016. Dimensionamento Ótimo de Pilares de Circulares Concreto Armado Segunda a NBR 6118:2014. Engenharia Estudo e Pesquisa. ABPE, v.16, n. 1, p.34-42.

SILVA, E. E., 2001. Otimização de Estruturas de Concreto Armado Utilizando Algoritmos Genéticos. Dissertação de Mestrado, Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil.

Silva, A.R., 2007. Análise Numérica de Vigas Mistas com Iteração Parcial, Dissertação de Mestrado, PROPEC, Departamento de Engenharia Civil, Escola de Minas, UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil

SILVA, A. R., JUNIOR SOUZA, J. B. M., NEVES F. A., 2010. Otimização do Perfil I de Aço de Vigas Mistas de Aço-Concreto com Interação Parcial, MECOM/CILAMCE, Buenos Aires.

SILVA, A. R., SOUZA JR, J. B. M., NEVES F. A., 2011. Optimization of Steel-Concrete Composite Beams With Partial Interaction by Sequential Linear Programming., XXXII CILAMCE - Congresso Ibero – Latino Americano de Métodos Computacionais em Engenharia, Ouro Preto.

VANDERPLAATS, G., 1984. Numerical optimization technique for engineering design - with applications. McGraw-Hill Book Company, New York, 1984.

VERZENHASSI, C. C., 2008. Otimização de Risco Estrutural Baseada em Confiabilidade. Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil