



Luis Fernando Paulo Muñoz

**Análise Dinâmica Não Linear de Pórticos com
Base Elasto-Plástica sob Ação
Sísmica**

Tese de Doutorado

Tese apresentada como requisito parcial para
obtenção do título de Doutor pelo Programa de
Pós-Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Paulo Batista Gonçalves
Co-orientador: Prof. Ricardo Azoubel da Mota Silveira

Rio de Janeiro
Março de 2015



Luis Fernando Paulo Muñoz

**Análise Dinâmica Não Linear de Pórticos com
Base Elasto-Plástica sob Ação
Sísmica**

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Doutor pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Civil do Decanato do CTC da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Paulo Batista Gonçalves

Orientador

Departamento de Engenharia Civil - PUC-Rio

Prof. Ricardo Azoubel da Mota Silveira

Co-orientador

Departamento de Engenharia Civil – UFOP

Prof. Sebastião Arthur Lopes de Andrade

Departamento de Engenharia Civil – PUC-Rio

Prof. Deane de Mesquita Roehl

Departamento de Engenharia Civil – PUC-Rio

Prof. José Guilherme Santos da Silva

Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Profª. Michéle Schubert Pfeil

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Prof. José Eugenio Leal

Coordenador Setorial do Centro

Técnico Científico – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 27 de Março de 2015

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Luis Fernando Paulo Muñoz

Graduou-se em Engenharia Civil no Departamento de Engenharia Civil da UNSAAC (Universidad Nacional de San Antônio Abad Del Cusco), em 2006. Obteve o grau de Mestre em Engenharia Civil pelo Departamento de Engenharia Civil da PUC-Rio em 2010. Atualmente tem continuado com a linha de pesquisa na área de instabilidade e análise dinâmica não linear de estruturas, com o estudo de análise sísmica de pórticos com iteração solo-estrutura.

Ficha Catalográfica

<p>Paullo Muñoz, Luis Fernando</p> <p>Análise dinâmica não linear de pórticos com base elasto-plástica sob ação sísmica / Luis Fernando Paulo Muñoz; orientador: Paulo Batista Gonçalves; co-orientador: Ricardo Azoubel da Mota Silveira. – 2015.</p> <p>214 f. : il. (color.) ; 30 cm</p> <p>Tese (doutorado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil, 2015. Inclui bibliografia</p> <p>1. Engenharia civil – Teses. 2. Análise dinâmica não linear. 3. Excitação sísmica. 4. Análise em frequência. 5. Instabilidade dinâmica. 6. Métodos de integração no tempo. 7. Método do balanço harmônico. I. Gonçalves, Paulo Batista. II. Silveira, Ricardo Azoubel da Mota. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil. IV. Título</p>

CDD: 624

*Aos meus pais, Fernando e Rosa.
A minha irmã, Yesenia.*

Agradecimentos

A Deus, por permitir-me culminar mais uma etapa na minha vida.

A minha mãe Rosa e ao meu pai Fernando, a quem devo tudo o conseguido na vida.

A minha irmã Yesenia, que foi e é meu apoio nos momentos mais difíceis.

Ao Professor Paulo B. Gonçalves, pela orientação, serenidade e conhecimentos transmitidos.

Aos Professores Ricardo Silveira e Andréa da Silva pela ajuda e orientação prestada.

Aos professores do setor estruturas do DEC da PUC-Rio, pelo ensino acadêmico e motivação dada ao longo do mestrado.

À UNSAAC (Universidad de San Antônio Abad del Cusco), pela base acadêmica necessária para minha formação.

Aos colegas da PUC-Rio, pela ajuda acadêmica, pessoal e pelos momentos de convívio, em especial aos colegas que começaram esta aventura acadêmica ainda em 2008.

À CNPq e à PUC-Rio, pelo auxílio financeiro.

Ao instituto Tecgraf da PUC-Rio, pela oportunidade de desenvolver outras áreas de conhecimento e sua contribuição na minha estabilidade financeira.

A todas as pessoas que de alguma forma contribuíram com a elaboração deste trabalho.

Resumo

Paullo Muñoz, Luis Fernando; Gonçalves, Paulo Batista; Silveira, Ricardo Azoubel da Motta. **Análise Dinâmica Não Linear de Pórticos com Base Elasto-plástica sob Ação Sísmica**. Rio de Janeiro, 2015. 214p. Tese de Doutorado - Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

A resposta dinâmica de sistemas estruturais não lineares tem sido um item de grande interesse nas pesquisas em engenharia civil. Problemas onde há interação base flexível-estrutura são de grande importância na análise estrutural, já que a maioria das estruturas civis é apoiada sobre sistemas flexíveis (solo ou sistemas de apoio com dissipação de energia). Nesta área, o estudo de sistemas submetidos a ações sísmicas é um tópico relevante, já que estas solicitações têm um grande conteúdo de frequências, o que pode influenciar consideravelmente as respostas da estrutura. Neste contexto, o conhecimento da resposta em frequência de estruturas não lineares sob uma excitação de base é uma ferramenta útil para avaliar os potenciais efeitos de ações sísmicas sobre estes sistemas. Na presente tese é desenvolvida uma metodologia de análise não linear dinâmica de sistemas estruturais reticulados sob excitações de base, considerando não linearidade geométrica e apoios flexíveis, representados por molas unidimensionais, com comportamento elasto-plástico. Através de uma análise paramétrica é avaliada a variabilidade das respostas de sistemas esbeltos submetidos a ações sísmicas reais, sismos artificiais, assim como ações sísmicas sucessivas. O problema no espaço é resolvido pelo método dos elementos finitos. Para a análise em frequência, é apresentada uma metodologia baseada no método do balanço harmônico e no método de Galerkin, juntamente com técnicas de continuação para a obtenção das curvas de ressonância não lineares. O problema no tempo é abordado através da integração das equações de movimento pelos métodos de Runge-Kutta e Newmark, associado ao método de Newton-Raphson.

Palavras-chave

Análise dinâmica não linear; Excitação sísmica; Análise em frequência; Instabilidade dinâmica; Métodos de integração; Método do balanço Harmônico.

Abstract

Paullo Muñoz, Luis Fernando; Gonçalves, Paulo Batista (Advisor); Silveira, Ricardo Azoubel da Motta (Co-advisor). **Nonlinear Dynamic Analysis of Frames with Elasto-plastic Base under Seismic Excitation**. Rio de Janeiro, 2015. 214p. Doctoral Thesis – Departamento de Engenharia Civil, Pontificia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The dynamic response of nonlinear structures has been a topic of interest in civil engineering research. Problems in which base-structure interaction is present have a great importance in structural analysis, since most structures rests on flexibel systems (soil or supports with dissipation). In this research area, the study of structures under the action of seismic loads represent a relevant topic, since this kind of excitations may excite several vibration modes and thus influence strongly the dynamic response. In this context, the prediction of the nonlinear structural behavior in frequency domain of structures under base excitation is a useful resource to assess the potential effects of sismic loads on these systems. In this thesis, a methodology for nonlinear dynamic analysis of plane frame structures under base excitation is presented considering geometric nonlinearity and elastic supports represented by elasto-plastic unidimensional springs. Trough a parametric analysis, the variability of the dynamic responses of slender structural systems under the actions of real earthquakes, synthetics earthquakes, as well as the action of multiple earthquakes is assessed. The structural systems here analyzed are discretized in space using a nonlinear finite element formulation. For the response in frequency domain, a scheme based on the Balance Harmonic Method and the Galerkin method, in conjunction with continuation methods, is formulated to obtain the nonlinear resonance curves. The nonlinear dynamic response in the time domain is calculated by direct integration of the equations of motion. For this, the Runge-Kutta method and the Newmark method in association with the iterative Newton-Raphson scheme are employed.

Keywords

Nonlinear dynamic analysis; Earthquakes; Analysis in frequency domain; Dynamic instability; Direct integration methods; Harmonic Balance method.

Sumário

1	Introdução	27
1.1.	Considerações Iniciais	27
1.2.	Objetivos	28
1.3.	Revisão Bibliográfica	28
1.3.1.	Não Linearidade Geométrica e Física	28
1.3.2.	Aspectos de Dinâmica Estrutural e Análise Sísmica.	31
1.3.3.	Consideração de base flexível	34
1.4.	Organização e Descrição da Tese	40
2	Formulação Não Linear Estática e Dinâmica no Domínio do Tempo	42
2.1.	Formulação do Elemento Finito Não Linear	42
2.1.1.	Medidas de deformação não linear	42
2.1.1.1.	Formulação Não Linear FN1	43
2.1.1.2.	Formulação Não Linear FN2	44
2.1.2.	Forças Internas Resultantes e Energia Potencial Total	45
2.1.3.	Discretização do sistema por elementos finitos	49
2.1.4.	Matriz de rigidez, vetor de forças internas e equilíbrio estático	50
2.1.5.	Formulação do elemento com ligação semirrígida	51
2.1.6.	Matriz de rotação e montagem do sistema global estático	56
2.2.	Formulação para Análise Dinâmica no Domínio do Tempo	57
2.2.1.	Energia potencial e equação de movimento	57
2.2.2.	Matriz de massa considerando ligações semirrígidas	59
2.2.3.	Matriz de amortecimento e sistema global de equilíbrio	60
2.2.4.	Equação de movimento para excitação de base	61
2.3.	Solução no domínio do Tempo	62

2.3.1. Frequências naturais e modos de vibração	62
2.3.2. Análise transiente e integração direta no domínio do tempo	64
2.3.3. Métodos de integração para análise linear	65
2.3.3.1. Método implícito de Newmark	65
2.3.3.2. Métodos explícitos de Runge-Kutta	66
2.3.3.3. Integração do sistema dinâmico linear pelos métodos Runge-Kutta explícitos	72
2.3.3.4. Método implícito de Runge-Kutta-Gauss	73
2.3.4. Integração direta para análise não linear	74
2.3.4.1. Método Implícito de Newmark para análise não linear	74
2.3.4.2. Método de Runge-Kutta para análise não linear	75
2.4. Aspectos de Solução Estática Não Linear	77
2.4.1. Método iterativo de Newton-Raphson	78
2.4.2. Método do controle de arco	79
2.5. Consideração de Base Flexível	81
2.5.1. Formulação dinâmica do modelo contínuo com subestruturação	81
2.5.2. Formulação dinâmica com modelos discretos	82
2.5.3. Elemento de Base Elasto-plástica	84
3 Excitação Sísmica	86
3.1. Conceitos Gerais Sobre Sismos e Sismicidade	86
3.1.1. Definição e principais características dos sismos	86
3.1.2. Propagação e tipo de ondas sísmicas	89
3.2. Efeito dos Sismos sobre os Sistemas Estruturais	90
3.3. Formulação da Excitação Sísmica na Análise Estrutural	92
3.3.1. Registro da Aceleração sísmica	92
3.3.2. Potência da excitação sísmica	93
3.4. Geração de Sismos Artificiais	96
3.4.1. Formulação de sismos artificiais	96
3.4.2. Função intensidade e correção da linha base	98
4 Exemplos Numéricos da Análise no Domínio do Tempo	101
4.1. Descrição dos modelos estudados	101
4.1.1. Torre esbelta de três graus de liberdade T-1	101

4.1.2. Torre esbelta de com massa concentrada no topo T-2	102
4.1.3. Pórtico de dois andares Po-2	103
4.1.4. Pórtico de seis andares Po-6	103
4.1.5. Arco circular abatido Ac-1	104
4.2. Exemplos de sistemas lineares sob excitação harmônica	105
4.2.1. Validação dos métodos de integração	105
4.2.2. Estudo de desempenho e estabilidade	107
4.2.3. Influência de base elástica	110
4.2.3.1. Influência na resposta no tempo	110
4.2.3.2. Influência na ressonância	111
4.3. Exemplos da Análise Não Linear – Excitação Harmônica	113
4.3.1. Influência da não linearidade geométrica	113
4.3.1.1. Validação da integração direta no tempo	113
4.3.1.2. Não linearidade geométrica na ressonância	116
4.3.1.3. Não linearidade geométrica e variação da amplitude da aceleração	118
4.3.1.4. Não linearidade geométrica e variação da rigidez	119
4.3.2. Consideração de base elasto-plástica	121
4.4. Análise Sísmica	123
4.4.1. Geração de sismo artificial	123
4.4.2. Comparação entre as resposta com sismos real e artificial	126
4.4.3. Excitação sísmica e não linearidade geométrica	127
4.4.4. Excitação sísmica e elasto-plasticidade da base	127
5 Formulação Dinâmica Não Linear no Domínio da Frequência	129
5.1. Obtenção de Curvas de Ressonância Através da Análise no Tempo	130
5.2. Método do Balanço Harmônico	131
5.3. Formulação Linear do Equilíbrio Dinâmico na Frequência	133
5.4. Formulação Não Linear do Equilíbrio Dinâmico na Frequência: Método do Balanço Harmônico-Galerkin	134

5.5. Solução do Sistema de Equações Não Lineares na Frequência: Controle de Arco	137
5.6. Não Linearidade Geométrica na Frequência	140
5.7. Rotação da Matriz de Rigidez Não Linear no Domínio ω e Montagem do Sistema Global	
6 Exemplos Numéricos no Domínio da Frequência	145
6.1. Resposta em Frequência: Formulação linear	145
6.1.1. Pilar engastado e livre	145
6.1.2. Torre com massa concentrada	148
6.2. Resposta em Frequência: Formulação Não Linear	149
6.2.1. Sistema de um grau de liberdade com rigidez não linear quadrática	149
6.2.2. Influência da intensidade da excitação e não linearidade cúbica	151
6.2.3. Arco bi-engastado: Efeito da não linearidade quadrática	152
6.3. Efeito de não linearidade geométrica em estruturas esbeltas	153
6.3.1. Estrutura de galpão com cobertura de duas águas	153
6.3.1.1. Resposta para solicitação de base	156
6.3.1.2. Resposta para solicitação na direção vertical	158
6.3.1.3. Resposta para solicitação horizontal e vertical simultânea	159
6.3.2. Estrutura de galpão com cobertura em arco	161
6.3.2.1. Resposta para solicitação sísmica horizontal	163
6.3.2.2. Resposta para solicitação sísmica Vertical	164
6.3.2.3. Resposta para solicitação sísmica horizontal e vertical simultâneos	165
7 Estruturas Submetidas a Sismos Reais e Artificiais com Interação Solo-Estrutura	167
7.1. Solicitações Sísmicas	167
7.1.1. Solicitações sísmicas reais	167
7.1.2. Solicitações sísmicas artificiais	169
7.2. Pórtico Plano PT-1	171
7.2.1. Resposta aos sismos reais	172

7.2.2. Resposta a sismos artificiais com semelhança de potência	175
7.2.3. Resposta a sismo artificial com potência concentrada nas regiões de ressonância	180
7.2.3.1. Obtenção do espectro de potência	180
7.2.3.2. Resposta a sismos artificiais com potência concentrada na ressonância	183
7.3. Galpão com duas águas:	185
7.3.1. Resposta a sismos reais	186
7.3.2. Resposta a sismos artificiais com semelhança de potência	187
7.3.3. Resposta a sismos artificiais com potência concentrada nas regiões de ressonância.	191
7.4. Galpão Cobertura em Arco	194
7.4.1. Respostas máximas em sismos reais e artificiais gerados a partir de potências reais	195
7.4.2. Resposta a sismos artificiais com potência concentrada nas regiões de ressonância.	196
7.4.3. Resposta a ações sísmicas múltiplas	198
8 Conclusões e Sugestões	201
8.1. Conclusões	201
8.2. Sugestões para Trabalhos Futuros	203
9 Referências Bibliográficas	205

Listas de Figuras

Figura 1.1 – Referenciais Lagrangianos. Ref. Silva (2009). 29	
Figura 1.2 – Análise não linear geométrica e inelástica de pórtico metálico. Ref. Silva (2009).	31
Figura 1.3 – Modelos de solo como meios elásticos contínuos. Ref. Paullo (2010).	35
Figura 1.4 – Métodos diretos e de sub estruturação na análise de interação solo-estrutura. Ref. Villaverde (2009).	36
Figura 1.5 – Esquema e modelo de elementos finitos no estudo de interação estrutura-solo-estrutura através de modelo contínuo. Ref. Clouteau et al. (2009).	37
Figura 1.6 – Sistema discreto de interação base-estrutura. Ref. Wolf (1994).	38
Figura 1.7 – Representação de solo por sistema de barras unidimensionais. Ref. Halabian (1994).	39
Figura 1.8 – Modelos unidimensionais de solo. Esquerda: Sistema de molas Ref. Miguel e Bouaanani (2011). Direita: Sistema de mola-amortecedor Ref. Ganjavi e Hao (2012).	40
Figura 2.1 – Comportamento da seção transversal do elemento barra. Ref. Silva (2009).	44
Figura 2.3 – Graus de liberdade do elemento finito de viga-coluna.	49
Figura 2.4 – Idealização de ligação semirrígida.	51
Figura 2.5 – Sistema auxiliar de barra com molas.	54
Figura 2.6 – Sistema Estrutural submetido a deslocamento de base.	62
Figura 2.7 – Esquema de integração do método de Euler.	67
Figura 2.8 – Aproximação iterativa secante.	76
Figura 2.9 – Aproximação tangente no método de Newton-Raphson.	78

	14
Figura 2.10 – Aproximação por arco esférico.	80
Figura 2.11 – Sistema base-estrutura (Halabian,2002).	81
Figura 2.12 – Sistema unidimensional discreto solo-estrutura (Wolf, 1985).	
Figura 2.13 – Relação de força vs. Deslocamento de mola translacional unidimensional com comportamento elasto-plástico bi-linear (Wolf, 1985).	
Figura 3.1 – Localização geográfica do hipocentro e epicentro de um terremoto (https://bussoladeplasma.wordpress.com/tag/epicentro).	88
Figura 3.2 – Distribuição de atividades sísmicas no mundo (http://www.visionlearning.com).	89
Figura 3.3 – Tipo e forma de propagação das ondas sísmicas no solo.	90
Figura 3.4 – Falha do solo por ação sísmica: a) fratura de solo em estrutura de estrada devida à vibração excessiva no terremoto de Kobe-Japão 1995. b) Tombamento de estrutura devido à liquefação do solo no terremoto de Nigata-Japão 1964 (http://www.ngdc.noaa.gov/).	91
Figura 3.5 – Colapso de edificação devido a vibração excessiva no terremoto em Ica-Perú 2007 (http://www.elcomercio.pe).	92
Figura 3.6 – Registro de aceleração do sismo “El Centro (Califórnia 1940)” direção Norte-Sul (Clough e Penzien, 1995).	93
Figura 3.7 – FDEP gerada a partir de um acelerograma normalizado (Roehl, 2000).	95
Figura 3.8 – Fluxograma para a geração de um sismo artificial a partir de uma FDEP (Roehl, 2000).	100
Figura 4.1 – Modelo de torre esbelta T-1.	101
Figura 4.2 – Modelo de torre esbelta T-2.	102
Figura 4.3 – Modelo de pórtico de dois andares Po-2.	103
Figura 4.5 – Modelo de arco circular abatido.	105
Tabela 4-4. Três primeiras frequências e períodos de vibração da torre T-1	105

Figura 4.6 – Variação do deslocamento horizontal no topo da torre T-1 no tempo com métodos Runge-Kutta explícitos.	106
Figura 4.7 – Variação do deslocamento horizontal no topo da torre T-1 no tempo com os métodos de RKG4 implícito e Newmark. A = 0.4g, C = 0.25M, $\omega = 5.8\text{rad/s}$.	107
Figura 4.8 – Deslocamento horizontal do ponto B em Po-2. A=0.4g, C=0.25M, $\omega=7.86\text{ rad/s}$.	109
Figura 4.10 – Deslocamento horizontal do ponto B em T-2. A=0.4g, C=0.25M, $\omega=5.1\text{ rad/seg}$.	111
Figura 4.11 – Deslocamento horizontal do ponto B em Po-6. A = 0.4g, C = 0.25M, $\omega = 2.3\text{ rad/seg}$.	111
Figura 4.12 – Deslocamento horizontal máximo de B em T-2 na fase permanente vs. frequência de excitação. A = 0.4g, C = 0.25M.	112
Figura 4.13 – Deslocamento horizontal máximo de B em Po-6 na fase permanente vs. frequência de excitação. A = 0.4g, C = 0.25M.	112
Figura 4.14 – Deslocamento vertical de B vs. t em Ac-1. A = 0.8g, C = 0.50M. P = 0.0kN, $\omega = 1.95\text{rad/s}$. Base rígida.	113
Figura 4.15 – Deslocamento vertical de B em Ac-1 vs. t. C = 0.5M, $\omega = 0.80\text{rad/s}$, P = 0.2kN.	114
Figura 4.16 – Deslocamento vertical de B em Ac-1 vs. t. C = 0.75M, $\omega = 0.80\text{rad/s}$. Duração da excitação de base Tg = 15s.	115
Figura 4.17 – Relação P vs. deslocamento vertical de B em Ac-1 na fase permanente. A = 0.4g, C = 0.75M, $\omega = 0.80\text{rad/s}$. Duração da excitação de base Tg = 15s.	115
Figura 4.18 – Relação P vs. Deslocamento vertical de B em Ac-1 na fase permanente. C = 0.75M, $\omega = 0.80\text{rad/s}$; duração da excitação de base Tg = 15s.	116
Figura 4.19 – Deslocamento horizontal máximo de B em T-1 na fase permanente vs. frequência de excitação. A = 0.4g, C = 0.25M.	117
Figura 4.20 – Deslocamento horizontal máximo de B em Po-6 na fase permanente vs. frequência de excitação. A=0.4g, C=0.25M.	117
Figura 4.21 – Deslocamento horizontal máximo de B em T-2 na fase permanente vs. A. $\omega = 5.19\text{rad/s}$, C = 0.25M, $k_r = \text{infinito}$ (rígido).	118

Figura 4.22 – Deslocamento horizontal máximo de B em Po-6 na fase permanente x A. $\omega = 1.95\text{rad/s}$, $C = 0.25\text{M}$, $k_r = 10^6\text{kNm/rad}$.	119
Figura 4.23 – Deslocamento vertical de B em Ac-1 x t. $A=0.4g$, $C=0.75\text{M}$, $\omega=5.0\text{rad/s}$, $P=0.2\text{kN}$. $k_h=\text{rígido}$. Duração da excitação de base $T_g = 15\text{s}$.	120
Figura 4.24 – Deslocamento vertical de B em Ac-1 vs. t. $A=0.4g$, $C=0.75\text{M}$, $\omega=5.0\text{rad/s}$, $P=0.2$. $k_r=\text{rígido}$. Duração da excitação de base $T_g = 15\text{s}$.	121
Figura 4.25 – Deslocamento horizontal máximo de B em Ac-1 na fase permanente vs. frequência de excitação. $A = 0.4g$, $C = 0.25\text{M}$, $P = 0$, $k_h = \text{infinito}$.	121
Figura 4.26 – Deslocamento horizontal de B em T-1 x t. $A=0.4g$, $C=0.25\text{M}$, $k_r=10^{11}\text{kNm/rad}$, $\omega=5.40\text{rad/s}$, $M_p=160\text{MNm}$.	122
Figura 4.27 – Relação Momento vs. Rotação na base. $A=0.4g$, $C=0.25\text{M}$, $k_r=10^{11}\text{kNm/rad}$, $\omega=5.40\text{rad/s}$, $M_p=160\text{MNm}$.	123
Figura 4.28 – Sismo artificial gerado a partir do espectro de potência do sismo “El centro (1940)” direção Norte-Sul.	124
Figura 4.29 – Superposição de acelerogramas do sismo artificial e o sismo “El Centro ”.	125
Figura 4.30 – Comparação entre espectros de densidade de potência.	125
Figura 4.31 – Deslocamento horizontal no tempo do topo do sistema Po-6. $C=0.25\text{M}$, $k_r=10^{11}\text{kNm/rad}$. $t_s=50\text{seg}$, $t_{if} = 5\text{seg}$, $t_{ff} = 40\text{seg}$.	126
Figura 4.32 – Deslocamento horizontal de B em Po-6 x t, sismo Artificial. $C = 0.25\text{M}$, $k_r = 10^7\text{kNm/rad}$, $t_s = 50\text{seg}$, $t_{if} = 5\text{seg}$.	127
Figura 4.33 – Deslocamento horizontal de B em T-1 x t, sismo Artificial. $C=0.25\text{M}$, $k_r=10^{11}\text{kNm/rad}$. $t_s=55\text{s}$, $t_{if} = 5\text{s}$, $t_{ff} = 45\text{s}$. $M_p=80\text{MNm}$.	128
Figura 4.34 – Relação Momento x Rotação na base. Sismo artificial. $C = 0.25\text{M}$, $k_r = 10^{11}\text{kNm/rad}$, $t_s = 55\text{s}$, $t_{if} = 5\text{s}$, $t_{ff} = 45\text{s}$, $M_p = 80\text{MNm}$.	128
Figura 5.1 – Variação do deslocamento no tempo de um sistema de um grau de liberdade submetido a uma carga harmônica com frequência de excitação ω ; fase transiente e fase permanente.	131
Figura 6.1 – Pilar engastado e livre, submetido a deslocamento harmônico de base.	146

Figura 6.2 – Deslocamento horizontal vs. tempo, $A_g = 0.4g$, $\omega = 9.16\text{rad/s}$.	147
Figura 6.3 – Norma da amplitude do deslocamento horizontal máximo no topo do elemento vs. frequência, $A_g = 0.4g$.	147
Figura 6.5 – Norma da amplitude do deslocamento horizontal máximo no topo vs. frequência de excitação.	149
Figura 6.6 – Sistema de 1 grau de liberdade com rigidez não linear não amortecido.	149
Figura 6.7 – Sistema de 1 grau de liberdade não amortecido com rigidez não linear.	151
Figura 6.8 – Norma do deslocamento horizontal máximo no topo vs. frequência.	152
Figura 6.9 – Arco abatido bi-engastado submetido a movimento harmônico vertical.	152
Figura 6.10 – Norma da amplitude vertical no meio do vão vs. frequência. $A=1.0g$, $L=100m$.	153
Figura 6.11 – Geometria de galpão com cobertura a duas águas.	154
Figura 6.12 – Primeiro e terceiro modos de vibração natural. Modos assimétricos.	155
Figura 6.13 – Segundo e quarto modo de vibração natural. Modos simétricos.	156
Figura 6.14 – Amplitude de vibração horizontal no meio do vão vs. frequência de excitação. $A_{gx} = 0.8g$.	157
Figura 6.15 – Amplitude de vibração vertical no meio do vão vs. frequência de excitação. $A_{gy} = 0.8g$.	159
Figura 6.16 – Amplitude de vibração horizontal e vertical no meio do vão vs. frequência de excitação. $A_{gx} = 0.8g$, $A_{gy} = 0.667A_{gx}$.	160
Figura 6.17– Geometria de galpão com cobertura em arco circular. (dimensões em metros)	161
Figura 6.18 – Primeiro e terceiro modos de vibração natural. Modos não simétricos.	162
Figura 6.19 – Segundo e quarto modos de vibração natural.	163

Figura 6.20 – Amplitude de vibração horizontal no meio do vão vs. Frequência. $A_{gx} = 0.8g$.	164
Figura 6.21 – Amplitude de vibração vertical no meio do vão vs. Frequência. $A_{gy} = 0.8g$.	165
Figura 6.22 – Amplitude de vibração horizontal e vertical no meio do vão vs. Frequência. $A_{gx} = 0.8g$, $A_{gy} = 0.66A_{gx}$.	166
Figura 7.1 – Registo de aceleração e FDEP. a) Aceleração do sismo Kobe, componente Leste-Oeste. b) FDEP sismo Kobe. c) Aceleração do sismo El Centro, componente Norte-Sul. d) FDEP sismo El Centro.	168
Figura 7.2 – Registo de aceleração artificiais gerados a partir do sismo El Centro.	170
Figura 7.3 – Registo de aceleração artificiais gerados a partir do sismo Kobe.	171
Figura 7.4 – Geometria e parâmetros de pórtico plano PT-1. Parâmetros da mola elasto-plástica: $kr = 5 * 10^{10} Nm/rad$, $kep = 0.1 * kr$, $M_p = 105 Nm$.	172
Figura 7.5 – Resposta de deslocamento e aceleração no centro do vão central. Sismo Kobe (1995).	173
Figura 7.6 – Resposta de deslocamento e aceleração no centro do vão. Sismo El Centro (1940).	174
Figura 7.7 – Relação momento-rotação no apoio elasto-plástico.	175
Figura 7.8 – Resposta de deslocamento e aceleração horizontal no topo de PT-1. SAKB1.	176
Figura 7.9 – Resposta de deslocamento e aceleração no centro do vão.	177
Figura 7.10 – Relação momento rotação no apoio elasto-plástico.	178
Figura 7.11 – Superior: FDEP com concentração de potência nas regiões de ressonância. Inferior: Amplitude de vibração horizontal no topo de PT-1 sob aceleração harmônica com componente horizontal e vertical.	182
Figura 7.12 – Aceleração do sismo SAPCP1.	183
Figura 7.13 – Deslocamento e aceleração horizontal do topo de PT-1 submetido ao sismo artificial SAPCP1.	184

Figura 7.14 – Geometria e propriedades de galpão a duas águas GPD-1. Parâmetros da mola elasto-plástica:	
$kr = 5 * 1010Nm/rad, kep = 0.1 * kr, Mp = 105Nm .$	185
Figura 7.15 – Deslocamento horizontal do meio do vão (topo da estrutura).	186
Figura 7.16 – Relação momento-rotação no apoio elasto-plástico.	187
Figura 7.17 – Deslocamento horizontal no meio do vão central.	188
Figura 7.18 – Relação momento rotação no apoio elasto-plástico.	189
Figura 7.19 – Superior: FDEP com concentração de potência nas regiões de ressonância. Inferior: Amplitude de vibração horizontal no topo de PT-1 sob carga harmônica com aceleração horizontal e vertical.	192
Figura 7.20 – Aceleração do sismo SAPCG1.	192
Figura 7.21 – Deslocamento e aceleração horizontal do topo de GPD-1 submetido ao sismo artificial SAPCP1.	193
Figura 7.21 – Geometria e parâmetros de galpão a duas águas GPA-1. Parâmetros da mola elasto-plástica:	
$kr = 5 * 1010Nm/rad, kep = 0.1 * kr Mp = 105Nm.$	195
Figura 7.24 – Superior: FDEP com concentração de potência nas regiões de ressonância.	197
Figura 7.24 – Deslocamento horizontal no meio do no topo de GPA-1, com sismo replicado.	199
Figura 7.25 – Deslocamento horizontal no meio do no topo de GPA-1, sismos sucessivos alternados.	200

Listas de Tabelas

Tabela 2-1. Estrutura do Arranjo de coeficientes de Butcher	68
Tabela 2-2. Arranjo de Butcher do método clássico de RK4 (Butcher,2003)	69
Tabela 2-3. Coeficientes de Niström de sexta ordem (Butcher,2003)	70
Tabela 2-4. Arranjo de coeficientes para o método de RKF45 (Butcher,2003)	71
Tabela 2-5. Arranjo de Butcher para o método de RKG4	73
Tabela 2-6. Esquema do algoritmo de Newmark para problema não linear	75
Tabela 2-7. Esquema do algoritmo de Runge-Kutta para problema não linear	77
Tabela 4-1. Parâmetros físicos e geométricos da estrutura T-1	102
Tabela 4-2. Parâmetros físicos e geométricos da estrutura T-2	102
Tabela 4-3. Parâmetros físicos e geométricos do arco Ac-1	105
Tabela 4-4. Três primeiras frequências e períodos de vibração da torre T-1	105
Tabela 4-5. Tempo de processamento para análise de T-1	108
Tabela 4-6. Δt máximo mantendo estabilidade na ressonância	108
Tabela 6-1. Frequências e períodos de vibração	146
Tabela 6-2. Primeiras quatro frequências vibração	154
Tabela 6-3. Primeiras quatro frequências	162
Tabela 7-1. Deslocamento e aceleração máxima no topo de PT-1 obtidos com o sismo real e artificiais a partir de El Centro	179
Tabela 7-2. Deslocamento e aceleração máxima no topo de PT-1 obtidos com o sismo real e artificiais a partir do registro de Kobe	180
Tabela 7-3. Deslocamento e aceleração máxima no topo de PT-1	184

Tabela 7-4. Deslocamento e aceleração máxima no topo de GPD-1 obtidos com o sismo real e sismos artificiais a partir do sismo El Centro	190
Tabela 7-5. Deslocamento e aceleração máxima no topo de GPD-1 obtidos com o sismo real e sismos artificiais a partir do sismo Kobe	191
Tabela 7-6. Deslocamento e aceleração máxima no topo de GPD-1 obtidos com potências concentradas	194
Tabela 7-7. Deslocamento e aceleração máxima no topo de GPA-1 obtidos com sismos reais e artificiais a partir do sismo Kobe	195
Tabela 7-8. Deslocamento e aceleração máxima no topo de GPA-1 obtidos com o sismo real e artificiais a partir do sismo El Centro	196
Tabela 7-9. Deslocamento e aceleração máxima no topo de GPD-1 obtidos com potências concentradas	197

Lista de Símbolos

a_{ij}	Coefficiente de arranjo de Butcher;
A	Área da seção transversal do elemento, Amplitude de vibração;
A_i	I-ésimo coeficiente de um polinômio que define uma função de interpolação, Amplitude de harmônico;
A_n, B_n	Coefficientes da série de Fourier;
A_n	Enésimo Vetor de Amplitudes modais em coseno;
A_1	Vetor global de Amplitudes modais em coseno;
\bar{A}	Vetor global de Amplitudes modais;
b_i	Coefficiente de arranjo de Butcher;
$B(x)$	Matriz de relação cinemática deslocamento- deformação;
B_n	Enésimo Vetor de Amplitudes modais em seno;
B_1	Vetor global de Amplitudes modais em seno;
c	Coefficiente de amortecimento;
c_i	Coefficiente de arranjo de Butcher;
C	Matriz de amortecimento de um elemento;
C	Matriz global de amortecimento;
$C(\tau)$	Matriz auxiliar;
\bar{C}	Matriz equivalente de amortecimento no domínio da frequência;
C_i	Valor da função densidade de espectro de potência;
e	Parcela linear de deformação longitudinal;
E	Módulo de elasticidade de Young;
$f(t)$	Campo de forças externas variável no tempo;
f	Frequência de excitação de carregamento harmônico.
$f(x, t)$	Função arbitrária dependente do tempo e da coordenada longitudinal;
f_i	Valor i-ésimo de função discreta;
$f(t)$	Função arbitrária dependente do tempo;
$f(x)$	Função arbitrária dependente da coordenada x ;
F_i	Campo de forças internas em um elemento;
F_a	Vetor de forças internas de um sistema aumentado;
F_{aux}	Vetor auxiliar de forças internas;
F_{int}	Vetor de Forças nodais internas em um elemento em coordenadas locais;
F_e	Vetor de Forças nodais externas em um elemento em coordenadas locais;
F_{ig}	Vetor de Forças internas nodais em um elemento em coordenadas globais;
F_r	Vetor de forças de referencia em um elemento;
F_e	Vetor global de forças nodais externas;
F_i	Vetor global de forças nodais internas;
F_r	Vetor global de forças de referencia;
\hat{F}	Vetor global de forças equivalente no método de Newmark;

\bar{F}	Vetor de amplitudes de força externa no domínio da frequência;
\bar{F}_i	Vetor de amplitudes de força externa no domínio da frequência;
F_n	Valor enésimo de função transformada discreta;
$F(\xi)$	Transformada de Fourier da função $f(\eta)$;
g	Resíduo de equação de restrição;
h	Altura da seção transversal;
H_i	I-éssima função de interpolação;
$H(x)$	Matriz que contem as funções de interpolação;
$I(t)$	Função de intensidade no tempo;
I	Momento de inércia da seção transversal do elemento viga-coluna;
i, j	Índice contador de uma série de elementos;
I_3	Matriz identidade de ordem 3x3;
k_r, k_h	rigidez de elemento unidimensional que modela solo em rotação e translação;
k_r^{EP}, k_h^{EP}	rigidez de elemento unidimensional que modela solo em rotação e translação em regime elasto-plástico;
k	Índice contador de iterações;
k_i	Coefficiente de aproximação de tangente nos métodos de Runge-Kutta;
K_a	Matriz de rigidez aumentada;
K_L	Matrix de rigidez Linear;
K_τ	Matrix de rigidez Dependente do estado de tensão;
Ke	Matriz de rigidez equivalente do elemento coordenadas locais;
Ke_g	Matriz de rigidez equivalente do elemento coordenadas globais;
K_{aux}	Matriz de rigidez auxiliar;
K	Matriz global de rigidez
\bar{K}	Matriz de rigidez equivalente no método de Newmark;
$\bar{K}(\omega)$	Matriz de impedância;
L	Comprimento do elemento e/ou estrutura;
M	Matriz de massa de um elemento;
M	Matriz global de massa;
\bar{M}	Matriz equivalente de Massa no domínio da frequência;
M	Momento Fletor;
n	Número contador associado a uma equação;
N, N	Esforço normal, Número total de elementos de um grupo;
P	Força axial;
Q	Esforço cortante;
R	Resíduo a minimizar;
\bar{r}	Vetor global de referencia de deslocamentos de corpo rígido
R	Vetor global de forças desbalanceadas;
R	Vetor de forças de reação de base;
$R(\omega, \bar{A})$	Resíduo de forças na frequência;
S	Área superficial de um elemento;
S_c	Rigidez de modelo de ligação rotacional;
$S(\tau)$	Matriz espectral modal;
t	Tempo;
tol	Tolerância;
T	Matriz de rotação;
T'	Matriz de rotação equivalente;

\mathbf{t}'	Submatriz de rotação equivalente;
$\bar{\mathbf{T}}$	Matriz de transformação cinemática;
T	Período de tempo, Indicador temporal, Período de vibração;
\ddot{u}_g	Função de aceleração de base;
\mathbf{u}	Vetor de deslocamentos nodais de um elemento;
\mathbf{u}_{aux}	Vetor uxiliar de deslocamentos nodais de um elemento;
U	Energia pontencial de deformação;
\mathbf{U}	Vetor global de deslocamentos nodais;
$\bar{\mathbf{U}}$	Vetor global de deslocamento nodais relativos à base;
V	Volume de um elemento;
W	Trabalho das forças externas;
W_n	Enésima componente complexa da transformada rápida de Fourier;
$\mathbf{u}(t)$	Campo de deslocamentos dependentes tempo;
$\dot{\mathbf{u}}(t)$	Campo de velocidades dependentes no tempo;
$\ddot{\mathbf{u}}(t)$	Campo de acelerações dependentes do tempo;
\mathbf{u}_N	Vetor de deslocamentos nodais em coordenadas naturais do elemento.
x	Coordenada horizontal, coordenada longitudinal;
y	Coordenada vertical, coordenada transversal;
x_0	Valor inicial arbitrário para x ;
X	Função de suposição de harmônicos;
\ddot{y}_{nc}	Função de aceleração sem correção de linha base;
\ddot{y}_{cc}	Função de aceleração com correção de linha base;
Y_n	Enésima componente par da transformada rápida de Fourier;
z	Coordenada transversal do espaço;
Z_n	Enésima componente ímpar da transformada rápida de Fourier;
\mathbf{Z}	Função auxiliar no método de integração Runge-Kutta em sistemas dinâmicos;
$\mathbf{0}$	Vetor de componentes nulas;

Operadores

$sign(..)$	Operador que calcula o sinal de um número real;
$floor(..)$	Operador que devolve o valor absoluto do inteiro mais próximo;
$\mathfrak{F} (..)$	Operador que aplica a transformada de Fourier;
$\mathfrak{F}^{-1}(..)$	Operador que aplica a transformada inversa de Fourier;

Símbolos gregos

α_i	Í-essimo ângulo de fase;
β	Coefficiente de Newmark;
$\Delta\epsilon$	Incremento de deformação;
Δu	Incremento de deslocamento longitudinal;
Δv	Incremento de deslocamento transversal;
$\Delta\eta$	Parcela não linear do incremento de deformação;
Δl	Parâmetro de incremento de arco;
δ	Deformação longitudinal; Variação;
Δ	Fração ou incremento de uma grandeza;

λ	Parâmetro de carga;
ξ	Taxa de amortecimento;
θ	Deformação rotacional;
γ	Coefficiente de Newmark;
ρ	Densidade de material;
$\Delta\Pi$	Variação da energia potencial total;
τ	Tensor de tensões, coordenada de tempo periódico
μ	Coefficiente de proporcionalidade;
φ	Coefficiente de proporcionalidade no método do controle de arco;
$\phi_{ff}(\omega)$	Função densidade de espectro de potência;
ϕ	Rotação relativa entre elemento e ligação;
Φ	Vetor que define modo de vibração;
Ψ	Rotação de corpo rígido;
Ψ	Função arbitrária de ponderação;
ω	Frequência circular de vibração/excitação externa;

Siglas

Ac-1	Modelo de arco abatido;
FDEP	Função densidade espectro de Potencia de uma função no tempo;
FFT	Transformada rápida de Fourier;
GPD-I	Modelo de galpão a duas águas;
GPA-I	Modelo de galpão com cobertura em arco;
MBH	Método do Balanço Harmônico;
Po-2	Modelo de pórtico de dois andares;
PT-I	Modelo de pórtico plano de um andar;
Po-6	Modelo de pórtico de seis andares;
PK-II	Segundo tensor de Piola-Kirchhof;
RLT	Referencial Lagrangiano Total;
RLA	Referencial Lagrangiano Atualizado;
T-1	Modelo de torre esbelta;
T-2	Modelo torre esbelta com massa concentrada no topo;

“Engineers ... are not superhuman. They make mistakes in their assumptions, in their calculations, in their conclusions. That they make mistakes is forgivable; that they catch them is imperative. Thus it is the essence of modern engineering not only to be able to check one’s own work but also to have one’s work checked and to be able to check the work of others.”

Henry Petrosky

1 Introdução

1.1. Considerações Iniciais

A resposta dos sistemas estruturais com a consideração de uma base flexível tem sido objeto de grande interesse na dinâmica das estruturas. Isto porque a maioria das estruturas ou obras civis é apoiada direta ou indiretamente sobre sistemas de base que apresentam alguma flexibilidade, como estruturas apoiadas em solo ou sistemas de apoio com dissipação de energia como aqueles usados em sistemas de isolamento de base. Um tópico de particular interesse nesta área é o estudo da resposta dinâmica do sistema base-estrutura submetido a ações sísmicas. Os eventos sísmicos, originados por múltiplas causas, estão presentes em praticamente toda a superfície terrestre em menor ou maior intensidade e magnitude, e representam uma das solicitações dinâmicas mais complexas a serem analisadas na engenharia, tanto pela violência da sua ocorrência como pelo grande conteúdo de frequências que este tipo de solicitação pode apresentar. A importância do estudo deste tipo de ação considerando uma base flexível está ligada à potencial característica do sistema de base mudar suas propriedades mecânicas em função das frequências de vibração. Assim, a resposta da estrutura pode ser modificada de forma acentuada quando considerada uma base deformável em vez de uma base fixa convencional.

Na presente tese, que é uma continuação de pesquisas anteriores, é adotado como base para as implementações numéricas o programa computacional de análise não linear CA-ASA, iniciado por Silveira (1995), e que tem sido modificado com novas implementações no decorrer dos últimos anos por vários autores, formando uma linha de pesquisa orientada ao estudo de estruturas reticulares não lineares. A presente tese tem por base a versão do CA-ASA modificada por Silva (2009), que possui as ferramentas necessárias para a análise não linear estática e dinâmica de pórticos com consideração de plastificação de elementos estruturais e ligações semirrígidas com comportamento não linear. Na

presente tese são usadas as rotinas referentes à montagem e análise dinâmica no domínio do tempo de estruturas reticuladas pelo método de Newton-Raphson para sistemas com não linearidade geométrica. Sobre esta base computacional são feitas as modificações e incorporações necessárias ao estudo da flexibilidade dos apoios, inclusão de solicitação sísmica, algoritmos de integração numérica e demais ajustes necessários à simulação dos exemplos apresentados na presente tese.

1.2. Objetivos

A presente tese tem como objetivo estudar o comportamento não linear de estruturas reticulares planas flexíveis e esbeltas (vigas, pórticos, arcos, etc.) sob ações sísmicas, considerando o efeito da deformabilidade da base e a não linearidade geométrica, usando modelos unidimensionais elasto-plásticos para representar a base flexível. Ênfase é dada à análise dinâmica não linear no domínio da frequência e à obtenção das curvas de ressonância não linear. A partir destas ferramentas, estuda-se a variabilidade da resposta no tempo quando submetidos a diversas solicitações sísmicas reais e geradas artificialmente.

1.3. Revisão Bibliográfica

1.3.1. Não Linearidade Geométrica e Física

O estudo da não linearidade geométrica das estruturas tem sido um tema relevante na análise estrutural, especialmente no caso de estruturas esbeltas como pórticos, arcos, estruturas reticuladas, etc. Em virtude da esbeltes dos membros estruturais e/ou do sistema como um todo, elas são susceptíveis a sofrer grandes deslocamentos e/ou deformações, tornando estes sistemas sensíveis a perda de estabilidade ou danos. Na análise de sistemas estruturais não lineares, geralmente usa-se atualmente o método dos elementos finitos. Dentre as técnicas de análise não linear por elementos finitos, destaca-se o procedimento incremental-iterativo, onde em cada incremento ou passo de análise é calculado o equilíbrio da estrutura.

Referências básicas da análise não linear por elementos finitos podem ser encontrados em Bathe (1996) e Crisfield (1991).

No estudo da não linearidade geométrica, as formulações são divididas de acordo com o tipo de referencial usado. Os dois tipos de referenciais mais usados na literatura são o referencial Lagrangiano total (RLT), que é caracterizado por ter como sistema de referência a configuração inicial da estrutura indeformada, e o referencial Lagrangiano atualizado (RLA), onde o sistema de referência para cada passo de análise corresponde à configuração do sistema no passo anterior. Distintos pesquisadores têm desenvolvido formulações em referenciais Lagrangianos totais e atualizados. Galvão (2004) e Silva (2009) destacam os trabalhos feitos por Wen e Ramhinzadeh (1983), Chajes e Churchill (1987), Goto e Chen (1987), Wong e Tin-Loi (1990), Alves (1993), Torkamani *et al.* (1997) e Pacoste e Erikson (1995, 1997) como contribuições importantes no estudo de formulações Lagrangianas.

Estudos comparativos entre as formulações não lineares geométricas têm também despertado o interesse de muitos pesquisadores. Wong e Tin-Loi (1990) e Alves (1993b) mostraram que os resultados obtidos em referencial Lagrangiano total tendem a se afastar do comportamento real à medida que a configuração deformada se distancia da original. Galvão (2000) programou e comparou várias formulações não lineares, avaliando a sua eficiência computacional através do estudo de pórticos planos.

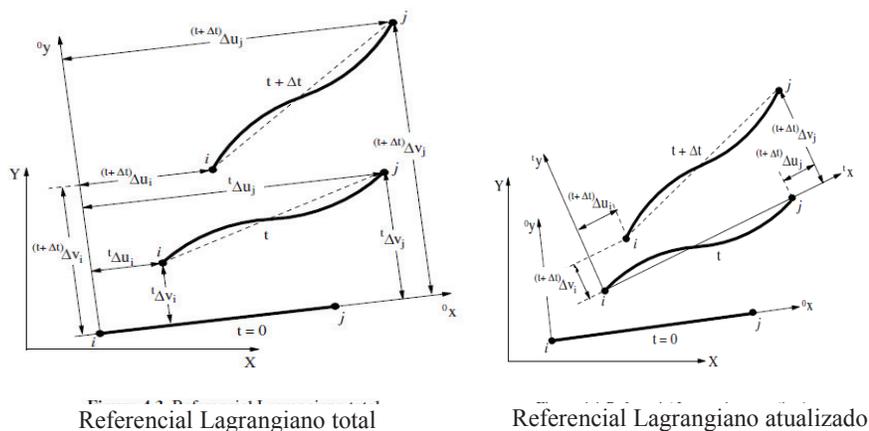


Figura 1.1 – Referenciais Lagrangianos. Ref. Silva (2009).

Outro tipo de referencial usado na análise não linear geométrica é o referencial corrotacional. Formulações baseadas em referencial corrotacional são caracterizadas por utilizarem eixos ortogonais ligados aos extremos dos elementos que se movimentam conjuntamente com as deformações. O cálculo da matriz de rigidez e do vetor de força interna é feito usando o campo dos deslocamentos naturais, ou seja, os que causam deformação efetiva no elemento. Dentre os autores que estudaram formulações em referencial corrotacional, pode-se citar: Wempner (1969), Belytscho e Hsieh (1973), Crisfield (1990) e Pacoste (1998). Na presente tese são empregadas apenas formulações em referencial Lagrangiano atualizado.

Além da não linearidade geométrica, a não linearidade física ou de material é um tópico importante na análise não linear de pórticos, em especial pórticos metálicos. Diversos pesquisadores têm estudado e proposto metodologias para a consideração de comportamentos não lineares do material em estruturas esbeltas. Dentre estes pode-se citar Chen e Sohal (1995), Chen *et al* (1996) e Chan e Chui (1997, 2000). Recentemente, Silva (2009) abordou este tema através do estudo de pórticos planos de material com comportamento elasto-plástico (ver Figura 1.2).

No caso de pórticos metálicos, o estudo do comportamento semirrígido das ligações é uma linha de pesquisa de muito interesse, já que a distribuição de esforços e a estabilidade deste tipo de estruturas variam sensivelmente com o tipo de ligação considerada. Distintos pesquisadores têm estudado o comportamento das ligações em estruturas metálicas. Galvão (2000) destaca como um dos primeiros estudos sobre a avaliação da rigidez de uma ligação metálica o trabalho de Wilson e Moore (1917) na Universidade de Illinois. Mais recentemente, pode ser citado o trabalho de Seculovic e Salatic (2001), que propuseram o elemento viga-coluna híbrido, incluindo a ligação como um grau de liberdade interna de rotação. Formulações para análise de pórticos com ligações semirrígidas podem ser encontradas também em Chen *et al*(1996), Chan e Chui (2000) e Xu (2001). Dentre os estudos mais recente em estruturas metálicas com ligações semirrígidas podem ser citados os trabalhos de Galvão (2004) e Silva (2009), que estudaram pórticos metálicos planos submetidos a cargas estáticas e dinâmicas. Silva (2009) inclui também a consideração do comportamento não linear físico do elemento em conjunto com o comportamento semirrígido não linear das ligações.

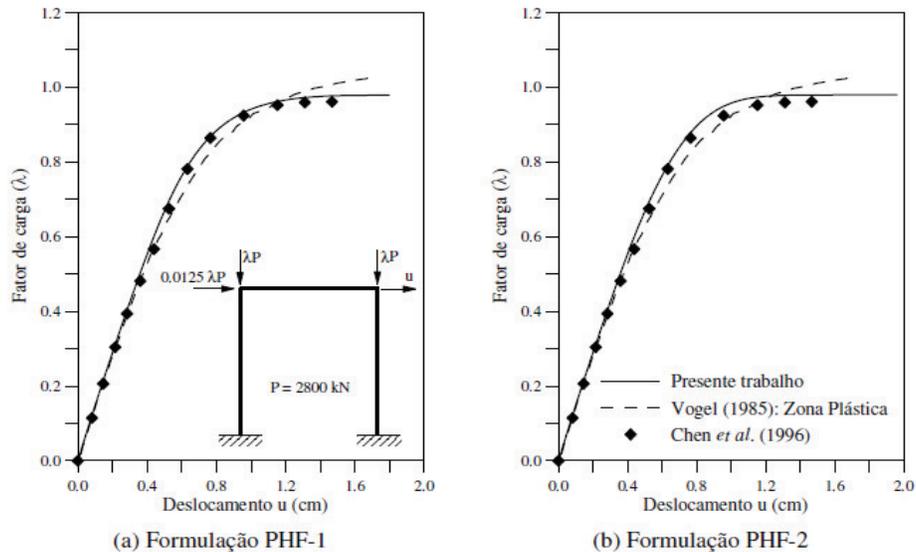


Figura 1.2 – Análise não linear geométrica e inelástica de pórtico metálico. Ref. Silva (2009).

1.3.2. Aspectos de Dinâmica Estrutural e Análise Sísmica

Dentro da análise estrutural, a dinâmica de estruturas constitui-se como um tópico de relevante importância, já que na prática as estruturas estão constantemente submetidas a ações que variam com o tempo. Vários fenômenos estruturais importantes, como a perda de estabilidade, são de natureza dinâmica. Conceitos básicos da dinâmica das estruturas podem ser encontrados, por exemplo, nos livros de Timoshenko e Young (1965), Clough e Penzien (1995) e Paz (1997).

Um item de relevante importância no estudo da análise dinâmica é o estudo de sistemas estruturais submetidos a excitações sísmicas. De diferentes origens, os fenômenos sísmicos estão presentes em praticamente toda a superfície terrestre em maior ou menor intensidade. Este item é abordado pelos autores anteriormente citados como uma subdivisão ou capítulo de suas correspondentes publicações. Em todas elas os sismos são representados por um deslocamento da base da estrutura. Chopra (1997) apresenta um estudo mais detalhado da chamada engenharia de sismos ou engenharia sísmica abordando diversos aspectos da análise linear de estruturas submetidas a eventos sísmicos. Recentemente, Villaverde (2009) publicou um amplo estudo dos conceitos básicos que envolvem

a engenharia de sismos, sendo esta publicação particularmente importante para a realização do presente trabalho, já que resume uma grande quantidade de aspectos práticos referentes a este assunto, tais como elementos de dinâmica estrutural, elementos de sismologia e métodos de solução para problemas dinâmicos com sismos.

Um aspecto importante na análise sísmica é a geração de sismos artificiais, isto porque geralmente os registros de aceleração sísmica no lugar de interesse normalmente são insuficientes, pouco disponíveis, ou não levam em conta as características particulares do lugar do projeto estrutural (condições de sítio). Nestes casos, é necessária a geração de registros artificiais, obtidos a partir de registros de sismos próximos, buscando sempre manter uma compatibilidade no conteúdo de frequências. Uma das formas mais adotadas para a geração de sismos é através do método de superposição aleatória de harmônicos, partindo de certo espectro de potência especificado em projeto ou de um sismo característico da região. Algoritmos simples para a geração de sismos artificiais são mostrados em Roehl (2000) e Park e Chang (1997), nos quais o sismo é gerado por superposição de harmônicos. A cada harmônico é adicionado um ângulo de fase gerado aleatoriamente, dando assim o caráter aleatório ao processo. Cabe ressaltar que a análise sísmica com fins de projeto deve levar em conta a característica aleatória do evento sísmico. Em adição à análise determinística, deve-se adotar um método de análise estocástica (Almeida, 2002).

Outro aspecto importante na análise dinâmica é o estudo dos sistemas estruturais não lineares no domínio da frequência, já que a resposta dinâmica de uma estrutura pode variar substancialmente segundo as propriedades em frequência do sistema e da excitação que age sobre esta, principalmente na análise de estruturas sob excitações sísmicas as quais possuem grande conteúdo de harmônicos. A distribuição e intensidade destes harmônicos, caracterizados pela função densidade de espectro de potência, pode dar a informação sobre a faixa de valores de frequências nas quais a potência do sismo é concentrada, sendo mais perigosos para as estruturas que possuem frequências de vibração natural próximas a estas regiões de concentração. Um desafio para analisar a resposta em frequência das estruturas é a transformação do sistema de equações não lineares de movimento, geralmente formulado no domínio do tempo, para o domínio da frequência. Para isto, diversos métodos têm sido propostos na literatura. Dentre

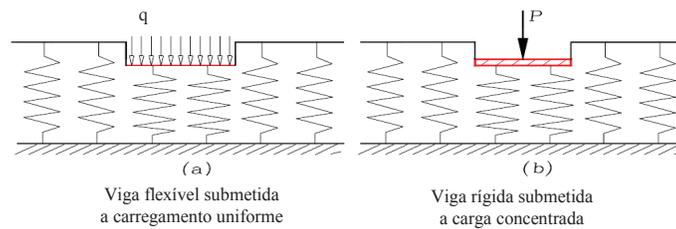
eles podem ser destacados métodos de transformação integral, tais como os métodos da transformada de Fourier e transformada de Laplace, usados por Fybra (1972) e Kim (2005) para analisar sistemas de vigas submetidos a cargas móveis ou por Wolf (1985) para analisar sistemas discretos submetidos a solicitações dinâmicas considerando iteração solo-estrutura. Um dos métodos mais populares para a passagem das equações de movimento para o domínio da frequência é o método do balanço harmônico, MBH. Lau *et al* (1981) formulou um processo incremental do método do balanço harmônico, para analisar vibrações não lineares em sistemas elásticos. Cheung e Chen (1990) estudaram as vibrações de sistemas com não linearidade cúbica associando o processo incremental ao método de Galerkin para a obtenção do sistema algébrico de equações não lineares. Já Chen *et al.* (2001), generaliza esta metodologia para a consideração de não linearidades cúbicas e quadráticas de sistemas reticulares modelados através de elementos finitos. Outro aspecto importante no uso do MBH é a solução do sistema algébrico de equações não lineares. Para isto são necessárias técnicas de solução tais como o método de Newton Raphson, usadas por Lau *et al* (1981), Cheung e Chen (1990) e Chen *et al* (2001). Porém este método não é apropriado se houver presença de pontos limites de frequência ao longo da curva amplitude-frequência. Para salvar estes inconvenientes são necessários métodos de continuação como o método do controle de arco usado por Ferreira e Serpa (2005).

Um tema de estudo que tem atraído recentemente a atenção dos pesquisadores no ramo análise de estruturas sob ações sísmicas é o estudo da resposta não linear de uma estrutura perante a uma sucessão ou repetição de eventos sísmico, centrado no efeito sobre a integridade do sistema estrutural. Podem ser citadas nesta área as publicações de Abdelnaby (2012), que estudou o efeito de vários sismos em sistemas de concreto reforçado, Liolios e Lioslios (2013), que estudou efeitos de ações sísmicas múltiplas sobre pórticos reforçados com elementos de cabo, e Sarno (2013), que estudou o efeito de ações sísmicas múltiplas sobre as resposta de sistemas inelásticos.

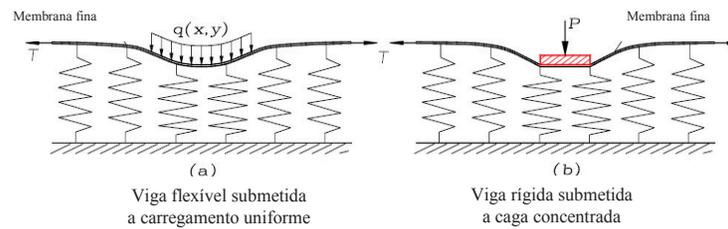
1.3.3. Consideração de base flexível

A interação base-estrutura torna-se um tópico imprescindível na abordagem de problemas de estruturas submetidas a sismos, já que a muitas estruturas são apoiadas sobre uma base deformável. A consideração de uma base flexível que interage com a estrutura tem sido estudada por uma grande quantidade de pesquisadores. Uma das hipóteses mais simples é considerar o sistema de base como um meio elástico (base elástica) que interage com a estrutura, como proposto em Hetenyi (1946), Vlasov (1960) e Aristizábal-Ochoa (2003). Com base nesta consideração, existe uma grande quantidade de modelos para representação da base considerada como meio elástico. Selvadurai (1979) descreve os modelos de fundação elástica mais usados na literatura. Este tipo de representação de base resulta vantajoso para a formulação do problema e sua posterior solução, porém não considera aspectos importantes intrínsecos à natureza de uma boa parte de sistemas de base flexível, tais como a não linearidade física, a propagação de ondas e a variação das propriedades da base com a frequência de vibração, principalmente quando se considera a interação solo-estrutura. No entanto, em alguns casos particulares, a hipótese de considerar o solo como meio elástico continua sendo usada como uma ferramenta útil, como pode ser observado nos trabalhos de Kim (2005), Nguyen (2008), Nguyen e Duhamel (2008), e Paullo (2010), onde se estudam vigas submetidas a cargas móveis apoiadas em fundação elástica. Os modelos mais utilizados na literatura são apresentados na Figura 1.3.

a) Modelo de Winkler



b) Modelo de Filomenko-Borodich



c) Modelo de Pasternak

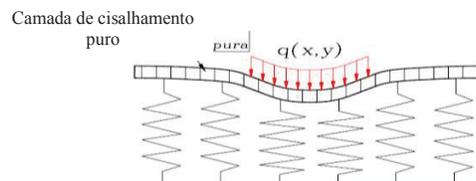
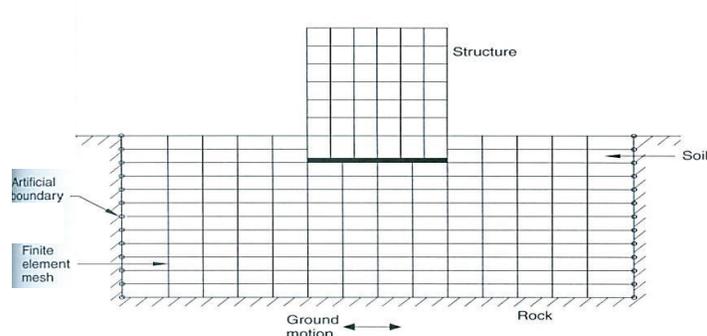


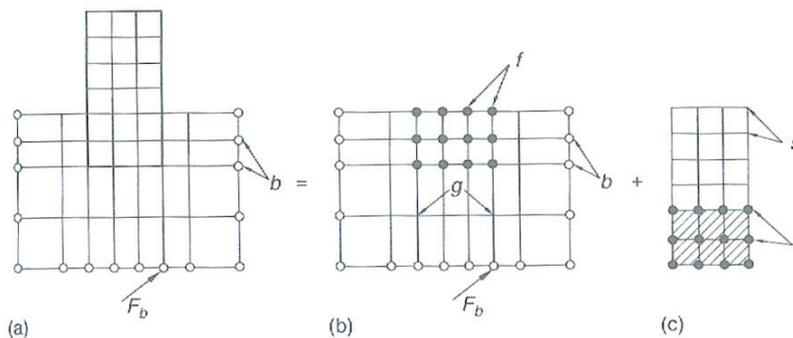
Figura 1.3 – Modelos de solo como meios elásticos contínuos. Ref. Paulo (2010).

Como indicado anteriormente, a hipótese de meio elástico pode ser uma ferramenta prática e de fácil emprego em alguns problemas. Porém, em muitos casos, é necessária a consideração de modelos mais precisos para modelar a base flexível, incluindo seu comportamento inelástico e variação de parâmetros de resistência com o tempo e a frequência. Formalmente, uma análise de interação base-estrutura em elementos finitos consiste em modelar conjuntamente o sistema de base como uma estrutura contínua com características próprias em contato com a superestrutura ou edificação. Para esta análise é necessário fazer uma estimativa da porção do sistema de base que interage com a estrutura. Neste tipo de análise conjunta são empregadas duas técnicas de análise. A primeira é chamada método direto, no qual é analisado conjuntamente o sistema de base e a estrutura como um único sistema. Esta técnica, embora seja a mais próxima do real, leva a um esforço de cálculo muito elevado, principalmente em análises dinâmicas. A segunda

técnica é a chamada subestruturação, que consiste em dividir o problema em dois sistemas, um formado pela porção do sistema de base que interage com a estrutura e outro formado pela estrutura. Nesta análise calcula-se em primeiro lugar a resposta do sistema de base e em uma segunda etapa é considerada a estrutura, sendo que a solicitação na estrutura corresponde à imposição de deslocamentos de base que foram calculados na primeira etapa. Este método é aplicado também por alguns softwares comerciais, por ser um processo mais rápido que o método direto. Estes métodos de análise são descritos em Villaverde (2009), quem aplica estes métodos para modelar a interação base-estrutura sendo a base composta por solo. As duas técnicas são ilustradas na Figura 1.4.



a) Método Direto



b) Método de Subestruturação

Figura 1.4 – Métodos diretos e de sub estruturação na análise de interação solo-estrutura. Ref. Villaverde (2009).

Uma referência básica no estudo do comportamento dinâmico da interação base-estrutura, quando a base é composta por solo, é o trabalho de Wolf (1985), que apresenta um estudo detalhado dos elementos que envolvem a análise da

interação solo-estrutura, tais como modelagem do solo, propagação de ondas no solo, modelagem da superestrutura, solução do sistema de equações, análise na frequência, entre outros. Estudos considerando o solo como um contínuo em geral requerem grande esforço de cálculo. Seu emprego é muito importante em problemas onde grande parte da estrutura está em contato com o solo, tais como túneis, estacas e pavimentos, entre outros. Trabalhos nesta área foram realizados por, dentre outros, Bull (1994), que desenvolveu um estudo do comportamento dinâmico de blocos de fundação, adotando o método de elementos finitos para modelar a estrutura e o método de elementos de contorno na modelagem do perímetro do solo. Hashash *et al.* (2001) estudaram estruturas subterrâneas sob ação sísmica, considerando propagação de ondas em meios não lineares. Dentre os últimos estudos podem ser mencionados os trabalhos de Alsaleh e Shahrour (2009), que estudam a influência do comportamento plástico do solo na interação solo-estrutura de estacas submetidas à ação sísmica, Sáez *et al* (2011), que estuda recalques em prédios causados por eventos sísmicos; e Clouteau *et al.* (2012), que estudam a interação entre prédios com apoios próximos, como ilustra a Figura 1.5.

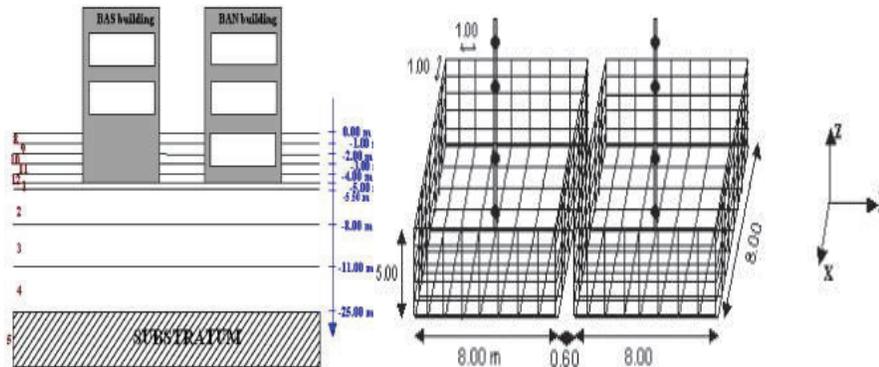


Figura 1.5 – Esquema e modelo de elementos finitos no estudo de interação estrutura-solo-estrutura através de modelo contínuo. Ref. Clouteau et al. (2009).

É importante destacar, que os métodos que modelam o sistema de base como um contínuo são os mais adequados quando o conhecimento do comportamento da resposta do sistema de base é de interesse, como, por exemplo, no estudo de fundações de estruturas de grande porte tais como túneis, viadutos, barragens e diques. Dentre estes estudos podemos citar os trabalhos de Carvalho (2001), que estuda problemas geotécnicos de sistemas solo-estrutura em túneis e

dutovias, acoplando o método de elementos finitos à transformada de Fourier para a redução do problema tridimensional a bidimensional, e o trabalho de Hurtado (2009), onde se estuda o potencial de liquefação de uma fundação de barragem pertencente a um sistema de lixiviação de minérios quando submetidos a eventos sísmicos. Em muitos problemas de interação base-estrutura, quando o objetivo principal é analisar a resposta da estrutura, o emprego de modelos simplificados que representem o sistema de apoio resulta em uma ferramenta útil e de análise significativamente mais rápida que os modelos contínuos. Uma aplicação desta metodologia é vista em Wolf (1994), que faz um amplo estudo de diversos problemas de interação solo-estrutura modelando o sistema de base composto por solo através de sistemas discretos do tipo mola-amortecedor, demonstrando que, em geral, esta simplificação fornece respostas próximas às obtidas com modelos contínuos. Um exemplo é ilustrado na Figura 1.6.

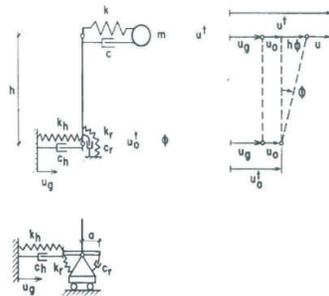


Figura 1.6 – Sistema discreto de interação base-estrutura. Ref. Wolf (1994).

Um estudo empregando esta técnica foi publicado por Halabian (2002), que representa a porção de sistema de base composta por solo que interage com a estrutura através de barras unidimensionais não lineares cujas componentes de rigidez e amortecimento são calculadas com base nas soluções fundamentais do solo (Figura 1.7).

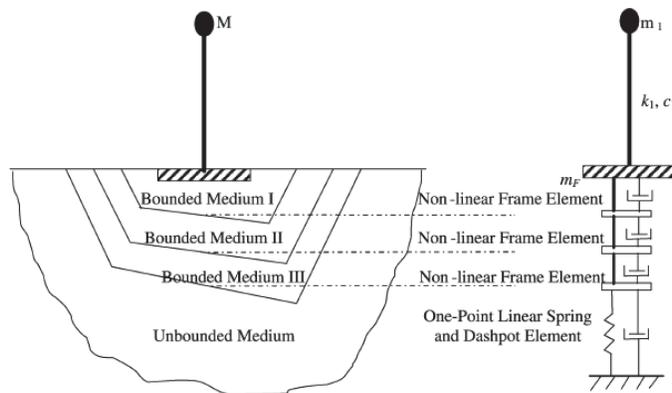


Figura 1.7 – Representação de solo por sistema de barras unidimensionais. Ref. Halabian (1994).

Esta metodologia é amplamente utilizada na atualidade para o estudo do comportamento de estruturas considerando o efeito de base flexível, com grande aplicabilidade na interação solo-estrutura. Por exemplo, Miquel e Bouaanani (2011) estudam uma estrutura esbelta submersa apoiada em uma fundação representada por um sistema de molas verticais e horizontais. Viana (2012) estuda a resposta de sistemas de pórticos submetidos a cargas cíclicas transmitidas por compressores alternativos, onde os apoios são sistemas de mola-amortecedor que simulam o solo de fundação. O trabalho mais recente encontrado nesta revisão bibliográfica com respeito ao tema é o artigo de Ganjavi e Hao (2012) que apresenta um estudo paramétrico de um sistema de vários graus de liberdade apoiado em uma base flexível, sendo esta representada por um sistema discreto mola-amortecedor, modelado segundo a metodologia de Wolf (1994) (veja Figura 1.6.).

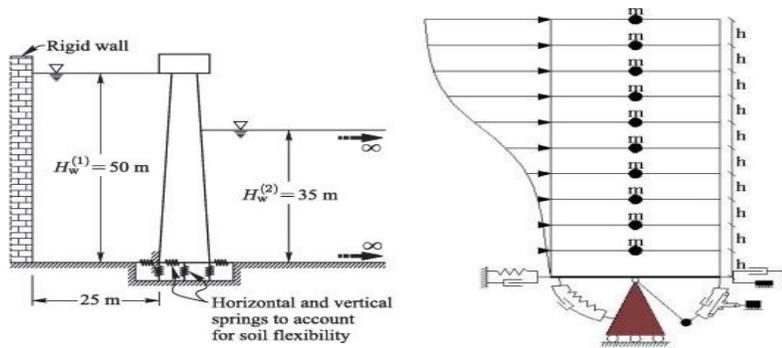


Figura 1.8 – Modelos unidimensionais de solo. Esquerda: Sistema de molas Ref. Miguel e Bouaanani (2011). Direita: Sistema de mola-amortecedor Ref. Ganjavi e Hao (2012).

1.4. Organização e Descrição da Tese

No presente Capítulo é feita uma pequena revisão bibliográfica sobre aspectos relacionados aos temas de estudo da presente pesquisa, tais como análise estática e dinâmica não linear de pórticos planos, solicitações sísmicas e interação solo-estrutura, sendo descrito em cada caso as técnicas e modelos utilizados na literatura.

No Capítulo 2 é apresentada a formulação do elemento finito não linear, inclusão de ligação semirrígida no elemento, formulação para análise dinâmica no domínio do tempo, algoritmos de integração no tempo e as adaptações na formulação dinâmica no tempo para a consideração da flexibilidade do solo que simule o efeito da interação solo-estrutura.

No Capítulo 3 é feita uma descrição resumida sobre aspectos relacionados com a excitação sísmica, assim como a formulação para a geração de sismos artificiais.

No Capítulo 4 são apresentados diversos exemplos numéricos para validação das formulações apresentadas nos Capítulos 2 e 3, assim como para o estudo de características dos sistemas submetidos à ação sísmica.

No Capítulo 5 é apresentada a formulação para a análise dinâmica não linear no domínio da frequência, onde são descritas as técnicas usadas para a passagem do sistema de equilíbrio dinâmico no domínio do tempo para o domínio da frequência e para a resolução do sistema algébrico de equações não lineares.

No Capítulo 6 são apresentados exemplos de validação da formulação apresentada no Capítulo 5, assim como é feito o estudo em frequência de pórticos esbeltos considerando não linearidade geométrica.

No Capítulo 7 é apresentado o estudo de sistemas reticulares esbeltos submetidos a ações sísmicas reais e artificiais gerados a partir de espectros de potência dos sismos reais e com concentração de potência nas regiões de ressonância.

Finalmente, no Capítulo 8 são descritas as conclusões do trabalho realizado e as sugestões para a continuação da presente pesquisa em trabalhos futuros.

2 Formulação Não Linear Estática e Dinâmica no Domínio do Tempo

Neste Capítulo são descritas todas as formulações necessárias para a análise não linear estática e dinâmica no domínio do tempo de estruturas reticulares no plano. Estão incluídos neste Capítulo: a formulação do elemento finito de tipo barra, a discretização do sistema estrutural, a consideração da flexibilidade da base, o equilíbrio dinâmico no domínio do tempo, as técnicas para solução de sistemas de equações não lineares e os algoritmos empregados na integração direta das equações de movimento linear e não linear.

2.1. Formulação do Elemento Finito Não Linear

Muitos pesquisadores têm estudado diversas formulações para a medição de deformações nos elementos estruturais que consideram os efeitos de grandes deslocamentos e grandes deformações. Neste contexto, podem ser citados os trabalhos feitos por Wen e Ramhinzadeh (1983), Chajes e Churchill (1987), Goto e Chen (1987), Wong e Tin-Loi (1990), Alves (1993), Torkamani *et al.* (1997), Pacoste e Erikson (1995, 1997), Galvão (2000,2004) e Silva (2009), os quais fornecem contribuições importantes no estudo de formulações Lagrangianas ou materiais. Nesta seção são descritas as formulações de elementos finitos para elementos tipo barra, usadas no presente trabalho. Cabe salientar que, como o foco da presente tese está no estudo de estruturas esbeltas, são consideradas apenas as deformações geradas pela flexão dos elementos estruturais, ou seja, seguindo a teoria de Euler Bernoulli.

2.1.1. Medidas de deformação não linear

Na presente tese são empregadas duas formulações não lineares para medidas de deformação que utilizam o referencial Lagrangiano atualizado. Estas

formulações estão baseadas na hipótese de viga-coluna de Euler-Bernoulli, as quais estão descritas a seguir.

2.1.1.1. Formulação Não Linear FN1

Andrade (1993) apresenta uma formulação baseada na teoria de Euler-Bernoulli que emprega o referencial Laringiano atualizado. Considerando o tensor de deformações de Green Lagrange, o incremento de deformação axial total do é dado por:

$$\Delta \varepsilon_{xx} = \frac{d\Delta u}{dx} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\Delta u}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\Delta v}{dx} \right)^2 \right] \quad (2.1)$$

onde Δu é o incremento do deslocamento longitudinal e Δv é o incremento de deslocamento transversal da seção, considerado constante para toda a seção, tal como pode ser visto na Figura 2.1. A equação (2.3) pode ser expressa na seguinte forma aditiva:

$$\Delta \varepsilon_{xx} = \Delta e_{xx} + \Delta \eta_{xx} \quad (2.2)$$

onde Δe_{xx} e $\Delta \eta_{xx}$ são as parcelas linear e não linear, respectivamente, e que são expressas em função dos deslocamentos da linha neutra através de:

$$\begin{aligned} \Delta e_{xx} &= \frac{d\Delta u}{dx} - y \frac{d^2 \Delta v}{dx^2} \\ \Delta \eta_{xx} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\Delta u}{dx} \right)^2 - 2y \left(\frac{d\Delta u}{dx} \frac{d^2 \Delta v}{dx^2} \right) + \left(y \frac{d^2 \Delta v}{dx^2} \right)^2 + \left(\frac{d\Delta v}{dx} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.3)$$

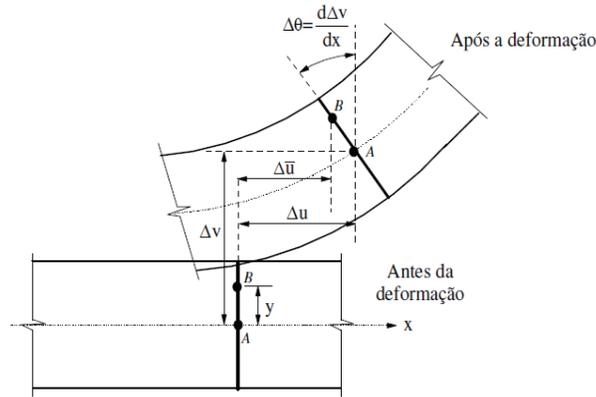


Figura 2.1 – Comportamento da seção transversal do elemento barra. Ref. Silva (2009).

Cabe destacar que, como mencionado em Galvão (2000) e Silva (2009), esta formulação é conveniente quando há pequenas rotações. Portanto, para análise de rotações moderadas é necessário adotar uma formulação que contenha mais termos não lineares para minimizar o erro da aproximação.

2.1.1.2. Formulação Não Linear FN2

Esta teoria, formulada por Yang e Kuo (1994) e usada por Galvão (2004), e mais recentemente por Silva (2009), é também baseada na teoria de Euler-Bernoulli e utiliza o referencial Lagrangiano atualizado. Nesta formulação, são consideradas duas componentes do tensor de Green-Lagrange, ou seja:

$$\Delta \varepsilon_{xx} = \Delta e_{xx} + \Delta \eta_{xx}, \quad \Delta \varepsilon_{xy} = \Delta e_{xy} + \Delta \eta_{xy} \quad (2.4)$$

sendo as parcelas lineares e não linear de cada componente são dadas por:

$$\begin{aligned} \Delta e_{xx} &= \frac{d\Delta u}{dx} - y \frac{d^2 \Delta v}{dx^2} \\ \Delta e_{xy} &= 0 \\ \Delta \eta_{xx} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\Delta u}{dx} \right)^2 - 2y \left(\frac{d\Delta u}{dx} \frac{d^2 \Delta v}{dx^2} \right) + \left(y \frac{d^2 \Delta v}{dx^2} \right)^2 + \left(\frac{d\Delta v}{dx} \right)^2 \right] \\ \Delta \eta_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{d\Delta u}{dx} \frac{d\Delta v}{dx} + \frac{d\Delta v}{dx} \frac{d^2 \Delta v}{dx^2} \right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Cabe ressaltar a existência de outras formulações que consideram o aporte da deformação cisalhante, baseadas na teoria de Timoshenko ou similares, como a mostrada em Silva (2009). Porém, o presente estudo destina-se à análise de estruturas aperticadas compostas por elementos esbeltos onde o efeito cisalhante é reduzido. Como é mencionado em Silva (2009), o emprego de funções lineares para aproximação da deformação axial pode levar ao efeito de membrana. Para reduzir este efeito, é adotada a sugestão de Crisfield (1991) que considera um valor médio do termo $\left(\frac{d\Delta v}{dx}\right)^2$ na parcela não linear da deformação axial, isto é:

$$\eta_{xx} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\Delta u}{dx}\right)^2 - 2y \left(\frac{d\Delta u}{dx} \frac{d^2\Delta v}{dx^2}\right) + \left(y \frac{d^2\Delta v}{dx^2}\right)^2 + \frac{1}{L} \int_0^L \left(\frac{d\Delta v}{dx}\right)^2 dx \right] \quad (2.6)$$

A equação anterior também é válida para a formulação não linear FN1.

2.1.2.

Forças Internas Resultantes e Energia Potencial Total

Para o caso da análise utilizando o referencial Lagrangiano atualizado, os esforços internos resultantes em um instante de análise t são calculados a partir de:

$${}^tN = \int_A {}^t\tau_{xx} dA, \quad {}^tQ = \int_A {}^t\tau_{xy} dA, \quad {}^tM = \int_A {}^t\tau_{xx} y dA \quad (2.7)$$

onde N , Q e M são a força axial, força cortante e momento fletor, respectivamente, e τ_{xx} e τ_{xy} são as componentes axial e cisalhante do segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff (PK-II). A configuração deformada inicial no instante t , assim como os esforços iniciais nos extremos do elemento no mesmo instante de tempo, são mostrados na Figura 2.2.

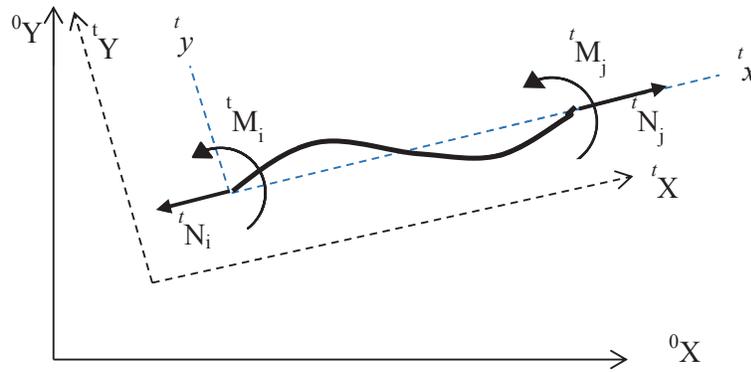


Figura 2.2 – Configuração deformada inicial e esforços nas extremidades.

Segundo a configuração mostrada na Figura 2.2, os esforços internos ao longo do elemento podem ser calculados como:

$$\begin{aligned}
 {}^tN &= {}^tN_i \\
 {}^tM &= -{}^tM_i + ({}^tM_i + {}^tM_j) \frac{{}^tx}{tL} \\
 {}^tQ &= -\frac{({}^tM_i + {}^tM_j)}{tL}
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Segundo a teoria de Bernoulli e considerando material elástico linear, a componente de tensão axial longitudinal pode ser escrita como:

$${}^t\tau_{xx} = E {}^t\varepsilon_{xx} \tag{2.9}$$

onde E é o módulo de Young. Já a componente cisalhante da tensão pode ser calculada, seguindo o proposto por Yang e Kuo (1994), por:

$${}^t\tau_{xy} = \frac{E}{2} \left[\left(y^2 - \frac{h^2}{4} \right) \frac{d^3\Delta v}{dx^3} + \left(y^2 - \frac{h^2}{4} \right) \frac{d\Delta u}{dx} \frac{d^3\Delta v}{dx^3} \right] \tag{2.10}$$

onde h é a altura da seção. O incremento energia potencial total do sistema, $\Delta\Pi$, pode ser expresso como:

$$\Delta\Pi = \Delta U + \Delta W \quad (2.11)$$

onde ΔU é o incremento da energia de deformação e ΔW é o trabalho das forças externas. Estas parcelas são dadas por:

$$\begin{aligned} \Delta U &= \int_V ({}^t\tau_{xx}\Delta\varepsilon_{xx} + 2{}^t\tau_{xy}\Delta\varepsilon_{xy})dV + \int_V \left(\frac{E}{2}\Delta\varepsilon_{xx}^2 + 2\Delta\tau_{xy}\Delta\varepsilon_{xy}\right)dV \\ \Delta W &= -\int_S {}^tF_i\Delta u_i dS - \int_S \Delta F_i\Delta u_i dS \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde F_i e ΔF_i são o campo de forças externas e o incremento de estas, respectivamente. A primeira integral em ΔU corresponde à energia devida às tensões iniciais no instante t , que é igual em módulo ao trabalho das forças internas no instante t , portanto cancelam-se dentro do funcional. Levando em conta as expressões (2.3) e (2.5), o funcional $\Delta\Pi$ pode ser reescrito como:

$$\Delta\Pi = U_L + U_{NL} - \int_S \Delta F_i\Delta u_i dS \quad (2.13)$$

onde U_L é a parcela de energia que independe dos deslocamentos, e portanto, pode ser considerada como a parcela linear da energia de deformação:

$$U_L = \int_V \frac{E}{2}\Delta\varepsilon_{xx}^2 dV \quad (2.14)$$

A parcela U_{NL} , que depende das tensões e que a sua vez dependem dos deslocamentos, pode ser calculada de duas formas. A primeira é considerando o sistema linearizado, ou seja, os diferenciais de ordem superior são desprezados (Galvão, 2004). Com esta hipótese, e levando em conta (2.8), U_{NL} é definido por:

$$U_{NL} = U_{\tau} = \int_0^L \left[\frac{{}^t N}{2} \left(\frac{d\Delta u}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\Delta v}{dx} \right)^2 + \frac{I}{A} \left(\frac{d^2 \Delta v}{dx^2} \right)^2 \right] dx + \int_0^L \frac{{}^t M}{2} \frac{d\Delta u}{dx} \frac{d^2 \Delta u}{dx^2} dx - \int_0^L \frac{{}^t Q}{2} \frac{d\Delta u}{dx} \frac{d\Delta v}{dx} dx \quad (2.15)$$

A segunda forma consiste em considerar as parcelas de ordem superior (Silva, 2009; Yang e Kuo, 1994). Assim, tem-se:

$$U_{NL} = U_{\tau} + U_1 + U_2 \quad (2.16)$$

com:

$$U_1 = \int_0^L \left[\frac{EA}{2} \left(\frac{d\Delta u^2}{dx} + \frac{d\Delta v^2}{dx} \right) + EI \frac{3}{2} \frac{d\Delta u}{dx} \left(\frac{d^2 \Delta v}{dx^2} \right)^2 + EI \frac{d\Delta u}{dx} \frac{d\Delta v}{dx} \frac{d^3 \Delta v}{dx^3} \right] dx$$

$$U_2 = \int_0^L \left[\frac{EA}{8} \left(\frac{d\Delta u^2}{dx} + \frac{d\Delta v^2}{dx} \right)^2 + \frac{EI}{8} \left(\frac{d\Delta u^2}{dx} + \frac{d\Delta v^2}{dx} \right) \left(\frac{d^2 \Delta v}{dx^2} \right) + EI \left(\frac{1}{2} \frac{d\Delta u}{dx} \frac{d^2 \Delta v}{dx^2} + \frac{d\Delta u^2}{dx} \frac{d\Delta v}{dx} \frac{d^3 \Delta v}{dx^3} \right) \right] dx^2 \quad (2.17)$$

Exemplos comparativos de formulações não lineares feitos em Silva (2009) mostram que não há diferença importante entre a consideração completa e linearizada, desde que sejam considerados pequenos incrementos na análise. Portanto, na presente tese, é adotada a formulação considerando o sistema linearizado. Silva (2009) chama a atenção que pelo fato que na formulação do elemento finito é usado um referencial Lagrangiano atualizado, é importante conhecer o estado de tensões ou de deformações no instante de análise t , a saber:

$${}^t \varepsilon = \frac{{}^t P}{EA} + \frac{y}{EI} \left[{}^t M_i - \frac{({}^t M_i + {}^t M_j)}{{}^t L} x \right] \quad (2.18)$$

2.1.3. Discretização do sistema por elementos finitos

A discretização no espaço do sistema estrutural é feita através de uma malha de elementos finitos de viga-coluna, cuja formulação cinemática foi descrita na seção anterior. Os campos de deslocamentos axial e transversal destes elementos, u e v respectivamente, são aproximados por duas famílias de funções. Os deslocamentos axiais são aproximados através de funções de interpolação lineares. Já os deslocamentos transversais são aproximados através de funções polinomiais de terceiro grau conhecidas como funções Hermitianas. Portanto, os deslocamentos desses campos de deslocamento podem ser obtidos como:

$$\Delta u = \sum_{i=1}^2 H_i(x) \Delta u_i, \Delta v = \sum_{i=3}^6 H_i(x) \Delta u_i \quad (2.19)$$

Onde Δu_i é o deslocamento do i -ésimo grau de liberdade do elemento (ver Figura 2.3), e as funções de interpolação $H_i(x)$ são dadas por:

$$\begin{aligned} H_1(x) &= \frac{x}{L}, H_2(x) = 1 - \frac{x}{L}, H_3(x) = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \\ H_4(x) &= x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}, H_5(x) = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}, H_6(x) = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^3} \end{aligned} \quad (2.20)$$

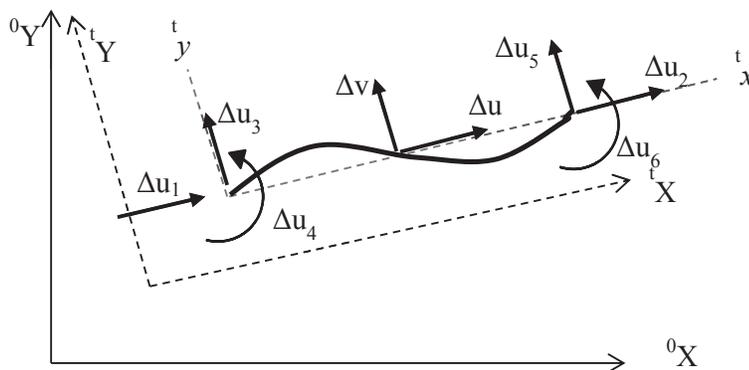


Figura 2.3 – Graus de liberdade do elemento finito de viga-coluna.

2.1.4.

Matriz de rigidez, vetor de forças internas e equilíbrio estático

Introduzindo (2.20) em (2.13) e levando em conta as relações cinemáticas (2.5) e (2.6), assim como as relações constitutivas dadas em (2.9) e (2.10), chega-se ao funcional do incremento de energia total em função do incremento dos deslocamentos nodais (Alves, 1993; Galvão, 2004; e Silva, 2009) através de:

$$\Delta\Pi = \frac{1}{2}\Delta\mathbf{u}^T(\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\tau)\Delta\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}^T {}^t\mathbf{F}_{int} - \Delta\mathbf{u}^T{}^{t+\Delta t}\lambda\mathbf{F}_r \quad (2.21)$$

onde, $\Delta\mathbf{u}$ é o incremento dos deslocamentos nodais, ${}^t\mathbf{F}_{int}$ é o vetor de esforços internos no instante t , \mathbf{F}_r é o vetor de referencia das forças externas, λ é o parâmetro de intensidade de carga externa, \mathbf{K}_L é a matriz de rigidez elástica linear e \mathbf{K}_τ a matriz de rigidez dependente dos esforços internos. As matrizes de rigidez são dadas por:

$$\mathbf{K}_{L_{i,j}} = \frac{\partial^2 U_L}{\partial \Delta\mathbf{u}_i \partial \Delta\mathbf{u}_j}$$

$$\mathbf{K}_{\tau_{i,j}} = \frac{\partial^2 U_\tau}{\partial \Delta\mathbf{u}_i \partial \Delta\mathbf{u}_j} \quad (2.22)$$

É importante salientar que a matrizes de rigidez \mathbf{K}_L e \mathbf{K}_τ , definidas em (2.22), encontram-se no sistema local de coordenadas x, y . Aplicando o princípio de energia potencial estacionária, chega-se à seguinte equação de equilíbrio estático do sistema em coordenadas locais, a saber:

$$(\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\tau)\Delta\mathbf{u} + {}^t\mathbf{F}_{int} - {}^{t+\Delta t}\lambda\mathbf{F}_r = \mathbf{0}, \text{ ou}$$

$$\Delta\mathbf{F}_{int} + {}^t\mathbf{F}_{int} - {}^{t+\Delta t}\lambda\mathbf{F}_r = \mathbf{0} \quad (2.23)$$

Para eliminar modos espúrios decorrentes de deslocamentos de corpo rígido, Yang e Kuo (1994) propõem calcular o incremento de força interna através dos deslocamentos naturais de cada elemento. Assim, tem-se:

$$\Delta\mathbf{F}_{int} = (\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\tau)\Delta\mathbf{u}_N \quad (2.24)$$

onde:

$$\Delta \mathbf{u}_N^T = [0 \quad 0 \quad \theta_{ci} \quad \delta \quad 0 \quad \theta_{cj}] \quad (2.25)$$

com:

$$\delta = {}^{t+\Delta t}L - {}^tL, \theta_{ci} = \Delta\theta_i - \Psi, \theta_{cj} = \Delta\theta_j - \Psi \quad (2.26)$$

sendo Ψ a rotação de corpo rígido.

2.1.5. Formulação do elemento com ligação semirrígida

A idealização de ligação perfeitamente rígida ou completamente flexível é pouco presente na realidade, principalmente nos sistemas estruturais compostos por pórticos de barras ligadas através de dispositivos externos, como é o caso de edificações em aço. Neste caso o comportamento das conexões ou ligações é um estado intermediário entre os comportamentos perfeitamente rígido ou flexível, existindo rotações relativas entre os elementos que são conectados por estas ligações. Nesta seção, é resumida uma formulação para a inclusão da presença de ligações semirrígidas nas extremidades do elemento finito, caso este possua tal ligação. Galvão (2004) e Silva (2009) apresentam formulações para a inclusão da ligação semirrígida com base nas formulações propostas por Chen *et al* (1996) e Chan e Chui (2000). Neste item é apresentada de forma resumida a formulação descrita em Galvão (2004) e Silva (2009).

Dado que a o grau de liberdade mais afetado pela existência de uma ligação semirrígida é a rotação do nó, a ligação pode ser idealizada como uma mola com uma determinada rigidez à rotação S_c . Então, pode ser considerada uma rotação relativa entre o nó, assumido externo, e a barra, tal como se mostra na Figura 2.4.

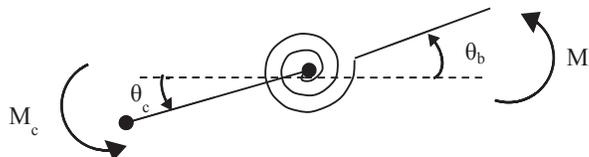


Figura 2.4 – Idealização de ligação semirrígida.

Na Figura 2.4, M_c , θ_c e M_b , θ_b são os momentos e rotações da conexão e do elemento de barra, respectivamente. Do equilíbrio de momentos na conexão, tem-se:

$$M_c = -M_b = S_c(\theta_c - \theta_b) \quad (2.27)$$

A relação incremental entre as rotações e momentos pode ser expressa de forma incremental como:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_c \\ \Delta M_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_c & -S_c \\ -S_c & S_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_c \\ \Delta \theta_b \end{Bmatrix} \quad (2.28)$$

A rigidez tangente da ligação semirrígida, S_c , é obtida por:

$$S_c = \frac{dM}{d\phi}, \quad \text{com } \phi = \theta_c - \theta_b \quad (2.29)$$

Considerando os dois extremos das barras, é possível identificar as seguintes relações:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{bi} \\ \Delta M_{ci} \\ \Delta M_{bj} \\ \Delta M_{cj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_c & -S_c & 0 & 0 \\ -S_c & S_c + K_{3,3} & K_{3,6} & 0 \\ 0 & K_{6,3} & S_c + K_{6,6} & -S_c \\ 0 & 0 & -S_c & S_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{bi} \\ \Delta \theta_{ci} \\ \Delta \theta_{bj} \\ \Delta \theta_{cj} \end{Bmatrix} \quad (2.30)$$

onde os termos $K_{i,j}$ correspondem aos termos da matriz de rigidez elástica do elemento viga-coluna. Os esforços nodais rotacionais e cisalhantes do elemento podem então ser representados pela seguinte expressão:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_i \\ \Delta Q_i \\ \Delta M_j \\ \Delta Q_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/L & 1/L \\ 0 & 1 \\ -1/L & -1/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta M_{ci} \\ \Delta M_{cj} \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

sendo os deslocamentos nodais dados por:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\theta_{ci} \\ \Delta\theta_{cj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/L & 0 & 1/L \\ 0 & 1/L & 1 & -1/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\theta_i \\ \Delta v_i \\ \Delta\theta_j \\ \Delta v_j \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$

Combinando as equações (2.28), (2.29), (2.30), (2.31) e (2.32), pode-se, por fim, obter a relação entre os esforços e deslocamentos nodais, ou seja:

$$\{\Delta F\} = [K_e]\{\Delta u\} \quad (2.33)$$

onde:

$$[S_c] = [A_1] \left([S_1] - \frac{1}{\beta} [S_1][S_2][S_1] \right) [A_1]^T \quad (2.34)$$

com:

$$[A]^T = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{L} & 0 & \frac{1}{L} \\ 0 & \frac{1}{L} & 1 & -\frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

$$[S_2] = \begin{bmatrix} S_{cj} + K_{6,6} & -K_{3,6} \\ -K_{6,3} & S_{ci} + K_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$[S_1] = \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix}$$

$$\beta = (S_{ci} + K_{3,3})(S_{cj} + K_{6,6}) - K_{3,6}K_{6,3} \quad (2.35)$$

A dimensão da matriz K_e é de ordem 4x4 e corresponde aos graus de liberdade de rotação e deslocamento transversal do elemento. Finalmente, a matriz de rigidez incluindo a possibilidade de ter duas molas nas extremidades é dada por:

$$[K_{sr}] = \begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & K_{1,3} & K_{1,1} & K_{1,2} & K_{1,3} \\ K_{2,1} & Ke_{2,2} & Ke_{2,1} & K_{2,1} & Ke_{2,6} & Ke_{2,5} \\ K_{3,1} & Ke_{1,2} & Ke_{1,1} & K_{3,1} & Ke_{1,6} & Ke_{1,5} \\ K_{4,1} & K_{4,2} & K_{4,3} & K_{4,1} & K_{4,2} & K_{4,3} \\ K_{5,1} & Ke_{6,2} & Ke_{6,1} & K_{5,4} & Ke_{6,6} & Ke_{5,6} \\ K_{6,1} & Ke_{5,2} & Ke_{5,1} & K_{6,4} & Ke_{6,5} & Ke_{5,5} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Quando houver um elemento com apenas uma conexão semirrígida, pode se utilizar a mesma formulação, em que se consideram valores de S_c apropriados a cada situação, ou seja, se um dos extremos for rígido, S_c será igual a uma constante de grande magnitude e se for uma articulação, $S_c = 0$.

Outra abordagem é considerar um sistema auxiliar onde as molas aparecem como graus de liberdade adicionais externos, tal como se mostra na Figura 2.5.

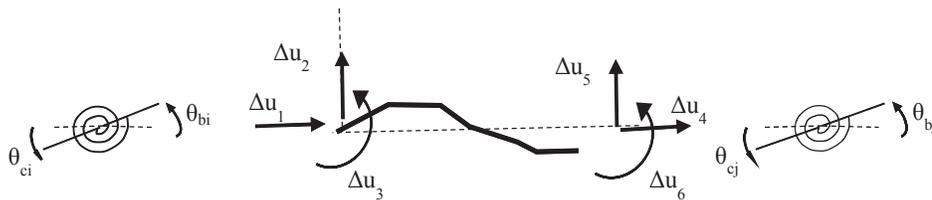


Figura 2.5 – Sistema auxiliar de barra com molas.

A matriz de rigidez do sistema auxiliar é dada por:

$$\begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{M}_i \\ \Delta \mathbf{F} \\ \Delta \mathbf{M}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_i & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{S}_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \boldsymbol{\theta}_i \\ \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \boldsymbol{\theta}_j \end{Bmatrix} \quad ou,$$

$$\Delta \mathbf{F}_{aux} = \mathbf{K}_{aux} \Delta \mathbf{u}_{aux} \quad (2.37)$$

onde $\Delta \mathbf{M}_i$, $\Delta \mathbf{M}_j$, \mathbf{S}_i , \mathbf{S}_j , $\Delta \boldsymbol{\theta}_i$, $\Delta \boldsymbol{\theta}_j$ são os vetores de momento, rigidez à rotação, e a rotação das extremidades inicial e final, respectivamente, definidas em (2.28). $\Delta \mathbf{F}$, \mathbf{K} e $\Delta \mathbf{u}$ são o vetor de esforços nodais, matriz de rigidez tangente e vetor de descolamentos nodais do elemento sem ligações, respectivamente. Considerando o sistema aumentado dado por:

$$\Delta \mathbf{F}_a = \mathbf{K}_a \cdot \Delta \mathbf{u}_a \quad (2.38)$$

onde:

$$\Delta \mathbf{F}_a = \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{F} \\ \Delta M_{bi} \\ \Delta M_{bj} \end{Bmatrix}, \quad \Delta \mathbf{u}_a = \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \theta_{bi} \\ \Delta \theta_{bj} \end{Bmatrix}, \quad (2.39)$$

é possível obter uma relação cinemática entre o sistema aumentado original e auxiliar, que relacione esforços e deslocamentos nodais, ou seja:

onde:

$$\bar{\mathbf{T}}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

A matriz \mathbf{K}_a pode ser calculada como:

$$\mathbf{K}_a = \bar{\mathbf{T}}^T \mathbf{K}_{aux} \bar{\mathbf{T}} \quad (2.42)$$

As duas últimas filas e colunas da matriz \mathbf{K}_a correspondem aos graus internos aumentados e identificados com o subscrito b. Assim, (2.37) pode ser reescrita como:

$$\begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{F} \\ \Delta \mathbf{M}_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{acc} & \mathbf{K}_{acb} \\ \mathbf{K}_{abc} & \mathbf{K}_{abb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \theta_b \end{Bmatrix} \quad (2.43)$$

Através da condensação estática é possível estabelecer uma relação entre $\Delta \mathbf{F}_{int}$ e $\Delta \mathbf{u}$ considerando as ligações semirrígidas, dada pela seguinte expressão:

$$\Delta \mathbf{F}_{int} = \mathbf{K}e. \Delta \mathbf{u} \quad (2.44)$$

onde \mathbf{Ke} é a matriz de rigidez equivalente do elemento que inclui o efeito da ligação semirrígida. A matriz \mathbf{Ke} pode ser obtida por condensação. Desta forma, tem-se:

$$\mathbf{Ke} = \mathbf{K}_{acc} - \mathbf{K}_{acb} \cdot \mathbf{K}_{abb}^{-1} \cdot \mathbf{K}_{abc} \quad (2.45)$$

2.1.6.

Matriz de rotação e montagem do sistema global estático

As deduções feitas para a obtenção do equilíbrio incremental estático são realizadas em nível de elemento finito e considerando o sistema de coordenadas locais x, y . Para a montagem do sistema global de equilíbrio estático é necessária a obtenção do equilíbrio do elemento coordenadas globais, X, Y . Para isto, faz-se necessária a transformação da matriz de rigidez, assim como do vetor de forças externas. Define-se então a seguinte matriz de rotação no plano, \mathbf{T} , (Bathe, 1996):

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 & & & \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & \mathbf{0}_{3 \times 3} & & \\ & & & & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ & & & & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

onde α é o ângulo que faz o elemento reto com respeito ao eixo horizontal do sistema global. A matriz de rigidez do elemento em coordenadas globais, \mathbf{Ke}_g , será dada por:

$$\mathbf{Ke}_g = \mathbf{T}^T \mathbf{Ke} \mathbf{T} \quad (2.47)$$

Analogamente pode ser estabelecida a relação entre o vetor de forças internas no sistema global, \mathbf{Fi}_g , e no sistema local, a saber:

$$\mathbf{F}_{int} = \mathbf{T} \mathbf{Fi}_g \quad (2.48)$$

Finalmente, pode ser estabelecido o equilíbrio global do sistema definido por:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{F}_i + {}^t \mathbf{F}_i - {}^{t+\Delta t} \lambda \mathbf{F}_e &= \mathbf{0} \\ \Delta \mathbf{F}_i &= \mathbf{K} \cdot \Delta \mathbf{U} \end{aligned} \quad (2.49)$$

onde \mathbf{F}_i , \mathbf{F}_e e \mathbf{U} são vetores de forças internas, forças externas de referência e deslocamentos nodais do sistema global, e \mathbf{K} é a matriz de rigidez tangente do sistema global. Para a montagem dos vetores e matrizes globais é empregado o método da rigidez direta (Bathe, 1996).

2.2. Formulação para Análise Dinâmica no Domínio do Tempo

Nesta seção é apresentada a formulação para a análise dinâmica não linear do sistema estrutural submetido a uma excitação de base. Nesta seção, é descrita a formulação para análise no tempo.

2.2.1. Energia potencial e equação de movimento

Considerando nas equações de movimento apenas a inércia translacional do elemento e o amortecimento associado a este movimento (hipótese compatível com a teoria de Euler-Bernoulli), a equação de equilíbrio dinâmico para um instante t pode ser obtida através do princípio dos trabalhos virtuais como:

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{f}(t) \delta \mathbf{u}(t) dS &= \int_V \boldsymbol{\tau}(t) \delta \boldsymbol{\varepsilon}(t) dV + \int_V \rho \ddot{\mathbf{u}}(t) \delta \ddot{\mathbf{u}}(t) dV + \\ &\int_V c \dot{\mathbf{u}}(t) \delta \dot{\mathbf{u}}(t) dV \end{aligned} \quad (2.50)$$

onde $\mathbf{u}(t)$ é o campo dos deslocamentos dependentes do tempo, ρ a densidade do material e c o coeficiente de amortecimento e $\mathbf{f}(t)$ é o campo de forças externas dependentes do tempo.

Considerando a teoria de viga-coluna de Euler-Bernoulli, o campo dos deslocamentos pode ser obtido através da interpolação dos deslocamentos nodais da equação (2.19), que é expressa na sua forma matricial como:

$$\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{H}(x) \mathbf{u}(t) \quad (2.51)$$

onde $\mathbf{u}(t)$ é o vetor dos deslocamentos nodais, $\mathbf{H}(x)$ é a matriz que contém as funções de interpolação definidas em (2.20). Analogamente, os campos de velocidade e aceleração podem ser obtidos como:

$$\dot{\mathbf{u}}(x, t) = \mathbf{H}(x) \dot{\mathbf{u}}(t) \quad e \quad \ddot{\mathbf{u}}(x, t) = \mathbf{H}(x) \ddot{\mathbf{u}}(t) \quad (2.52)$$

A relação cinemática entre deformações e deslocamentos é dada por:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, t) = \mathbf{B}(x) \mathbf{u}(t) \quad (2.53)$$

onde $\mathbf{B}(x)$ é obtida por diferenciação da matriz e combinação da matriz $\mathbf{H}(x)$, (Galvão, 2004). Introduzindo (2.51), (2.52) e (2.53) em (2.50), obtém-se, finalmente, a expressão matricial de equilíbrio dinâmico não linear do elemento, a saber:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{F}_{int}(t) = \mathbf{F}_e(t) \quad (2.54)$$

onde:

$$\mathbf{M} = \int_0^L \rho \mathbf{H}(x)^T \mathbf{H}(x) dx, \quad \mathbf{C} = \int_0^L c \mathbf{H}(x)^T \mathbf{H}(x) dx$$

$$\mathbf{F}_{int} = \int_0^L \mathbf{B}(x)^T \boldsymbol{\tau} dx, \quad \mathbf{F}_e(t) = \int_0^L \mathbf{H}(x)^T \mathbf{f}(x, t) dx \quad (2.55)$$

O vetor de forças internas \mathbf{F}_{int} em um instante de análise $t + \Delta t$, pode ser obtido como:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{int} = {}^t\mathbf{F}_{int} + \Delta\mathbf{F}_{int} \quad (2.56)$$

O vetor incremental de força $\Delta\mathbf{F}_{int}$ pode ser obtido através da equação (2.25) e dependerá do tipo de formulação que estiver sendo empregada. Da mesma forma, é possível adotar $\mathbf{F}_e(t)$ como o produto do vetor de forças de referência \mathbf{F}_r e uma de intensidade no tempo $f(t)$:

$$\mathbf{F}_e(t) = \mathbf{F}_r f(t) \quad (2.57)$$

O vetor \mathbf{F}_r é obtido através da integral (2.55). Considerando a função de carregamento externo $\mathbf{f}(x, t) = f_e(x)f(t)$, tem-se:

$$\mathbf{F}_r = \int_0^L \mathbf{H}(x)^T f_e(x) dx \quad (2.58)$$

onde $f_e(x)$ é a função que descreve as cargas ao longo do elemento. O vetor de referência, \mathbf{F}_r , é também conhecido como carregamento nodal equivalente.

2.2.2.

Matriz de massa considerando ligações semirrígidas

Como destacado em Galvão (2004) e Silva (2009), para manter a consistência na análise, no caso de presença de ligações semirrígidas, é necessário definir a força de inércia com base no campo de deslocamentos que incluem o efeito da ligação semirrígida. Chan e Chui (2000) propõem a definição de uma função de interpolação do deslocamento transversal baseada em um campo de deslocamento consistente definido por um polinômio cúbico:

$$\Delta v(x) = \sum_{i=0}^3 A_i x^i \quad (2.59)$$

onde os coeficientes são determinados a partir das condições de contorno:

$$\Delta v(0) = \Delta v_i, \Delta v(L) = \Delta v_j, \frac{d\Delta v}{dx}(0) = \Delta \theta_{bi}, \frac{d\Delta v}{dx}(L) = \Delta \theta_{bj} \quad (2.60)$$

Pode-se então expressar (2.59) na forma matricial de acordo com:

$$\Delta v(x) = [H_1^2 H_2 L \quad -H_2^2 H_1 L] \begin{bmatrix} \Delta \theta_{bi} \\ \Delta \theta_{bj} \end{bmatrix} + [(3 - 2H_1)H_1 \quad (3 - 2H_2)H_2] \begin{bmatrix} \Delta v_i \\ \Delta v_j \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

onde H_1 e H_2 são as funções definidas em (2.20). Levando em conta as equações (2.30), (2.31) e (2.32), chega-se a:

$$\Delta v(x) = \mathbf{H}^* \begin{bmatrix} \Delta v_i \\ \Delta v_j \\ \Delta \theta_{bi} \\ \Delta \theta_{bj} \end{bmatrix}$$

com:

$$\mathbf{H}^* = [H_1^2 H_2 L \quad -H_2^2 H_1 L] \mathbf{S}_2^{-1} \cdot \mathbf{S}_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1/L & 0 & -1/L \\ 0 & 1/L & 1 & -1/L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & (3 - 2H_1)H_1 & 0 & (3 - 2H_2)H_2 \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

Por fim, pode ser definida a matriz \mathbf{H} modificada da seguinte maneira:

$$\mathbf{H} = [\mathbf{H}_1 \quad \mathbf{H}_1^* \quad \mathbf{H}_2^* \quad \mathbf{H}_4 \quad \mathbf{H}_1^* \quad \mathbf{H}_4^*] \quad (2.63)$$

2.2.3.

Matriz de amortecimento e sistema global de equilíbrio

A determinação da matriz de amortecimento expressa na equação (2.55) é, na prática, extremamente complicada. Para contornar este problema é usual definir uma matriz de amortecimento proporcional à matriz de massa ou à matriz de rigidez ou a uma combinação linear de ambas, como indicado na seguinte expressão:

$$\mathbf{C} = \mu_1 \mathbf{M} + \mu_2 \mathbf{K} \quad (2.64)$$

Um procedimento usual para a obtenção dos coeficientes de proporcionalidade μ_1 e μ_2 é seguindo o método de Rayleigh (Clough e Penzien, 1993), calculando estes coeficientes como:

$$\mu_1 = \xi \frac{2\omega_1\omega_2}{\omega_1+\omega_2}, \mu_2 = \xi \frac{2}{\omega_1+\omega_2} \quad (2.65)$$

onde ω_1 e ω_2 são frequências naturais de vibração distintas, e ξ é uma taxa de amortecimento definido pelo usuário, muitas vezes baseada em resultados experimentais.

Para a obtenção do sistema global de equilíbrio dinâmico é necessário que todas as matrizes e vetores sejam transformados para este sistema. Para isto, as matrizes de cada elemento devem ser transformadas através da matriz de rotação \mathbf{T} . Obtendo as matrizes e vetores de força no sistema global, o sistema final pode ser montado somando a incidência nodal de todos os elementos, que resulta finalmente em:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{F}\mathbf{i}(t) = \mathbf{F}\mathbf{r}f(t) \quad (2.66)$$

2.2.4. Equação de movimento para excitação de base

A excitação sísmica geralmente é representada por um deslocamento de base dependente do tempo, $u_g(t)$. Esta excitação geralmente tende a deslocar uniformemente todos os graus de liberdade do apoio, deslocando assim toda a estrutura, o que gera forças de inercia que produzem por sua vez deslocamentos relativos à base, tal como mostrado na Figura 2.6.

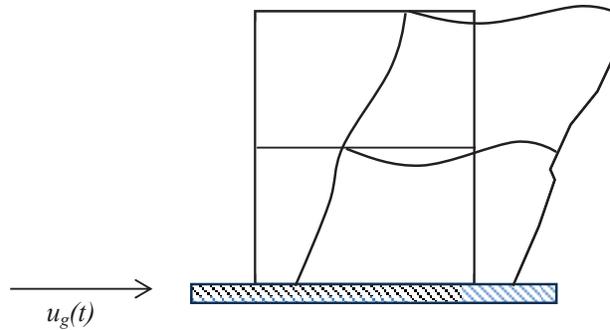


Figura 2.6 – Sistema Estrutural submetido a deslocamento de base.

Sob a hipótese de que a base se desloca uniformemente, como mostrado na Figura 2.6, é possível reescrever o sistema global de equações de movimento em função dos deslocamentos relativos à base como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{F}\mathbf{i}(t) = -\mathbf{M}\bar{\mathbf{r}}\ddot{u}_g(t) \quad (2.67)$$

onde \mathbf{U} representa o vetor de deslocamentos nodais relativos à base e $\bar{\mathbf{r}}$ é o vetor que define o deslocamento de corpo rígido de cada grau de liberdade relativo ao deslocamento que sofre a base (Clough e Penzien, 1993 e Chopra, 1995), e $\ddot{u}_g(t)$ é a aceleração de base.

2.3. Solução no domínio do Tempo

Nesta seção são abordados os métodos de solução linear e não linear para o problema de vibração livre e forçada do sistema (2.66). São destacados os algoritmos mais usados na literatura para obtenção das frequências e modos de vibração, assim como para a integração direta do sistema de equações.

2.3.1. Frequências naturais e modos de vibração

Considerando que a estrutura vibra livremente, ou seja, com $\ddot{u}_g(t) = 0$, e desprezando o efeito do amortecimento, o sistema descrito em (2.67) pode ser reescrito como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{U}(t) = \mathbf{0} \quad (2.68)$$

onde \mathbf{K} é matriz de rigidez. Supondo que a solução de deslocamentos é dada pela solução harmônica:

$$\mathbf{U}(t) = Ae^{i\omega t}\boldsymbol{\phi} \quad (2.69)$$

onde $\boldsymbol{\phi}$ é o vetor modal de vibração, A é amplitude e ω é a frequência de vibração da solução, e substituindo (2.69) em (2.68), obtém-se:

$$(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})Ae^{i\omega t}\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0} \quad (2.70)$$

Para que equação anterior tenha uma solução não trivial, é necessário que:

$$|\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}| = 0 \quad (2.71)$$

A equação (2.71) é conhecida na álgebra linear como um problema de autovalor generalizado, sendo o autovalor ω^2 o quadrado das frequências de vibração e os autovetores $\boldsymbol{\phi}$ os modos de vibração correspondentes a tal frequência. Para resolver o problema de autovalor, há diversos algoritmos que podem ser usados como ferramenta de cálculo para obter ω e $\boldsymbol{\phi}$. Dentre estes métodos, pode ser destacado o método de Jacobi usado por Galvão (2004) e Silva (2009), e que é descrito detalhadamente por Brebbia e Ferrante (1986).

Para o caso de uma estrutura com comportamento não linear na presença de carregamento estático (estrutura pré-carregada), o cálculo das frequências e modos de vibração não pode ser efetuado diretamente, (Galvão, 2004; Silva, 2009), já que a matriz de rigidez \mathbf{K} depende dos esforços internos. Para isto, é necessário fazer uma análise estática não linear para obter a configuração deformada da estrutura correspondente ao carregamento existente e assim conhecer os esforços internos para o cálculo de \mathbf{K} e, posteriormente, utilizar o método de Jacobi para o cálculo das frequências e modos de vibração.

2.3.2. Análise transiente e integração direta no domínio do tempo

A resposta na fase transiente da vibração é muito importante no estudo de vários problemas de vibração forçada. Esta importância é ressaltada no caso de excitação sísmica, onde as maiores amplitudes de vibração ocorrem usualmente nesta fase do movimento. Para isto são necessárias técnicas de integração numérica do sistema de equações de movimento, que calculam a resposta no tempo de forma incremental partindo de certo conjunto de condições iniciais.

Na literatura podem ser encontrados diversos métodos de integração passo a passo que têm sido desenvolvidos para a análise linear e não linear. Estes métodos podem ser divididos em dois grupos: explícitos e implícitos. Os métodos explícitos consistem basicamente no cálculo da resposta do sistema para o tempo $t + \Delta t$ em função da resposta do no instante de tempo t , ou seja:

$$\mathbf{U}(t + \Delta t) = f(\mathbf{U}(t), \dot{\mathbf{U}}(t), \ddot{\mathbf{U}}(t)) \quad (2.72)$$

Por outro lado, os métodos chamados implícitos utilizam também informações da resposta do sistema no próprio instante de análise, isto é:

$$\mathbf{U}(t + \Delta t) = f(\mathbf{U}(t + \Delta t), \dot{\mathbf{U}}(t + \Delta t), \ddot{\mathbf{U}}(t + \Delta t), \mathbf{U}(t), \dot{\mathbf{U}}(t), \ddot{\mathbf{U}}(t)) \quad (2.73)$$

Geralmente os métodos implícitos levam a processos de cálculo mais demorados, particularmente no caso de análises não lineares, porém têm a vantagem de serem mais estáveis que os métodos explícitos. A estabilidade do método é exigida principalmente na análise de sistemas fortemente não lineares. Um aspecto que influi de maneira importante na estabilidade do método de integração é a correta escolha do incremento de tempo Δt . Bathe (1996) sugere que o valor de Δt seja limitado por:

$$\Delta t \leq \frac{2}{\omega_{max}}, \quad (2.74)$$

onde ω_{max} é a máxima frequência do sistema. Cabe salientar que em muitos casos a importância de certas frequências diminui no decorrer da análise. Portanto, usar um Δt muito pequeno em toda a análise pode levar a um esforço de computacional desnecessário. Para isto, resulta conveniente uma técnica que permita uma adaptação do tamanho de Δt .

2.3.3. Métodos de integração para análise linear

A seguir são apresentados alguns dos métodos implícitos e explícitos de integração direta para a análise transiente linear.

2.3.3.1. Método implícito de Newmark

O método de integração de Newmark é um dos mais utilizados em problemas de dinâmica estrutural. A simplicidade da implementação e a estabilidade fazem deste método um dos mais populares na análise transiente. O método é baseado na expansão dos campos de deslocamentos e velocidade em séries de Taylor de acordo com:

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\mathbf{U} &= {}^t\mathbf{U} + \Delta t {}^t\dot{\mathbf{U}} + \frac{\Delta t^2}{2} {}^t\ddot{\mathbf{U}} + \frac{\Delta t^3}{6} {}^t\ddot{\ddot{\mathbf{U}}} + \dots \\ {}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}} &= {}^t\dot{\mathbf{U}} + \Delta t {}^t\ddot{\mathbf{U}} + \frac{\Delta t^2}{2} {}^t\ddot{\ddot{\mathbf{U}}} + \dots \end{aligned} \quad (2.75)$$

Desprezando os termos de quarta ordem e superiores, assume-se que a aceleração varia linearmente. Newmark generalizou esta aproximação na seguinte forma:

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\mathbf{U} &= {}^t\mathbf{U} + \Delta t {}^t\dot{\mathbf{U}} + \frac{\Delta t^2}{2} {}^t\ddot{\mathbf{U}} + \beta \Delta t^3 {}^t\ddot{\ddot{\mathbf{U}}} \\ {}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}} &= {}^t\dot{\mathbf{U}} + \Delta t {}^t\ddot{\mathbf{U}} + \gamma {}^t\ddot{\ddot{\mathbf{U}}} \end{aligned} \quad (2.76)$$

Através da correta combinação de (2.76), chega-se às as fórmulas de Newmark:

$$\begin{aligned}
 {}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}} &= {}^t\dot{\mathbf{U}} + (1 - \gamma)\Delta t \ {}^t\ddot{\mathbf{U}} + \gamma {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}} \\
 {}^{t+\Delta t}\mathbf{U} &= {}^t\mathbf{U} + \Delta t \ {}^t\dot{\mathbf{U}} + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ {}^t\ddot{\mathbf{U}} + \beta \Delta t^2 \cdot {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}
 \end{aligned} \tag{2.77}$$

Substituindo (2.77 em 2.66), obtém-se:

$$\begin{aligned}
 {}^{t+\Delta t}\mathbf{U} &= \hat{\mathbf{K}}^{-1} \ {}^t\hat{\mathbf{F}} \\
 \hat{\mathbf{K}} &= \mathbf{K} + \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{C} \\
 \hat{\mathbf{F}} &= -\mathbf{M}\mathbf{r}^{t+\Delta t} \ddot{u}_g + \mathbf{C} \left(\frac{\gamma}{\beta \Delta t} \ {}^t\mathbf{U} + \left(\frac{\gamma}{\beta \Delta t} - 1 \right) \ {}^t\dot{\mathbf{U}} + \Delta t \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \ {}^t\ddot{\mathbf{U}} \right) + \\
 &\quad - \mathbf{M} \left(\frac{\gamma}{\beta \Delta t^2} \ {}^t\mathbf{U} + \frac{1}{\beta \Delta t} \ {}^t\dot{\mathbf{U}} + \Delta t \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ {}^t\ddot{\mathbf{U}} \right)
 \end{aligned} \tag{2.78}$$

Os coeficientes γ e β determinam a eficiência e estabilidade do algoritmo e dependem do tipo de aproximação para a variação da aceleração. Para o caso da aceleração linear, $\gamma = 1/2$ e $\beta = 1/6$. Subbaraj e Dokainish (1989) mostram que o método de Newmark é incondicionalmente estável para: $\gamma \geq 1/2$ e $\beta = (2\gamma + 1)^2/16$. Na literatura é usual se trabalhar com $\gamma = 1/2$ e $\beta = 1/4$ (Newmark, 1959).

Um problema frequente nos algoritmos da família de Newmark é a exatidão dos resultados, principalmente em problemas fortemente não lineares, já que, além do erro da própria aproximação, em alguns casos há evidência de erros acumulados ao integrar-se as equações de movimento ao longo de uma grande quantidade de ciclos em virtude do amortecimento numérico do algoritmo. Para verificar a exatidão dos resultados é conveniente comparar os resultados do método de Newmark como métodos que não possuam estes problemas de erro. Dentre eles pode-se destacar os métodos da família Runge-Kutta.

2.3.3.2. Métodos explícitos de Runge-Kutta

Conhecidos pela sua exatidão e simplicidade de implementação, os métodos de integração de Runge-Kutta são empregados em grande número de problemas

de integração de equações diferenciais lineares e não lineares uma vez que o processo de integração é igual para ambos os casos desde que sejam conhecidas com precisão as expressões de não linearidade. Os métodos de Runge-Kutta têm como base o método de Euler (Figura 2.6), onde o valor de uma função no instante $t + \Delta t$ é calculado como a soma do valor da função no instante t , multiplicado pelo valor da tangente avaliada em algum ponto do intervalo entre t e $t + \Delta t$ (Butcher, 2003).

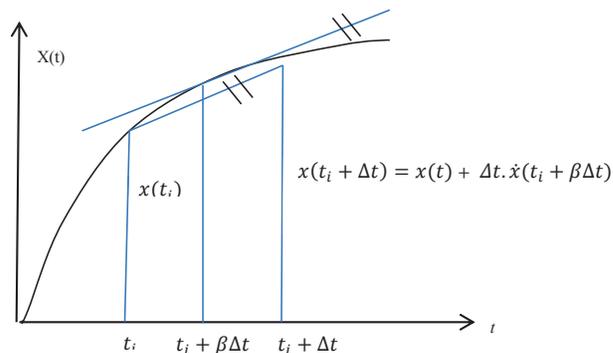


Figura 2.7 – Esquema de integração do método de Euler.

Os métodos de Runge-Kutta seguem a ideia do método de Euler, empregando um ou mais pontos para interpolar o valor da tangente equivalente usada no método de Euler.

Para entender a mecânica dos métodos Runge-Kutta, considere-se uma equação diferencial de primeira ordem do tipo:

$$\dot{u} = F(u, t) \quad (2.79)$$

tendo como condição inicial:

$$u(t^n) = u^n \quad (2.80)$$

A resposta do sistema para um incremento de tempo Δt pode ser expresso como:

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t \sum_{i=1}^{od} b_i k_i \quad (2.81)$$

$$k_i = g(u^n, a_{ij}, c_i)$$

onde od é o número de etapas de cálculo, a_{ij} , b_i e c_i , são coeficientes que dependem da ordem da aproximação e da regra de quadratura usada. Butcher (2003) organizou estes coeficientes em tabelas conhecidas como Arranjos de Butcher.

Tabela 2-1. Estrutura do Arranjo de coeficientes de Butcher

b_1	$a_{1,1}$	$a_{1,2} \dots$	$a_{1,od}$
b_2	$a_{2,1}$	$a_{2,2} \dots$	$a_{2,od}$
...
b_{od}	$a_{od,1}$	$a_{od,2} \dots$	$a_{od,od}$
	c_1	$c_2 \dots$	c_{od}

Neste contexto, o método de Runge-Kutta pode ser entendido como uma generalização do método de Euler, já que a resposta do sistema no passo seguinte é avaliada através da soma da resposta no passo anterior mais o produto do incremento do tempo com uma inclinação ou tangente aproximada. Assim, o método de Euler pode ser considerado como um método de Runge-Kutta de primeira ordem que usa um ponto para o cálculo da tangente aproximada. Conforme a ordem do método aumenta, são usados mais pontos no cálculo da tangente e o cálculo da resposta torna-se mais preciso.

As constantes k_i presentes em (2.81) podem ser obtidas por:

$$k_i = F(u^n + \Delta t \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j, t_n + c_i \Delta t), i = 1..od \quad (2.82)$$

Na presente proposta são empregados três tipos de interpolações explícitas. A primeira interpolação, e mais conhecida, é a correspondente ao método de

Runge-Kutta clássico de quarta ordem e quatro etapas cuja tabela de cálculo é apresentada na Tabela 2-2. No presente trabalho o método clássico de Runge-Kutta de quarta ordem será denominado pela sigla RK4.

Tabela 2-2. Arranjo de Butcher do método clássico de RK4 (Butcher,2003)

0				
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$		
1	0	0	1	
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Também é empregada uma aproximação explícita de sexta ordem e sete etapas obtida por Niström que será identificada com a sigla RK6, a qual é mostrada na Tabela 2-3.

Tabela 2-3. Coeficientes de Niström de sexta ordem (Butcher,2003)

0								
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$							
$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$						
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{12}$					
$\frac{5}{6}$	$\frac{25}{48}$	$-\frac{55}{24}$	$\frac{35}{48}$	$\frac{15}{8}$				
$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{20}$	$-\frac{11}{24}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$			
1	$-\frac{261}{260}$	$\frac{33}{13}$	$\frac{43}{156}$	$-\frac{118}{39}$	$\frac{32}{195}$	$\frac{80}{39}$		
	$\frac{13}{200}$	0	$\frac{11}{40}$	$\frac{11}{40}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{13}{200}$	

Existem algoritmos da família Runge-Kutta que consideram a adaptação do passo de tempo Δt , dentre eles, um dos mais populares é o proposto por Fehlberg (1969). O método de Fehlberg de quarta ordem, ou também identificado pela sigla RKF45, utiliza uma tabela única de seis etapas para o cálculo de duas aproximações. Para isto, são definidos dois vetores de constantes c_i , sendo uma para cálculo de uma aproximação de quarta ordem e outra para uma aproximação de quinta ordem, a qual é usada como referência para a estimativa do erro local (Tabela 2-4).

Tabela 2-4. Arranjo de coeficientes para o método de RKF45 (Butcher,2003)

0						
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$					
$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{9}{32}$				
$\frac{12}{13}$	$\frac{1932}{2197}$	$-\frac{7200}{2197}$	$\frac{7296}{2197}$			
1	$\frac{439}{216}$	-8	$\frac{3680}{3513}$	$-\frac{845}{4104}$		
$\frac{1}{2}$	$-\frac{8}{27}$	2	$\frac{3544}{2565}$	$\frac{1859}{4104}$	$-\frac{11}{40}$	
C_i de 4ª ordem \rightarrow	$\frac{25}{216}$	0	$\frac{1408}{2568}$	$\frac{2197}{4104}$	$-\frac{1}{5}$	0
C_i de 5ª ordem \rightarrow	$\frac{16}{135}$	0	$\frac{6656}{12825}$	$\frac{28561}{56430}$	$-\frac{9}{50}$	$\frac{2}{55}$

Assumindo a diferença das duas aproximações como o erro local, tem-se que:

$$E = \frac{1}{360}k_1 - \frac{128}{4275}k_3 - \frac{2197}{75240}k_4 + \frac{1}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6 \quad (2.83)$$

Se o erro local não satisfizer a medida de tolerância desejada, um novo incremento de tempo pode ser adotado como:

$$\Delta t^k = s \cdot \Delta t^k$$

$$s = \left(\frac{tol}{2|y_{j+1}^k - z_{j+1}^k|} \right)^{1/4} \quad (2.84)$$

onde tol é a medida de tolerância desejada, y é a aproximação de quarta ordem, e z é a aproximação de quinta ordem. No método de RKF-45 é necessária a determinação de limites máximos e mínimos para Δt .

Para analisar o sistema cuja excitação é dada por uma série discreta de dados, como é no caso de acelerogramas reais, é necessário adaptar o método de Runge-Kutta, já que ele precisa do valor da excitação em tempos que estão registrados de forma explícita nos acelerogramas. Uma forma de resolver esse problema é através da interpolação de dados, i.e., interpolar o valor da excitação no tempo desejado a partir de valores da excitação em tempos adjacentes já conhecidos. Na presente tese é adotada a interpolação linear nos exemplos em que é analisado o sistema submetido a um sismo determinado por um acelerograma discreto (sismo conhecido). Uma vantagem deste método sobre o convencional RK4 está na quantidade de etapas para estimar o erro local. Enquanto o método de RK4 precisa de oito etapas, RKF45 usa apenas seis. Uma comparação interessante destes dois métodos é feita por Mathews e Fink (2004).

2.3.3.3. Integração do sistema dinâmico linear pelos métodos Runge-Kutta explícitos

No item 2.3.3.2 foi mostrada a integração de Runge-Kutta para uma equação diferencial ordinária, EDO, de primeira ordem. Os sistemas dinâmicos lineares são compostos por EDOs de segunda ordem. Portanto, para o emprego dos métodos RK, é necessária a transformação do sistema de segunda ordem em outro sistema de primeira ordem. Neste caso, o sistema definido em (2.71) pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{U}} &= \mathbf{Z} \\ \dot{\mathbf{Z}} &= -\mathbf{r}\ddot{u}_g(t) - \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{C}\mathbf{Z} + \mathbf{K}\mathbf{U}) \end{aligned} \quad (2.85)$$

Organizando matricialmente, obtém-se:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{Z}} \\ \dot{\mathbf{U}} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{Z} \\ \mathbf{U} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{r}\ddot{u}_g(t) \end{Bmatrix} \quad ou, \\ \dot{\mathbf{U}}^*(t) &= \hat{\mathbf{A}}\mathbf{U}^*(t) + \mathbf{r}^*\ddot{u}_g(t) \end{aligned} \quad (2.86)$$

O sistema (2.86) tem a forma descrita em (2.79) e pode ser resolvido diretamente por qualquer um dos métodos apresentados. A resposta obtida em

$\mathbf{U}^*(t + \Delta t)$ contém os deslocamentos e velocidades do sistema. As acelerações do sistema podem ser obtidas através do equilíbrio da expressão (2.71).

2.3.3.4. Método implícito de Runge-Kutta-Gauss

Observando a formulação dos métodos Runge-Kutta explícitos. Pode ser notado que estes métodos são de fácil implementação. Porém, o problema dos métodos explícitos está na sua estabilidade diante de problemas denominados *Stiff* ou rígidos, caracterizados por serem problemas em que a resposta possui frequências muito afastadas entre si. Isto significa que na resposta do sistema há participação de frequências muito baixas e muito elevadas ao mesmo tempo, obrigando a utilizar valores de passo de tempo muito pequenos. Estes problemas são mais evidentes em sistemas com forte não linearidade. Diante desta situação, torna-se favorável o uso de algoritmos implícitos, os quais têm regiões de estabilidade maiores que os métodos explícitos. No entanto, estes métodos precisam de um número consideravelmente maior de operações. No presente trabalho é utilizado como método de integração implícita o método de duas etapas e de quarta ordem que emprega a quadratura de Gauss, denominado no presente trabalho com a sigla RKG4, conhecido também como o método de Gauss-Legendre (Butcher, 2003).

Tabela 2-5. Arranjo de Butcher para o método de RKG4

$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}$
$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Nos Métodos de Runge-Kutta explícitos, o cálculo das constantes k_i , dadas na expressão (2.81), não é mais sequencial. Porém, em sistemas dinâmicos

lineares, como o mostrado em (2.86), é possível obter uma expressão direta. Por exemplo, para um método implícito de duas etapas, tem-se:

$$\begin{aligned} k_1 &= F(u^n + \mathbf{a}_{11}k_1 + \mathbf{a}_{12}k_2, t_n + c_1\Delta t) \\ k_2 &= F(u^n + \mathbf{a}_{21}k_1 + \mathbf{a}_{22}k_2, t_n + c_2\Delta t) \end{aligned} \quad (2.87)$$

Substituindo em (2.86), e combinando em (2.82), tem-se:

$$\begin{aligned} k_1 &= \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{U}^*(t) + a_{11}k_1 + a_{12}k_2) + \mathbf{r}^*\ddot{u}_g(t + c_1\Delta t) \\ k_2 &= \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{U}^*(t) + a_{12}k_1 + a_{22}k_2) + \mathbf{r}^*\ddot{u}_g(t + c_2\Delta t) \end{aligned} \quad (2.88)$$

Organizando matricialmente, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} - a_{11}\hat{\mathbf{A}} & -a_{12}\hat{\mathbf{A}} \\ -a_{21}\hat{\mathbf{A}} & \mathbf{I} - a_{22}\hat{\mathbf{A}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{A}}\mathbf{U}^*(t) + \mathbf{r}^*\ddot{u}_g(t + c_1\Delta t) \\ \hat{\mathbf{A}}\mathbf{U}^*(t) + \mathbf{r}^*\ddot{u}_g(t + c_2\Delta t) \end{Bmatrix} \quad (2.89)$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade. Como pode ser observado na expressão anterior, o cálculo de k_i envolve a resolução de um sistema de ordem 4 vezes maior que o sistema original.

2.3.4. Integração direta para análise não linear

Nos itens anteriores foram desenvolvidos algoritmos para a integração direta do sistema (2.66) para o caso linear. No presente tópico é apresentada a adaptação de dois destes algoritmos para a resolução do problema não linear.

2.3.4.1. Método Implícito de Newmark para análise não linear

Ao contrário do processo descrito em 2.3.3.1, onde o vetor de forças internas era dado diretamente pela multiplicação da matriz de rigidez linear e o vetor de deslocamentos, a solução direta não é possível no caso não linear, já que o vetor de forças internas depende do campo de deslocamentos. Por tal motivo, é necessária uma técnica iterativa para o cálculo da resposta no instante $t + \Delta t$. No

presente trabalho é adotada a técnica descrita em Villaverde (2008), usada também por Galvão (2004) e Silva (2009), que combina o algoritmo de integração no tempo de Newmark com o esquema iterativo de solução de equações não lineares de Newton-Raphson, descrito de forma resumida na Tabela 9-9.

Tabela 2-6. Algoritmo de Newmark para o problema não linear

- 1) Inicializar Dados de entrada para o instante t : ${}^t\mathbf{U}$, ${}^t\dot{\mathbf{U}}$, ${}^t\ddot{\mathbf{U}}$
- 2) Estabelecer os parâmetros iniciais de análise: Fixar Δt , montar \mathbf{M} , \mathbf{C} , ${}^t\mathbf{F}_i$ e \mathbf{K}
- 3) Determinar o incremento excitação sísmica :
- 4) Montar as matrizes de rigidez efetiva e de carregamento efetivo: $\hat{\mathbf{K}}, \hat{\mathbf{F}} \rightarrow \text{eq}(2.78)$
- 5) Calcular os deslocamentos incrementais : $\Delta\mathbf{U}^0 = \hat{\mathbf{K}}^{-1}\hat{\mathbf{F}}$
- 6) Processo Iterativo para $k=1,2,\dots$:
 - i. Calcular ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^{k-1}$, ${}^t\dot{\mathbf{U}}$, ${}^t\ddot{\mathbf{U}} \rightarrow (2.77)$.
 - ii. Calcular o vetor de forças internas: ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i = {}^t\mathbf{F}_i + \mathbf{K} \cdot \Delta\mathbf{U}^{k-1}$
 - iii. Calcular o vetor de forças residuais: $\hat{\mathbf{R}} \rightarrow (2.66)$
 - iv. Calcular a correção dos deslocamentos incrementais: $\delta\mathbf{U} = : \hat{\mathbf{K}}^{-1}\hat{\mathbf{R}}$
 - v. Atualizar os deslocamentos incrementais: $\Delta\mathbf{U}^k = \Delta\mathbf{U}^{k-1} + \delta\mathbf{U}$
 - vi. Verifique a convergência:
 $\frac{|\Delta\mathbf{U}|}{|{}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}|} \leq \text{fator de convergencia?} \rightarrow (\text{sim}, \text{não})$
Sim: ir ao passo 7.
Não: Atualizar todos os parâmetros de rigidez \mathbf{K} , \mathbf{M} e retornar a “i”.
- 7) Atualizar ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^k$, ${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}}$, ${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}} \rightarrow (2.77)$. ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i = {}^t\mathbf{F}_i + \mathbf{K}\Delta\mathbf{U}^k$, \mathbf{K} , \mathbf{M} , \mathbf{C} e todos os parâmetros susceptíveis a variação em função dos deslocamentos.
- 8) Atualizar o tempo de análise para o seguinte passo de integração: $t = t + \Delta t$ ir para o passo 1) e iniciar um novo incremento.

2.3.4.2. Método de Runge-Kutta para análise não linear

Ao contrário do método de Newmark, onde é formado um vetor de forças efetivas e uma matriz de rigidez efetiva, possibilitando desta forma o uso de um esquema iterativo de tipo Newton-Raphson, os métodos de Runge-Kutta precisam de uma adaptação distinta para solução iterativa de sistemas não lineares. Vale lembrar que o método de Runge-Kutta não precisa de adaptação quando a fonte de não linearidade é dada por alguma expressão expedita. Porém, não é este o caso

na grande maioria dos problemas de análise estrutural não linear, onde as fontes de não linearidade não são conhecidas de forma expedita, principalmente quando há não linearidade do material. Por tal motivo, na presente proposta apresenta-se um esquema iterativo de aproximação secante, ao qual o método de Runge-Kutta pode ser facilmente adaptado (Figura 2.8).

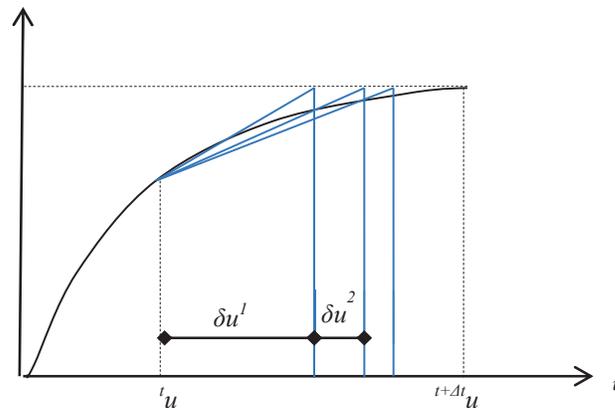


Figura 2.8 – Aproximação iterativa secante.

No presente trabalho é proposto um esquema de aproximação de Runge-Kutta iterativa para análise não linear seguindo a mecânica da aproximação secante. Na Tabela 2-7 é mostrado o esquema iterativo proposto para solução de sistemas dinâmicos não lineares empregando o método de Runge-Kutta. Na presente tese, será usado o apenas o método implícito RKG4 para a integração de sistemas dinâmicos não lineares, devido a que este método apresenta maior estabilidade, condição necessária para a avaliação dinâmica de sistemas com não linearidade acentuada.

Tabela 2-7. Algoritmo de Runge-Kutta para o problema não linear

<p>1) Inicializar Dados de entrada para o instante t: ${}^t\mathbf{U}$, ${}^t\dot{\mathbf{U}}$, ${}^t\ddot{\mathbf{U}}$</p> <p>2) Estabelecer os parâmetros iniciais de análise: Fixar Δt, montar \mathbf{M}, \mathbf{C}, ${}^t\mathbf{F}_i$ e \mathbf{K}</p> <p>3) Determinar o incremento excitação sísmica :</p> <p>4) Obter a resposta incremental pelo método de Runge-Kutta: $\Delta\mathbf{U}^0$, $\Delta\dot{\mathbf{U}}^0$</p> <p>5) Calcular as acelerações incrementais : $\Delta\ddot{\mathbf{U}}^0 \rightarrow (2.77)$</p> <p>6) Processo Iterativo para $k=1,2,\dots$:</p> <p>i. Calcular ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^{k-1}$, ${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}} = {}^t\dot{\mathbf{U}} + \Delta\dot{\mathbf{U}}^{k-1}$, ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^t\ddot{\mathbf{U}} + \Delta\ddot{\mathbf{U}}^{k-1}$</p> <p>ii. Calcular o Vetor de Força interna: ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i = {}^t\mathbf{F}_i + \mathbf{K} \cdot \Delta\mathbf{U}^{k-1}$</p> <p>iii. Calcular o Vetor de Forças residuais: $\hat{\mathbf{R}} \rightarrow (2.67)$</p> <p>iv. Calcular a correção incremental através de Runge-Kutta, para um incremento de excitação externa \mathbf{R} a través de (2.81), (2.86), (2.89) .</p> <p>v. Atualizar: $\Delta\mathbf{U}^k = \Delta\mathbf{U}^{k-1} + \delta\mathbf{U}$, $\Delta\dot{\mathbf{U}}^k = \Delta\dot{\mathbf{U}}^{k-1} + \delta\dot{\mathbf{U}}$, $\Delta\ddot{\mathbf{U}}^k = \Delta\ddot{\mathbf{U}}^{k-1} + \delta\ddot{\mathbf{U}}$</p> <p>vi. Verificar a convergência: $\frac{ \delta\mathbf{U} }{ {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U} } \leq$ fator de convergencia ? \rightarrow (sim , não) Sim: ir à próxima ao passo 7). Não: Atualizar todos os parâmetros de rigidez \mathbf{K}, \mathbf{M} e retornar a “i”</p> <p>7) Atualizar ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^k$, ${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}} = {}^t\dot{\mathbf{U}} + \Delta\dot{\mathbf{U}}^k$, ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^t\ddot{\mathbf{U}} + \Delta\ddot{\mathbf{U}}^k$ ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i = {}^t\mathbf{F}_i + \mathbf{K}\Delta\mathbf{U}^k$, \mathbf{K}, \mathbf{M}, \mathbf{C} e todos os parâmetros susceptíveis a variação em função dos deslocamentos.</p> <p>8) Atualizar o tempo de análise para o seguinte passo de integração: $t = t + \Delta t$ ir para o passo 1) e iniciar um novo incremento.</p>

2.4.

Aspectos da Solução Estática Não Linear

Na seção anterior foi formulado o problema dinâmico não linear e a sua solução no espaço pelo método dos elementos finitos e no tempo através dos métodos de integração direta do sistema de equações de movimento. Embora o foco do presente estudo esteja orientado a análises dinâmicas, em alguns casos, são necessárias análises estáticas não lineares como parâmetros de referência para alguns problemas dinâmicos. Por este motivo, faz-se necessário descrever a metodologia de resolução de sistemas estáticos não lineares. Na presente seção são descritos de forma sucinta alguns dos métodos de solução de sistemas estáticos não lineares empregados na presente tese. Os detalhes da formulação

destes métodos podem ser encontrados em Silveira (1995), Galvão (2004), Silva (2009) e Crisfield (1991).

2.4.1. Método iterativo de Newton-Raphson

O método de Newton-Raphson é amplamente usado tanto na análise não linear estática quanto na análise dinâmica de estruturas. A mecânica deste método está baseada em uma aproximação tangente, como visto na Figura 2.9.

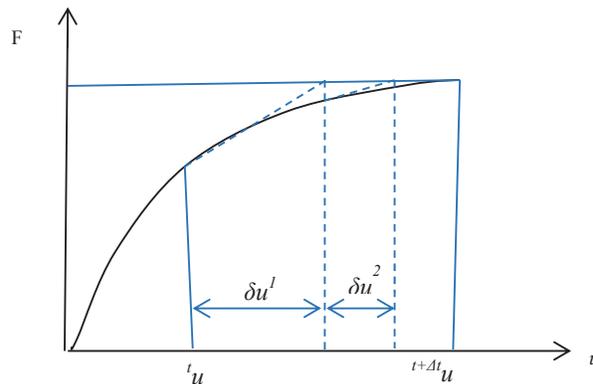


Figura 2.9 – Aproximação tangente no método de Newton-Raphson.

Para um problema com incrementos de carga especificados, a equação (2.23) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\tau)\Delta\mathbf{U} - \Delta\lambda\mathbf{F}_r &= \mathbf{0} \\ \mathbf{K}\Delta\mathbf{U} + \Delta\lambda\mathbf{F}_r &= \mathbf{0} \quad \text{ou} \quad \Delta\mathbf{F}_i - \Delta\lambda\mathbf{F}_r = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.90)$$

Como \mathbf{K} é função dos deslocamentos, admite-se como uma primeira aproximação o valor de \mathbf{K} no instante t , ou seja, a rigidez tangente no instante t . Calcula-se em seguida o incremento de deslocamentos $\Delta\mathbf{U}$ e, com este resultado, são atualizadas a matriz de rigidez e vetor de forças internas. A correção para cada iteração é dada por:

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{U} &= ({}^t\mathbf{K}^{k-1})^{-1}\mathbf{R}^{k-1} \\ \Delta\mathbf{U}^k &= \Delta\mathbf{U}^{k-1} + \delta\mathbf{U} \end{aligned} \quad (2.91)$$

onde \mathbf{R} é o vetor de forças desbalanceadas calculado a partir da expressão (2.23).

Este método é a base para o desenvolvimento de outros métodos de análise não linear. As iterações são feitas até atingir uma precisão desejada.

2.4.2. Método do controle de arco

Como é sabido na análise não linear, o método de Newton-Raphson falha quando a resposta do sistema apresenta um ponto limite de carga (*snap-through*) ou um ponto limite nos deslocamentos (*snap-back*). Para contornar estes problemas existe uma diversidade de métodos chamados de métodos de continuação, dentre eles, o método de controle de arco destaca-se por ser um método simples e com bom desempenho nos problemas não lineares geométricos. O método consiste em adicionar ao sistema descrito em (2.90) uma equação de restrição, baseada na expressão do comprimento de um segmento de curva ou arco de curva, resultando no seguinte sistema aumentado:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}\Delta\mathbf{U} - \Delta\lambda\mathbf{F}_r &= \mathbf{0} \\ \Delta\mathbf{U}^T\Delta\mathbf{U} + \varphi\Delta\lambda^2\mathbf{F}_r^T\mathbf{F}_r &= \Delta l^2 \end{aligned} \quad (2.92)$$

onde φ é um parâmetro de escala que define o tipo de método de controle de arco, e Δl é o parâmetro de incremento de arco. Este método pode ser combinado com o esquema de solução de Newton-Raphson. O incremento de carga $\Delta\lambda^0$ e de deslocamento $\Delta\mathbf{U}^0$ são dados por (Crisfield, 1997):

$$\begin{aligned} \Delta\lambda^0 &= \pm \frac{\Delta l^2}{\sqrt{(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}_r)^T(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}_r) + \varphi\mathbf{F}_r^T\mathbf{F}_r}} \\ \Delta\mathbf{U}^0 &= \Delta\lambda^0 \cdot (\mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}_r)^T \end{aligned} \quad (2.93)$$

A correção de carga e deslocamentos dentro do processo iterativo de Newton-Raphson, incluindo a restrição de arco, é dada por:

$$\begin{bmatrix} {}^t_{k-1}\mathbf{K} & -\mathbf{F}_r \\ 2\Delta\mathbf{U}^{k-1} & 2\varphi\Delta\lambda^{k-1}\mathbf{F}_r^T\mathbf{F}_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta\mathbf{U} \\ \delta\lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}^{k-1} \\ \mathbf{g}^{k-1} \end{Bmatrix} \quad (2.94)$$

onde \mathbf{g}^{k-1} é o resíduo resultante da equação de restrição adicional. Para $\varphi = 1$, a restrição é chamada de controle de arco esférico, enquanto $\varphi = 0$ define o método de arco cilíndrico. Na literatura podem ser encontrados outros métodos da família dos métodos de controle de arco, tal como as aproximações linearizadas de Risk (1979) e Ram (1982). Embora o método de controle de arco seja eficiente em grande número de problemas não lineares, este não é uma “panaceia” (Felippa, 2014), já que existem certas condições geométricas nas quais o algoritmo do controle de arco falha. Alguns exemplos, onde acontecem essas falhas, são mostrados por Carrera (2004). Além disto, Paullo e Roehl (2011,2013) mostram que o método de controle de arco apresenta problemas na análise de estruturas com materiais com comportamento não linear.

Na Figura 2.10 é mostrado o esquema iterativo do algoritmo de aproximação pelo método de controle de arco esférico para um sistema de um grau de liberdade

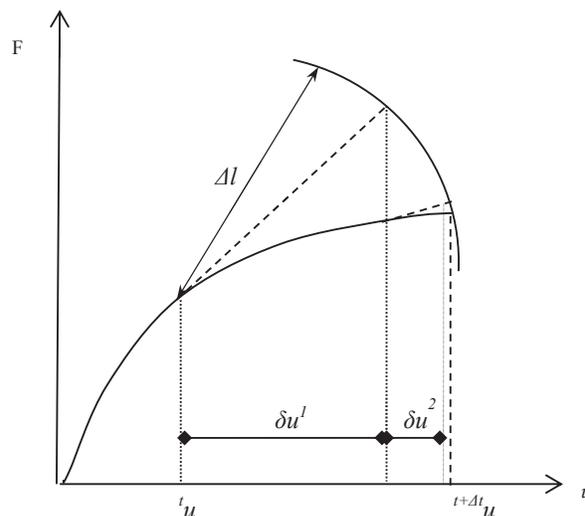


Figura 2.10 – Aproximação por arco esférico.

2.5. Consideração de Base Flexível

Na presente seção são descritas, de forma resumida, as formulações básicas usadas na inclusão de uma base flexível modelada por meio de modelos discretos e contínuos.

2.5.1. Formulação dinâmica do modelo contínuo com subestruturação

Suponha o sistema base-estrutura mostrada na Figura 2.11.

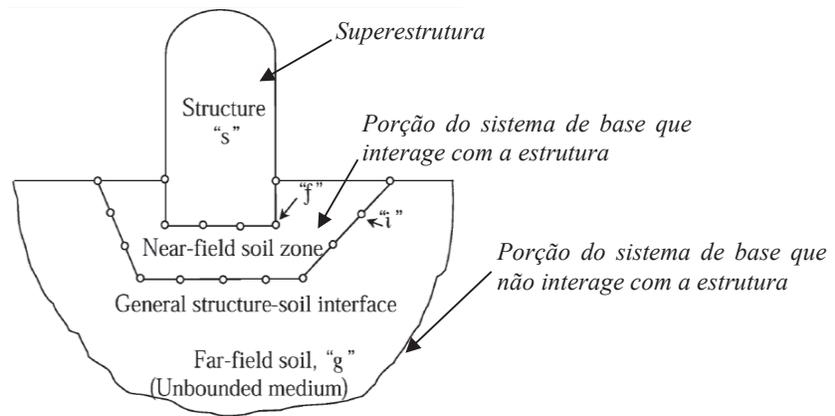


Figura 2.11 – Sistema base-estrutura (Halabian,2002).

A equação matricial de movimento do sistema conjunto é dada por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{bb} & \mathbf{M}_{bi} \\ \mathbf{M}_{ib} & \mathbf{M}_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{U}}_b \\ \ddot{\mathbf{U}}_i \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{bb} & \mathbf{C}_{bi} \\ \mathbf{C}_{ib} & \mathbf{C}_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}}_b \\ \dot{\mathbf{U}}_i \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{bi} \\ \mathbf{K}_{ib} & \mathbf{K}_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_b \\ \mathbf{U}_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{R}(t)_i \end{Bmatrix} \quad (2.95)$$

onde o índice b identifica os graus de liberdade do sistema base-estrutura menos os graus de liberdade correspondentes à interface entre a porção de sistema de base próximo e o sistema de base afastado, o qual é idealizado como um semiplano infinito. Os graus de liberdade da interfase são identificados através do subscrito i , $\mathbf{R}(t)_i$ é o vetor de reações na interfase (base-afastada) – (porção de sistema de base que interage), o qual pode ser calculado como:

$$\mathbf{R}(t)_i = - \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{bb} & \mathbf{M}_{bi} \\ \mathbf{M}_{ib} & \mathbf{M}_{ii} \end{bmatrix} \{\mathbf{1}\} \ddot{\mathbf{U}}_g \quad (2.96)$$

onde $\ddot{\mathbf{U}}^g_i$ é a aceleração na interfase, que pode ser calculada através da propagação de ondas do campo livre.

Identificando os graus de liberdade exclusivos da estrutura com o subscrito s , os do sistema de base que interage com o subscrito r os graus de liberdade da interfase base-estrutura com o subscrito f e a interface sistema (base-próxima)–(Base-afastada), já identificada com o subscrito i , o sistema descrito em (2.95) pode ser reescrito como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ss} & \mathbf{M}_{sf} & 0 & 0 \\ \mathbf{M}_{fs} & \mathbf{M}_{ff} & \mathbf{M}_{fr} & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_{rf} & \mathbf{M}_{rr} & \mathbf{M}_{ir} \\ 0 & 0 & \mathbf{M}_{ri} & \mathbf{M}_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{U}}_s \\ \ddot{\mathbf{U}}_f \\ \ddot{\mathbf{U}}_r \\ \ddot{\mathbf{U}}_i \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{ss} & \mathbf{C}_{sf} & 0 & 0 \\ \mathbf{C}_{fs} & \mathbf{C}_{ff} & \mathbf{C}_{fr} & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_{rf} & \mathbf{C}_{rr} & \mathbf{C}_{ir} \\ 0 & 0 & \mathbf{C}_{ri} & \mathbf{C}_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}}_s \\ \dot{\mathbf{U}}_f \\ \dot{\mathbf{U}}_r \\ \dot{\mathbf{U}}_i \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ss} & \mathbf{K}_{sf} & 0 & 0 \\ \mathbf{K}_{fs} & \mathbf{K}_{ff} & \mathbf{K}_{fr} & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{rf} & \mathbf{K}_{rr} & \mathbf{K}_{ir} \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_{ri} & \mathbf{K}_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_s \\ \mathbf{U}_f \\ \mathbf{U}_r \\ \mathbf{U}_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{R}(t)_i \end{Bmatrix} \quad (2.97)$$

As componentes correspondentes à estrutura podem ser adotadas com base nas formulações descritas nos itens anteriores. No entanto, as componentes do sistema de base e interfaces devem ser avaliadas segundo as características próprias de cada elemento. Um exemplo ilustrativo de como avaliar estas componentes pode ser encontrado em Halabian (2002).

2.5.2. Formulação dinâmica com modelos discretos

Seja o sistema estrutural com base flexível representado por um sistema discreto que tem apenas a possibilidade de deslocamento na direção horizontal quando submetido a deslocamento de base, tal como mostrado na Figura 2.12.

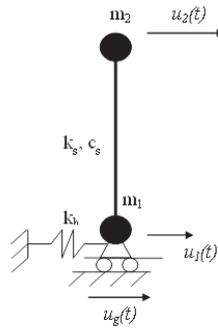


Figura 2.12 – Sistema unidimensional discreto solo-estrutura. (Wolf, 1985).

A flexibilidade da base está representada pelo sistema discreto mola-amortecedor com valores de constantes de rigidez k_h e amortecimento C_h . No caso convencional de base fixa, ou seja, quando o valor de k_h tende para infinito, o deslocamento $u_1(t)$ é nulo, e o sistema pode ser reduzido a um grau de liberdade descrito pela equação de movimento:

$$m_2 \cdot \ddot{u}_2(t) + c_s \dot{u}_2(t) + k_s u_2(t) = -m_2 \ddot{u}_g(t) \quad (2.98)$$

Esta redução é obtida impondo a condição de contorno $u_1(t) = 0$. Porém, quando $u_1(t)$ é diferente de zero, o sistema completo deve ser considerado. Tem-se então:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_s & -c_s \\ -c_s & c_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_2 \\ \dot{u}_1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_s & -k_s \\ -k_s & k_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_1 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{Bmatrix} \ddot{u}_g \quad (2.99)$$

Para o sistema descrito na equação anterior não ser singular, as constantes de mola e amortecimento devem ser adicionadas aos correspondentes graus de liberdade, obtendo-se:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_s & -c_s \\ -c_s & c_s + c_h \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_2 \\ \dot{u}_1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_s & -k_s \\ -k_s & k_s + k_h \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_1 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{Bmatrix} \ddot{u}_g \quad (2.100)$$

Generalizando para um sistema com vários graus de liberdade, a inclusão da flexibilidade da base pode ser entendida como a adição de uma matriz diagonal de

rigidez e amortecimento nos graus de liberdade correspondentes à base. Então, o sistema descrito em (2.67) pode ser modificado para:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(t) + (\mathbf{C} + \mathbf{C}_s)\dot{\mathbf{U}}(t) + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_s)\mathbf{U}(t) = -\mathbf{M}r\ddot{u}_g(t) \quad (2.101)$$

onde as matrizes \mathbf{C}_s e \mathbf{K}_s são diagonais e com termos nulos nos graus exclusivos à estrutura.

2.5.3. Elemento de Base Elasto-plástica

Na presente tese, é considerado que a base flexível tem comportamento elasto-plástico. A base é modelada por sistemas de molas unidimensionais com comportamento elástico ou elasto-plástico bi linear com endurecimento isotrópico (Souza Neto *et al*, 2008). A rigidez da mola (seja translacional ou rotacional) no regime elasto-plástico é considerada como proporcional à rigidez da mesma no regime elástico, tal como mostrado na Figura 2.13, onde k_h e k_r são as constantes elásticas das molas translacional-horizontal e rotacional respectivamente, assim como F_p e M_p são os valores das forças e momentos de escoamento, para translação e rotação respectivamente.

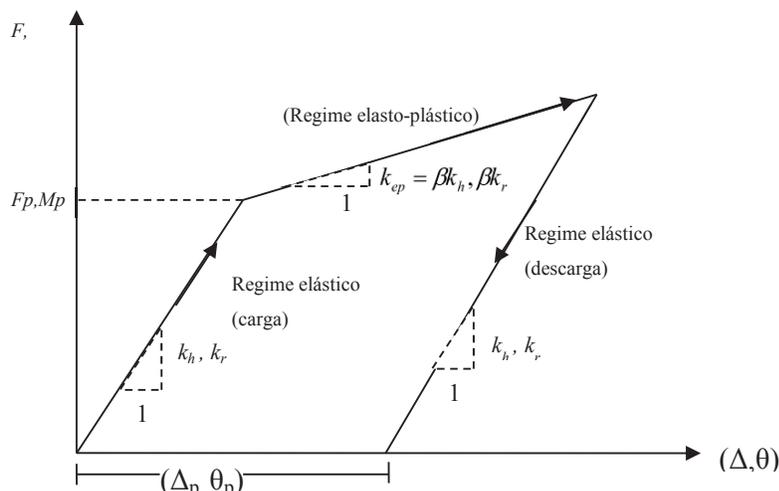


Figura 2.13 – Relação de força vs. Deslocamento de mola translacional ou rotacional unidimensional com comportamento elasto-plástico bi-linear. (Wolf, 1985).

Para os exemplos desenvolvidos na presente tese, as constantes de mola k_h , k_r , assim como os valores de força e momento de escoamento F_p e M_p são escolhidos de maneira arbitrária com a finalidade de que as molas entrem em regime elasto-plástico no decorrer das simulações, já que o intuito da presente tese está na avaliação da mudança da resposta quando a base perde rigidez por plastificação. A determinação das características destas molas com fins de projeto devem responder às características próprias do meio que está sendo modelado, como feito nos trabalhos de Halabian (2002) e Viana (2012).

3 Excitação Sísmica

No presente Capítulo são descritos os aspectos mais importantes sobre excitação sísmica, conceitos gerais de sismicidade e eventos sísmicos. São analisados, de maneira qualitativa, os efeitos de eventos sísmicos nos sistemas estruturais, e, por fim, é apresentada a formulação matemática da excitação sísmica para sua inclusão na análise dinâmica.

3.1. Conceitos Gerais Sobre Sismos e Sismicidade

3.1.1. Definição e principais características dos sismos

Um sismo, ou evento sísmico, também chamado terremoto ou tremor de terra, pode ser entendido como um movimento convulsivo, violento e passageiro da superfície terrestre gerada por distintas causas, podendo ser naturais ou artificiais. Dentre estas causas, as atividades vulcânicas e o contato ou fricção entre placas tectônicas que se deslocam entre si são responsáveis pela geração da maioria dos sismos. O sismo geralmente está relacionado à liberação de uma grande quantidade de energia no interior dos mantos rochosos. Essa liberação de energia é transmitida ao meio rochoso através de oscilações ou ondas que se propagam em todas as direções a partir do lugar de origem, chamado hipocentro, até chegar à superfície. Algumas das grandezas que caracterizam os sismos são:

- **Hipocentro:** Lugar sob o manto rochoso onde é originada a liberação de energia sísmica, como mostrado de forma esquemática na Figura 3.1.
- **Epicentro:** Lugar sobre a superfície terrestre localizado na interseção de um raio terrestre que passa pelo hipocentro com a superfície da terra (em cima do hipocentro, ver Figura 3.1).
- **Magnitude:** Medida que caracteriza a quantidade de energia que é liberada durante o evento sísmico. Geralmente seu cálculo é realizado

através de fórmulas matemáticas que são função dos registros obtidos (deslocamento, aceleração e velocidade) e da distância da estação de registro ao lugar de origem do sismo. Dentre as diversas escalas para calcular a magnitude de um sismo, a escala de Richter é a mais usada (Villaverde ,2008).

- **Intensidade:** Medida que relaciona o impacto sobre as atividades humanas e sobre o meio onde estas são desenvolvidas. A determinação da intensidade de um sismo é subjetiva e pode variar drasticamente entre dois lugares próximos, já que depende das condições de sítio. Existem muitas escalas que medem a intensidade de um sismo, as mais populares são as escalas de Mercalli e Mercalli Modificada. Detalhes podem ser encontrados em Villaverde (2008) e Clough e Penzien (1995).
- **Duração:** Duração de um sismo está relacionada com o tempo necessário para a dissipação da energia liberada durante o evento sísmico. O início do sismo corresponde ao instante de tempo em que são registradas as primeiras anomalias ou perturbações nos registros de vibração. O término do sismo, do ponto de vista de registro de vibrações, pode ser entendido como o instante de tempo em que as perturbações diminuem em até 95%, tendo como referência o valor máximo de alguma grandeza representativa registrada durante o evento sísmico. Por exemplo, o término de um sismo pode ser considerado como o instante em que as acelerações diminuem a um valor menor que 5% da aceleração máxima registrada na fase intensa do sismo. Geralmente, o tempo em que o sismo é percebido pelas pessoas, quando perceptíveis, é relativamente curto, indo de alguns segundos até um ou dois minutos. Porém, a duração total das oscilações e movimentos, dependendo das condições de sítio, pode permanecer, ainda que imperceptível, por um tempo mais prolongado. Sendo apenas registrados pelos aparelhos chamados sismógrafos.

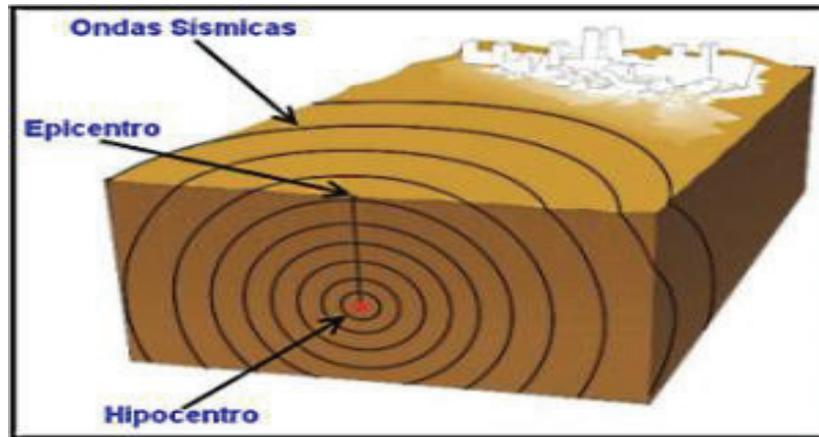


Figura 3.1 – Localização geográfica do hipocentro e epicentro de um sismo (<https://bussoladeplasma.wordpress.com/tag/epicentro>).

Dentre as causas naturais da ocorrência de sismos, a movimentação de placas tectônicas é responsável pela maior quantidade de sismos de grande magnitude e impacto. A maioria destes é localizada nas fronteiras das placas e são chamados de sismos interplacas. A Figura 3.2 mostra de forma esquemática a distribuição da atividade sísmica em todo o mundo. As zonas com registro de atividade sísmica são marcadas em cor vermelha. Pode ser observado que a maior concentração de atividade sísmica encontra-se, de fato, nas zonas limítrofes entre placas tectônicas. Uma zona que concentra uma grande quantidade de eventos sísmicos é o chamado cinturão do Pacífico, o qual recebe este nome porque ele contorna o perímetro do oceano do mesmo nome, tal como ilustrado na Figura 3.2. Cabe salientar que o Brasil, por se encontrar no meio da placa sul-americana, não tem registro de atividade sísmica significativa se comparado com as zonas localizadas nos perímetros das placas. A característica de um lugar geográfico que descreve a frequência com que ocorrem eventos sísmicos é chamada de sismicidade. Como no caso do Brasil, os lugares localizados nos centros das placas tectônicas, e afastados de atividade vulcânica, têm em geral sismicidade baixa, se comparada à sismicidade de regiões localizadas nas costas do Pacífico.

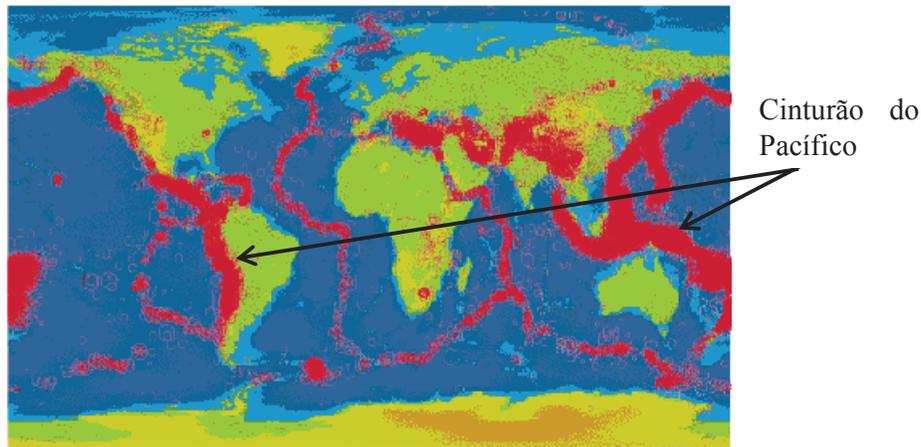


Figura 3.2 – Distribuição de atividades sísmicas no mundo (<http://www.visionlearning.com>).

3.1.2. Propagação e tipo de ondas sísmicas

Os sismos se propagam através da litosfera por meio de ondas (Figura 3.1). Na literatura, as ondas sísmicas são classificadas em dois grandes grupos. Um primeiro grupo é chamado de ondas de corpo, formado principalmente pelas ondas dilatantes, ondas P, que se propagam na direção das vibrações, e pelas ondas de cisalhamento, também conhecidas como ondas S, que têm uma propagação transversal à vibração das partículas (ver Figura 3.3). As ondas P têm maior velocidade de propagação entre 8 a 13 km/s (Villaverde, 2008), e são as primeiras a serem registradas pelos sismógrafos; já as ondas S são mais lentas que as ondas P, apresentando velocidade de propagação de entre 4 a 8 km/s (Villaverde, 2008). O segundo grupo é constituído pelas ondas de superfície, similares às ondas do mar, produto da interação entre as ondas P e S na superfície. A velocidade de propagação oscila ao redor de 3.5 km/s (Villaverde, 2008). Estas ondas são responsáveis pelos efeitos mais nocivos na superfície, sendo as mais conhecidas dentre elas, as ondas Rayleigh e Love. Uma representação esquemática da propagação destas ondas pode ser visto na Figura 3.3.

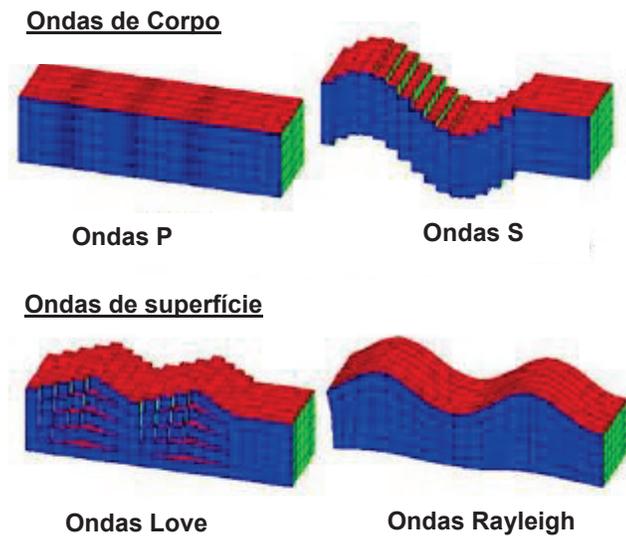


Figura 3.3 – Tipo e forma de propagação das ondas sísmicas no solo.

(<http://www.iesfuentenueva.net>)

3.2.

Efeito dos Sismos sobre os Sistemas Estruturais

Segundo Villaverde (2008), os efeitos dos sismos sobre as estruturas civis ocorrem principalmente devido a três causas: por falha do solo de fundação, por causas ou efeitos indiretos decorrentes dos sismos, e pela vibração do solo de fundação da estrutura.

A falha do solo de fundação de uma estrutura está relacionada à perda de integridade da massa de terra que serve de apoio à estrutura, ocasionada pela própria vibração ou pela interação com a estrutura. Dentre estas falhas, têm-se as fraturas, recalques excessivos e liquefação dos solos. Na Figura 3.4 são apresentadas fotografias que mostram dois tipos de falha do solo. Na Figura 3.4-a é mostrado o fraturamento de uma estrada por perda da estabilidade do solo de fundação que produz esforços de tração inadmissíveis para a estrutura do pavimento. Na Figura 3.4-b, pode ser visto o tombamento de um prédio que possui um sistema de fundação superficial. Neste último caso, a falha do solo de fundação é devida à perda de estabilidade por liquefação do solo, fenômeno que se produz principalmente em solos saturados quando a tensão efetiva tende a ser

nula. Em ambos os casos a falha do sistema solo-estrutura é devida à falha do solo de fundação, e, apesar de haver interação solo-estrutura, este fenômeno não é foco do estudo na presente tese.

Os efeitos indiretos que podem afetar uma estrutura estão relacionados aos fenômenos causados pela ocorrência de um sismo, tais como deslizamentos de terra, tsunamis, incêndios, etc. e representam ações fora do foco de estudo da interação solo-estrutura.

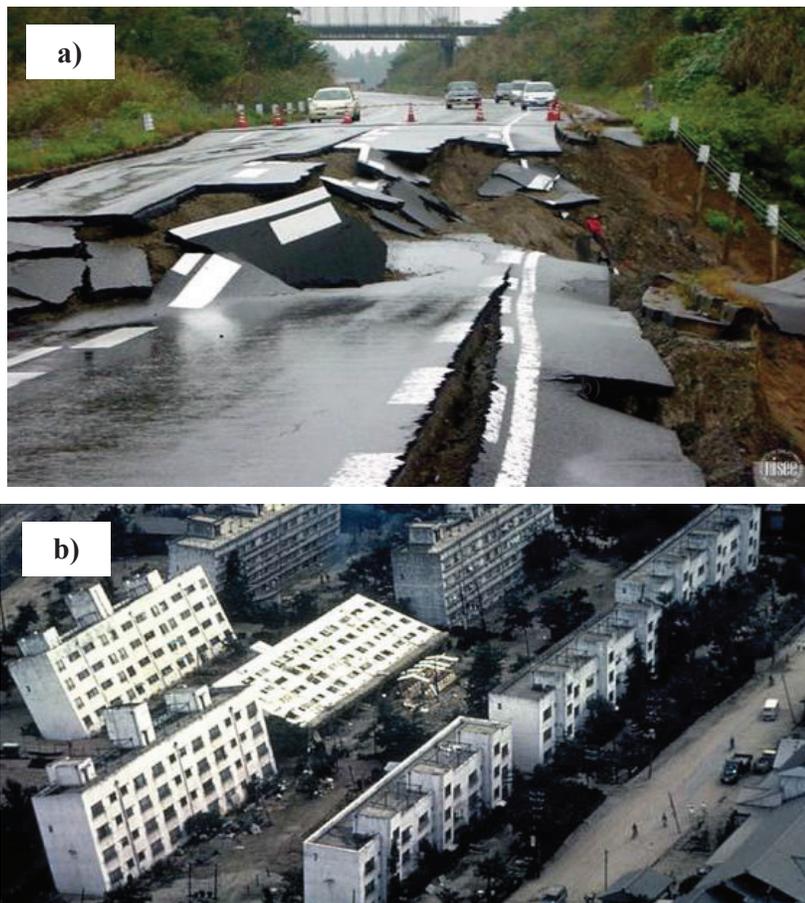


Figura 3.4 – Falha do solo por ação sísmica: a) fratura de solo em estrutura de estrada devida à vibração excessiva no terremoto de Kobe-Japão 1995. b) Tombamento de estrutura devido à liquefação do solo no terremoto de Nigata-Japão 1964 (<http://www.ngdc.noaa.gov/>).

O terceiro tipo de efeito sísmico é a vibração do solo de fundação que é propagada à estrutura. Este fenômeno é o que geralmente estuda-se na análise de estruturas sob a ação sísmica com finalidade de projeto e/ou dimensionamento. A vibração do solo de fundação é transmitida à estrutura pela inércia da massa da

estrutura que gera uma força oposta ao movimento da base. Estas vibrações podem produzir deslocamentos inadmissíveis nas estruturas, levando à falha de elementos estruturais ou até o colapso completo do sistema estrutural. Na Figura 3.5 é mostrado o colapso de uma edificação por vibração excessiva. Neste caso não há falha do solo de fundação e o colapso deve-se à falha de elementos estruturais que levam a perda da estabilidade do sistema estrutural.

Em um evento sísmico é possível ter a combinação de dois ou dos três tipos de efeitos anteriormente descritos. Porém, na presente tese, é estudado apenas o terceiro efeito, que é o estudo das vibrações da estrutura devido à vibração do solo de fundação.



Figura 3.5 – Colapso de edificação devido a vibração excessiva no terremoto em Ica-Perú 2007 (<http://www.elcomercio.pe>).

3.3. Formulação da Excitação Sísmica na Análise Estrutural

3.3.1. Registro da Aceleração sísmica

A excitação sísmica que age sobre o sistema, representada por um deslocamento de base, está presente no sistema de equações diferenciais de movimento como uma aceleração da base (equação 2.67). A resposta do sistema sob esta excitação depende das características da aceleração sísmica, tais como a máxima amplitude (máxima aceleração), duração da excitação (duração do

sismo), e o conteúdo e distribuição de frequências. Na prática, os sismos são registrados através de instrumentos chamados sismógrafos que fornecem dados relativos ao movimento do solo, tais como deslocamento, velocidade e aceleração no ponto de medição ou de controle. Tem-se assim a variação da aceleração do solo no tempo, o chamado acelerograma. Os acelerogramas registram, através de séries discretas, as informações necessárias para a determinação da função de aceleração de base $\ddot{u}_g(t)$ presente na equação (2.67). Um exemplo de acelerograma é mostrado na Figura 3.6, onde se registra a componente Norte-Sul da aceleração do sismo El Centro, ocorrido na Califórnia em 1940 (Clough e Penzien, 1995).

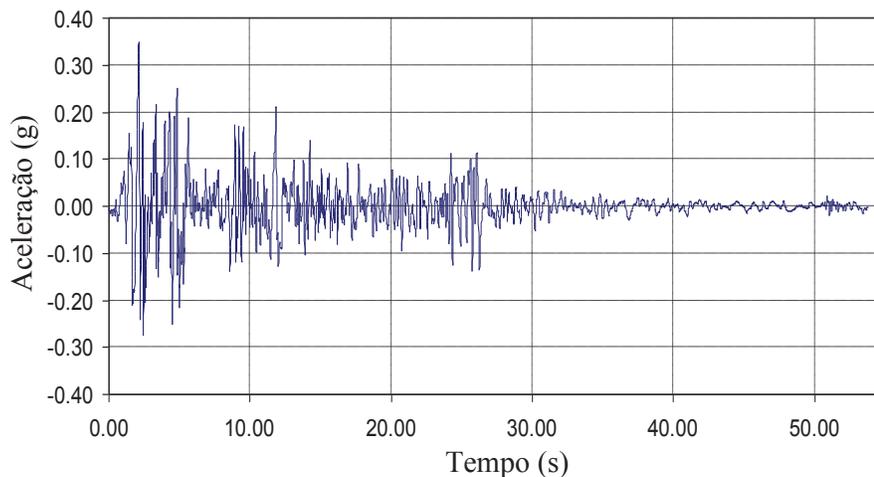


Figura 3.6 – Registro de aceleração do sismo “El Centro (Califórnia 1940)” direção Norte-Sul (Clough e Penzien, 1995).

3.3.2. Potência da excitação sísmica

Outra informação importante que pode ser obtida através do registro de aceleração do sismo é a função densidade de espectro de potência do sismo, identificada na presente tese pela sigla FDEP, que indica a distribuição da potência da aceleração sísmica em função da frequência. Clough e Penzien (1995) e Villaverde (2008) definem a função de potência de um sismo como:

$$\phi_{ff}(\omega) = \frac{1}{2\pi T} \left| \int_0^T \ddot{u}_g(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2 \quad (3.1)$$

onde T é o tempo de duração da excitação sísmica. A equação (3.1) pode ser representada em termos da transformada de Fourier como:

$$\phi_{ff}(\omega) = \frac{1}{2\pi T} \left| \mathcal{F}(\ddot{u}_g(t)) \right|^2 \quad (3.2)$$

onde o operador $\mathcal{F}(f)$ retorna a transformada de Fourier da função $f(t)$, a saber:

$$\mathcal{F}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt \quad (3.3)$$

A determinação da função densidade é de grande importância prática, já que fornece a distribuição da potência sísmica em função da frequência, ou seja, mostra o grau de participação das frequências na aceleração sísmica. Com esta informação é possível ter uma estimativa qualitativa do efeito de uma ação sísmica sobre um sistema estrutural onde são conhecidas as frequências naturais de vibração. Se uma estrutura é submetida a uma excitação sísmica, o efeito em termos de acelerações e deslocamentos será maior se as frequências naturais principais da estrutura, ou seja, com maior participação no movimento, encontram-se na faixa onde a função densidade de espectro de potência é maior.

A Figura 3.7a mostra o registro de aceleração da fase intensa de um sismo, normalizado com respeito à aceleração máxima, e sua correspondente função de espectro de potência. Neste espectro, pode ser observado que o sismo concentra sua maior potência no intervalo de frequências que estão entre 2 Hz e 30 Hz, como ilustrado na Figura 3.7b. Isto indica que o efeito do sismo será maior em sistemas estruturais cujas frequências de vibração associadas aos modos com maior participação se encontrem nesta faixa de frequências.

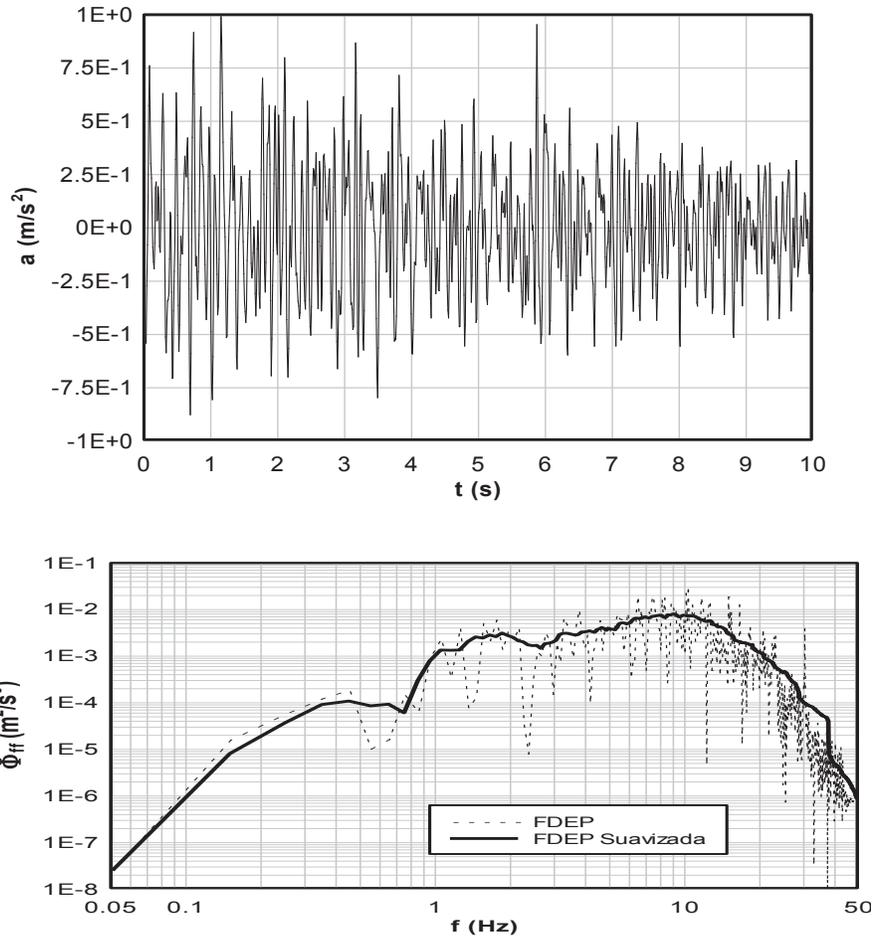


Figura 3.7 – FDEP gerada a partir de um acelerograma normalizado (Roehl, 2000).

Na prática, os registros de aceleração sísmica são descritos por séries temporais discretas. Neste caso, é necessário um procedimento que permita a obtenção da FDEP da aceleração sísmica usando esses registros discretos. Neste contexto, o emprego da Transformada Discreta Rápida de Fourier, conhecida pela sigla FFT, é uma ferramenta útil para a determinação da FDEP de uma aceleração com registro em série discreta. A FFT de uma função discreta f com N pontos resulta em outra função discreta também de N termos. Os termos da FFT podem ser calculados em pares seguindo a formulação apresentada em Peled e Liu (1976) e em Brigham (1974) a través de:

$$F_n = \frac{1}{2}(Y_n + W_n \cdot Z_n) \quad n = 0.. \frac{N}{2} - 1$$

$$F_{\frac{N}{2}+n} = \frac{1}{2}(Y_n - W_n \cdot Z_n) \quad n = 0 \dots \frac{N}{2} - 1 \quad (3.4)$$

com:

$$Y_n = \frac{1}{N/2} \sum_{j=0}^{N-1} f_{2j} \cdot e^{-i \frac{2\pi n j}{N/2}}$$

$$Z_n = \frac{1}{N/2} \sum_{j=0}^{N-1} f_{2j+1} \cdot e^{-i \frac{2\pi n j}{N/2}}$$

$$W_n = e^{-i \frac{2\pi n j}{N}} \quad (3.5)$$

Aqui F_n é o valor do n ésimo termo da Transformada de Fourier e f_{2j} e f_{2j+1} são os termos pares e ímpares da função discreta f a ser transformada, respectivamente. Maiores detalhes sobre a obtenção do FDEP podem ser encontradas em Villaverde (2008).

3.4. Geração de Sismos Artificiais

Na prática, quando os registros disponíveis dos eventos sísmicos nos lugares próximos ao lugar do projeto são insuficientes, ou indisponíveis, ou não contemplam a faixa de frequências de interesse da estrutura, ou mesmo não cumprem com as exigências das normas de projeto, é muito útil a geração de sismos artificiais a partir de uma função de densidade de espectro de potência, FDEP (Clough e Penzien (1995), Roehl, 2000). Nesta seção é apresentada uma formulação para geração de sismos artificiais seguindo as metodologias propostas em Clough e Penzien (1995) e em Roehl (2000).

3.4.1. Formulação de sismos artificiais

Os parâmetros envolvidos na geração de um sismo artificial são diversos e dependem de características particulares do local, tais como natureza do solo,

distância do epicentro, profundidade do foco do sismo, características geológicas ao longo do percurso de propagação do sismo, etc.

Um dos métodos mais utilizados na geração de sismos artificiais, a partir de uma FDEP, é o método da superposição de harmônicos, no qual uma função harmônica no tempo é descrita como:

$$x_i(t) = A_i \text{sen}(\omega_i t + \alpha_i) \quad (3.6)$$

onde $x_i(t)$ é a i -ésima função harmônica, A_i é a amplitude do i -ésimo harmônico, ω_i é a frequência circular e α_i é o ângulo de fase. Estas funções senoidais são superpostas para obtenção do processo aleatório, que serve de base para caracterização do acelerograma do sismo, e é assim dado por:

$$\ddot{u}(t) = \sum_{i=1}^N x_i(t) \quad (3.7)$$

A equação (3.7) define a forma da aceleração do sismo artificial, que acaba sendo uma série de Fourier em seno. Os harmônicos com frequência circular ω_i têm as correspondentes amplitudes $A_i = 2|C_i|$, onde C_i é o valor da FDEP correspondente ao valor de frequência ω_i . Estes valores são obtidos a partir da média dos quadrados da função $x_i(t)$ no intervalo $0 < t < T$, onde T é a duração da fase intensa do sismo, em segundos.

A correspondência entre a média dos quadrados da função $x_i(t)$ e a função densidade de espectro de potência, FDEP é dada por:

$$\phi_{ff}(\omega) = \frac{A_i^2}{2\Delta\omega} \quad (3.8)$$

A equação (3.8) atende à função densidade unilateral, ou seja, a FDEP que tem toda a sua potência concentrada somente no semieixo positivo de ω . A diferença entre as frequências consecutivas ω_i e ω_{i-1} é um valor fixo, correspondente a $\Delta\omega = dt/2\pi$. O que garante a aleatoriedade do processo é a

geração do ângulo de fase, α_i , que é obtido randomicamente através de uma função densidade de probabilidade uniforme entre 0 e 2π .

3.4.2.

Função intensidade e correção da linha base

O acelerograma que representa um sismo deve começar com a aceleração igual a zero e gradativamente aumentar seus valores até que atinja a fase mais intensa do sismo e, depois, ter esses valores da fase intensa reduzidos até alcançar o valor de aceleração que se deseja. Assim sendo, é preciso que seja aplicada uma correção nos valores obtidos no método da superposição de oscilações. Para isto, utiliza-se uma função, chamada função intensidade, $I(t)$, que visa fornecer ao acelerograma gerado o caráter não estacionário para simular um sismo mais próximo de um real. Existem várias formas de se definir uma função intensidade $I(t)$. Uma maneira comumente adotada tem a seguinte definição proposta por Clough e Penzien (1995):

a) Fase inicial ($0 < t < T_{inicial}$):

$$I(t) = \left(\frac{t}{T_{inicial}} \right)^2 \quad (3.9)$$

onde: $T_{inicial}$ é o instante em que se inicia a fase intensa do sismo e pode ser estimado como $T_{inicial} = 10\%T$ (Roelh, 2000).

b) Fase intensa ($T_{inicial} < t < T_{final}$):

$$I(t) = 1 \quad (3.10)$$

onde T_{final} é o instante em que acaba a fase intensa do sismo.

c) Fase final ($T_{final} < t < T$):

$$I(t) = e^{a(t-T_{final})} \quad (3.11)$$

O fator a é determinado de modo a garantir uma redução de 95% do valor da aceleração máxima ao final do intervalo. A função $I(t)$ é aplicada no processo superposição da seguinte forma:

$$\ddot{u}(t) = I(t) \sum_{i=1}^N x_i(t) \quad (3.12)$$

Uma condição importante a ser considerada é que a aceleração, a velocidade e o deslocamento iniciais, assim como a aceleração e a velocidade finais, naturalmente devem ter valores nulos, de forma que o acelerograma gerado simule adequadamente as características de um sismo real. Estas condições, em parte, são atendidas quando aplicada a função intensidade $I(t)$. No entanto, para que as condições de contorno sejam satisfeitas, utiliza-se uma correção dos valores do acelerograma de modo que ele passe a atender tais critérios. A correção utilizada é feita ponto a ponto na série discreta de valores do acelerograma, já com a função intensidade aplicada. Esta correção, denominada correção da linha de base, tem a seguinte forma:

$$\ddot{y}_{cc}(t) = \ddot{y}_{nc}(t) + a_c + 2b_c \cdot t + 3c_c t^2 \quad (3.13)$$

onde \ddot{y} é a função aceleração a corrigir e os subscritos cc e nc indicam o acelerograma corrigido e não corrigido, respectivamente. As constantes de correção a_c , b_c e c_c são obtidas utilizando a equação (3.14) que estabelece a operação de minimização aplicada ao funcional $F(t, V_0, a_c, b_c, c_c)$. Para isto a primeira variação do funcional tem que ser nula, ou seja:

$$\delta F(t, V_0, a_c, b_c, c_c) = \delta \int_0^T (\dot{y}_{cc})^2 dt = 0 \quad (3.14)$$

onde T é a duração total do sismo

A seguir é apresentado um diagrama de fluxo com as etapas principais na geração de sismos artificiais (Roehl, 2000).

Geração de sismos artificiais a partir de uma FDEP

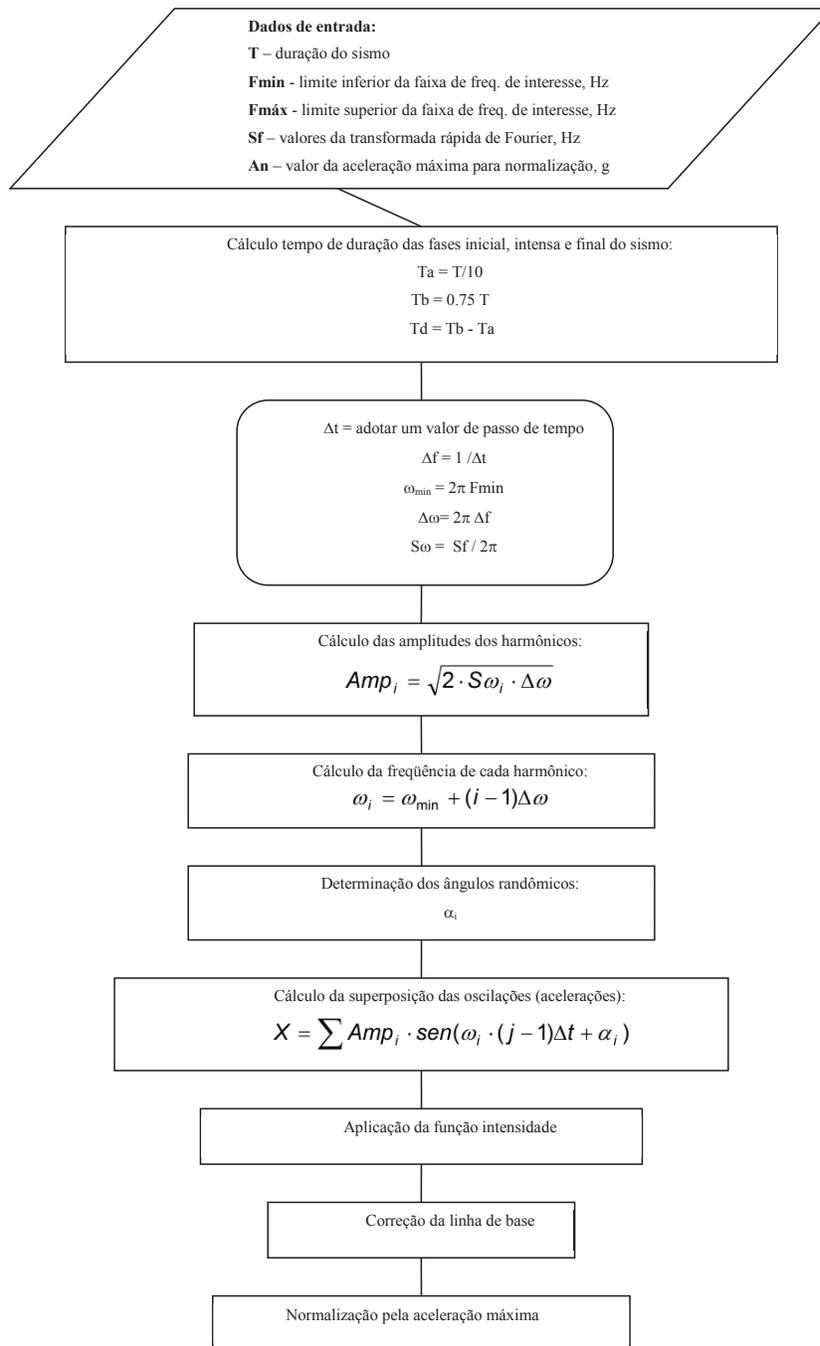


Figura 3.8 – Fluxograma para a geração de um sismo artificial a partir de uma FDEP (Roehl, 2000).

4 Exemplos Numéricos da Análise no Domínio do Tempo

Neste Capítulo são apresentados alguns exemplos numéricos para validar as formulações que foram apresentadas nos Capítulos 2 e 3 da presente tese e para estudar a resposta de sistemas reticulados submetidos a ações sísmicas no domínio do tempo. Inicialmente é feita a apresentação dos modelos que são estudados no presente Capítulo. A seguir, é feita uma comparação dos métodos propostos para a integração no tempo assim como a sua validação na análise linear. Finalmente são apresentados exemplos envolvendo o estudo da influência da não linearidade geométrica assim como da não linearidade física dos apoios.

4.1. Descrição dos modelos estudados

4.1.1. Torre esbelta de três graus de liberdade T-1

É estudado inicialmente, para validar a implementação dos algoritmos de análise dinâmica no domínio do tempo, um modelo de torre esbelta apoiada sobre uma base rígida, representada por um único elemento de barra, e submetida a um deslocamento harmônico de base na direção horizontal, tal como mostrado na Figura 4.1. As propriedades geométricas e mecânicas do modelo são apresentadas na Tabela 4-1.

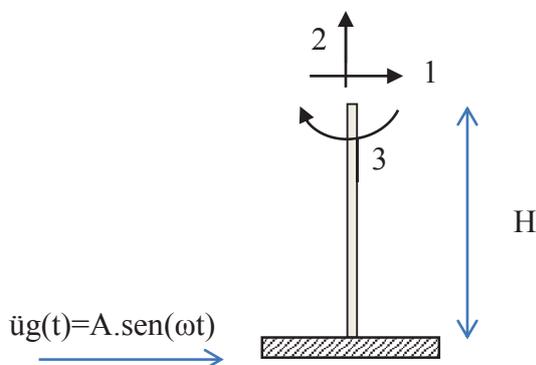


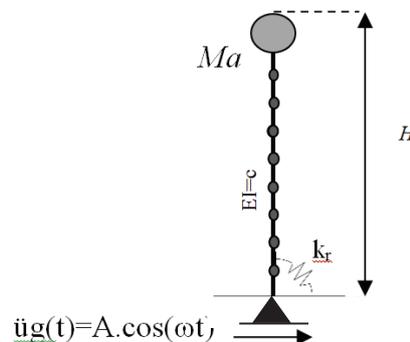
Figura 4.1 – Modelo de torre esbelta T-1.

Tabela 4-1. Parâmetros físicos e geométricos da estrutura T-1

Parâmetro	Símbolo	Unidade	Valor
Módulo de elasticidade	E	GPa	31.0
Área da seção transversal	A	m ²	0.025
Inércia da seção	I	m ⁴	$3,25521 \times 10^{-4}$
Altura da torre	H	m	10
Densidade do material	ρ	kg/ m ³	2400.00

4.1.2.**Torre esbelta de com massa concentrada no topo T-2**

Considera-se aqui um modelo de torre de concreto simulada por Halabian e Naggar (2002), que representa a estrutura de um reservatório elevado de água, modelando a estrutura como uma coluna de seção transversal constante, restringida na base por meio de uma mola rotacional com constante de rigidez k_r , com uma massa concentrada no topo, simulando a caixa d'água. A estrutura é discretizada com dez elementos de barra de igual comprimento e submetida a um deslocamento horizontal de base, tal como ilustrado na Figura 4.2. As propriedades do modelo são mostradas na Tabela 4-2.

**Figura 4.2 – Modelo de torre esbelta T-2.****Tabela 4-2. Parâmetros físicos e geométricos da estrutura T-2**

Parâmetro	Símbolo	Unidade	Valor
Módulo de elasticidade	E	GPa	31.0
Área da seção transversal	A	m ²	6.2831
Momento de Inércia	I	m ⁴	39.52
Altura da torre	H	m	70
Densidade do material	ρ	kg/ m ³	2400.00
Massa concentrada	Ma	kg	150000.00

4.1.3. Pórtico de dois andares Po-2

Neste item é estudado um pórtico de dois andares formado por perfis metálicos e ligações rígidas, apoiado em base rígida e submetido a um deslocamento horizontal de base. Este modelo foi estudado por Chan e Chui (2000) e por Silva (2009). A representação esquemática do modelo, assim como as propriedades geométricas e de material, são mostradas na Figura 4.3.

Este pórtico é modelado com a finalidade de estudar a eficiência dos algoritmos de integração no caso linear. O pórtico é modelado com oito elementos do tipo barra, sendo um elemento de barra para cada pilar (quatro elementos no total para os pilares) e dois elementos de barra para cada viga, seguindo o modelo apresentado por Silva (2009).

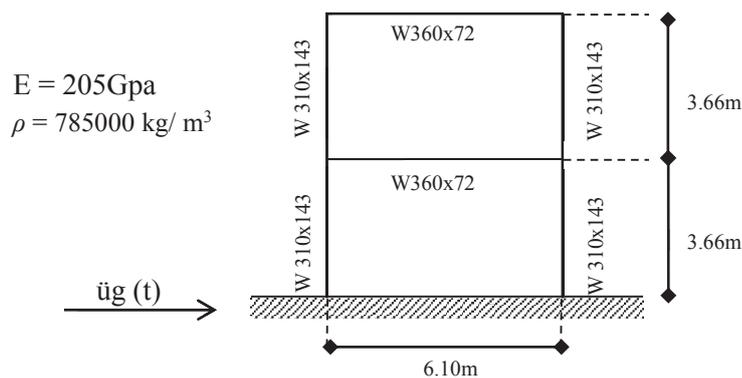


Figura 4.3 – Modelo de pórtico de dois andares Po-2.

4.1.4. Pórtico de seis andares Po-6

Um pórtico de seis andares formado por perfis metálicos, como mostrado na Figura 4.4, é aqui modelado considerando cargas distribuídas nas vigas, além da massa da própria da estrutura. A estrutura é submetida a um deslocamento horizontal de base. A base da estrutura é considerada flexível à rotação.

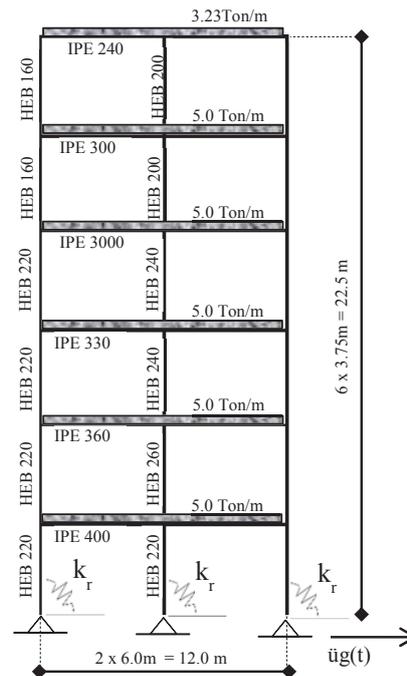


Figura 4.4 – Modelo de pórtico de seis andares Po-6. Ref. Silva(2009)

Esta estrutura tem sido utilizada por diversos pesquisadores como um modelo de referência para a análise de estruturas de pórticos metálicos. Estudos usando esta estrutura podem ser encontrados em Chen *et al* (1996), Chan e Chui (2000), e, mais recentemente, em Silva (2009). O material adotado para esta estrutura corresponde ao material adotado para pórtico de dois andares Po-2. A estrutura é modelada com um total de 84 elementos de viga-coluna, sendo cada pilar modelado por dois elementos, e cada viga por quatro elementos.

4.1.5. Arco circular abatido Ac-1

O arco circular abatido é uma estrutura estudada por diversos autores e pesquisadores em virtude de sua não linearidade geométrica, como aponta Crisfield (1997) e Silva (2009). Na presente tese é estudado um arco abatido, cujas propriedades geométricas são adotadas do trabalho de Silva (2009). Assim também são considerados apoios flexíveis à rotação e à translação horizontal modelados por molas com constante de rigidez k_h para a mola translacional e k_r para a mola rotacional. O arco é submetido a um deslocamento vertical de base e a uma força estática aplicada no centro do vão, tal como mostrada na Figura 4.5.

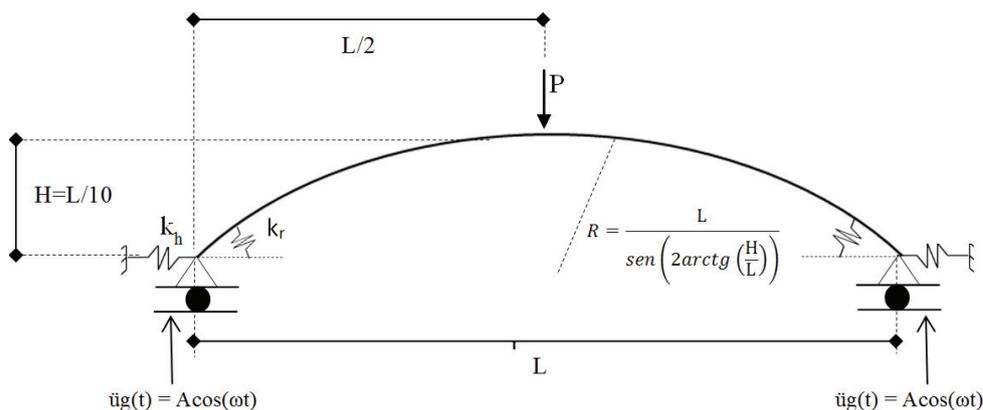


Figura 4.5 – Modelo de arco circular abatido.

A estrutura é modelada com vinte elementos de igual comprimento. As propriedades geométricas e de material são mostradas na Tabela 4-3

Tabela 4-3. Parâmetros físicos e geométricos do arco Ac-1

Parâmetro	Símbolo	Unidade	Valor
Módulo de elasticidade	E	MPa	2000
Área da seção transversal	A	m ²	0.01
Inércia da seção	I	m ⁴	0.0001
Cumprimento do vão	L	m	10.0
Densidade do material	ρ	kg/m ³	2400

4.2.

Exemplos de sistemas lineares sob excitação harmônica

4.2.1.

Validação dos métodos de integração

Para validar a implementação dos algoritmos de integração no tempo é estudada a resposta da torre T-1, cujo modelo discretizado possui apenas 3 graus de liberdade. As frequências e períodos de vibração são apresentados na Tabela 4-4.

Tabela 4-4. Três primeiras frequências e períodos de vibração da torre T-1

N	Tempo (s)	
	Frequência (rad/s)	Período(s)
1	5.805	10.823
2	27.8146	0.225
3	508.265	0.012

Na Figura 4.6 é mostrada a resposta no tempo do deslocamento horizontal do topo da torre quando submetida a uma excitação horizontal harmônica com frequência de excitação igual à primeira frequência natural de vibração, $\omega = 5.805\text{rad/s}$, e uma magnitude de aceleração $A = 0.4g$. Na Figura 4.6 são comparadas as respostas obtidas pelos métodos de integração propostos para a análise linear no tempo e a solução analítica para o modelo estudado.

Pode-se observar que todos os métodos de integração no tempo representam adequadamente a resposta analítica, validando a implementação dos métodos de integração direta para a análise linear. Vale salientar que o método de integração RKG4 consegue acompanhar a resposta analítica de forma precisa, mesmo com um passo de tempo de aproximadamente 0.13 vezes o período da vibração, que pode ser considerado elevado se considerados os valores usados nos diversos exemplos apresentados na literatura.

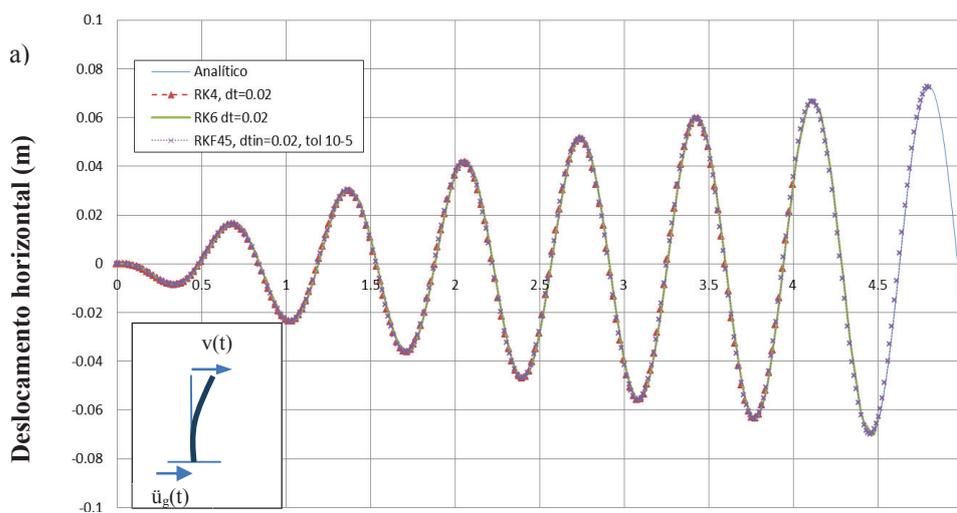


Figura 4.6 – Variação do deslocamento horizontal no topo da torre T-1 no tempo com métodos Runge-Kutta explícitos. $A=0.4g$, $C=0.25M$, $\omega=5.8\text{rad/s}$.

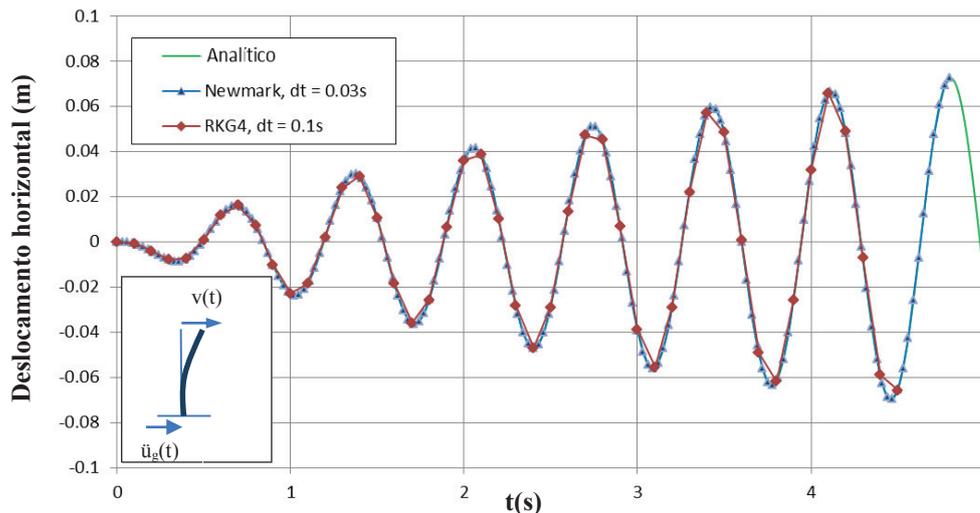


Figura 4.7 – Variação do deslocamento horizontal no topo da torre T-1 no tempo com os métodos de RKG4 implícito e Newmark. $A = 0.4g$, $C = 0.25M$, $\omega = 5.8rad/s$.

4.2.2. Estudo de desempenho e estabilidade

O bom desempenho de um método de integração pode ser entendido como a propriedade deste fornecer uma resposta precisa com o menor custo computacional possível. O custo computacional pode ser avaliado através da análise do tempo necessário para processamento de uma etapa completa de análise. Este tempo depende do número de operações numéricas e das características físicas do computador. Na Tabela 4-5, que mostra o tempo de processamento necessário para a integração de 100 mil e 200 mil passos de tempo, respectivamente, pode-se observar que os métodos explícitos de Runge-Kutta apresentam-se como os mais rápidos dentre os algoritmos implementados. Dentre estes, o método clássico de quarta ordem e quatro etapas, RK4, mostra-se como o mais rápido, precisando de 5.9s e 11.7s para o processamento de, respectivamente, 100 mil e 200 mil passos de análise. Já o método de Runge-Kutta implícito de quarta ordem e duas etapas, RKG4, apresenta o maior esforço computacional, precisando cerca de cinco vezes o tempo requerido pelo método RK4 e quatro vezes o tempo necessário pelo método de Newmark. O cálculo do tempo é feito utilizando um processador de 3.2 GHz de velocidade.

Tabela 4-5. Tempo de processamento para análise de T-1

Método	Tempo (s)	
	1x10 ⁵ passos	2x10 ⁵ passos.
RK4	5.9	11.7
RKF45	6.4	12.7
RKN6	6.8	13.7
RKG4	28.5	57.2
Newmark	7.1	14.2

Outro aspecto importante na análise da eficiência de um método de integração é a estabilidade do mesmo, a qual está relacionada diretamente com o tamanho máximo de passo de tempo Δt que pode ser utilizado para acompanhar a resposta sem perder a precisão e exatidão requeridas. O valor máximo de Δt que pode ser usado em uma integração no tempo depende também das características do sistema a analisar, e principalmente do conteúdo de frequências e o nível de participação destas frequências na resposta do sistema. Estruturas que possuam um grande conteúdo de frequências participando de forma importante na resposta perante uma dada excitação dinâmica, em geral demandam o uso de passos de tempo menores. A seguir, na Tabela 4-6, são mostrados os valores de Δt máximos permitidos para analisar a resposta dos sistemas T-1, Po-2 e Po-6, considerando base rígida e excitação de base harmônica com frequência de excitação igual à primeira frequência natural do sistema.

Tabela 4-6. Δt máximo mantendo estabilidade na ressonância

Método	Δt (s)		
	T-1(3GL)	Po2(24GL)	Po6(225)
RK4	0.1	0.0015	0.00011
RKN6	0.055	0.0010	0.00008
RKF45	0.011	0.0017	0.00012
RKG4	NR*	NR*	NR*
Newmark	Incondicional		

NR*: Não foi registrada instabilidade analisando valores de Δt de até 0.2s

Na Tabela 4-6 pode ser observado que o valor de Δt máximo que pode ser usado mantendo a estabilidade diminui nos métodos explícitos conforme aumenta o número de graus de liberdade do sistema. Para os sistemas estudados, o método

de Newmark apresenta incondicionalidade. Já o método implícito RKG4 não registra problemas de instabilidade para os valores de Δt estudados, sendo o máximo valor estudado de $\Delta t = 0.2s$. É importante ressaltar que o estudo é feito para sistemas lineares, sendo provável que na análise de sistemas não lineares estes limites sejam menores.

Nas Figuras 4.8 e 4.9 é mostrada a resposta no tempo do deslocamento horizontal do topo dos pórticos Po-2 e Po-6 para uma aceleração horizontal de base com uma intensidade de $0.4g$. Pode ser visto que, para ambas as estruturas, a integração com o método de Runge-Kutta implícito, RKG4, usando um passo de tempo constante de $\Delta t = 0.1s$, é obtida uma resposta similar à resposta da integração feita com o método de Newmark e um passo de tempo de $\Delta t = 0.01s$. Isso reforça a característica de estabilidade e precisão do método implícito.

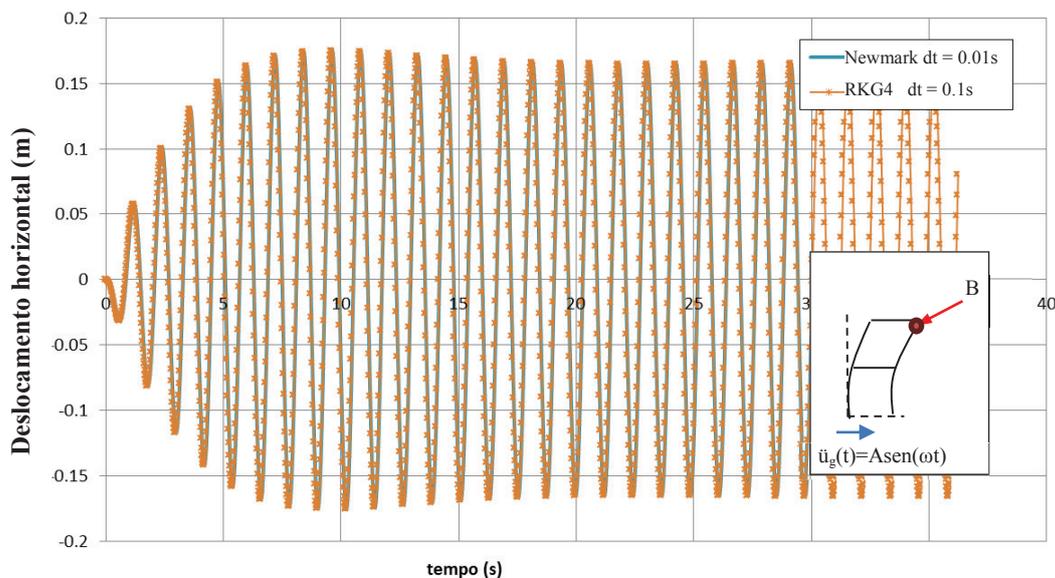


Figura 4.8 – Deslocamento horizontal do ponto B em Po-2. $A=0.4g$, $C=0.25M$, $\omega=7.86$ rad/s.

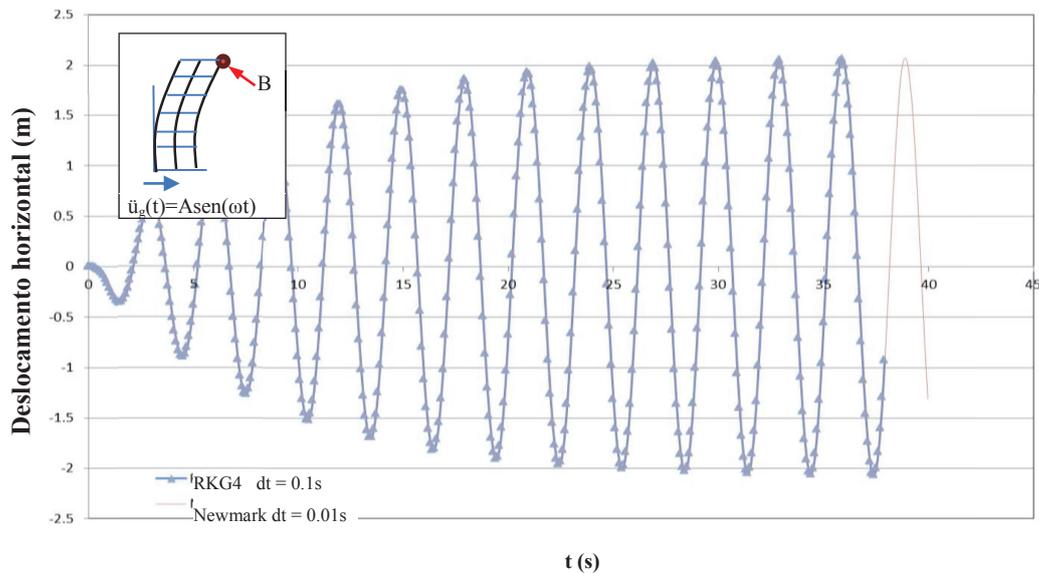


Figura 4.9 – Deslocamento horizontal do ponto B em Po-6. $A=0.4g$, $C=0.25M$, $\omega=1.96$ rad/s.

4.2.3. Influência de base elástica

Na presente seção é estudada a influência de apoios flexíveis na resposta da estrutura quando submetida a um deslocamento de base. Para tal, são estudados os sistemas estruturais T-2 e Po-6, os quais têm apoios com flexibilidade rotacional. A consideração desta flexibilidade é feita através da inclusão de molas de rigidez rotacional com comportamento linear elástico.

4.2.3.1. Influência na resposta no tempo

A seguir é estudada a influência da rigidez das molas rotacionais lineares no deslocamento horizontal no topo das estruturas T-1 e Po-6, quando submetidas à ação de um deslocamento de base no sentido horizontal. Nas Figuras 4.10 e 4.11 pode-se observar que a variação da rigidez das molas rotacionais na fundação modifica de forma significativa a resposta das estruturas, existindo grande diferença entre as amplitudes de vibração. Isto se deve principalmente ao efeito de modificação das frequências naturais de vibração com a introdução da rigidez das molas. Para o caso da torre T-2, a rigidez rotacional $k_r = 10^{12}$ kN/rad produz as maiores amplitudes de vibração dentre os valores de k_r estudados, quando considerada uma frequência de excitação de $\omega=5.1$ rad/s. Já na vibração do

pórtico Po-6, as maiores amplitudes para uma frequência de excitação de $\omega=2.3$ rad/s são observadas para o caso de apoios rígidos.

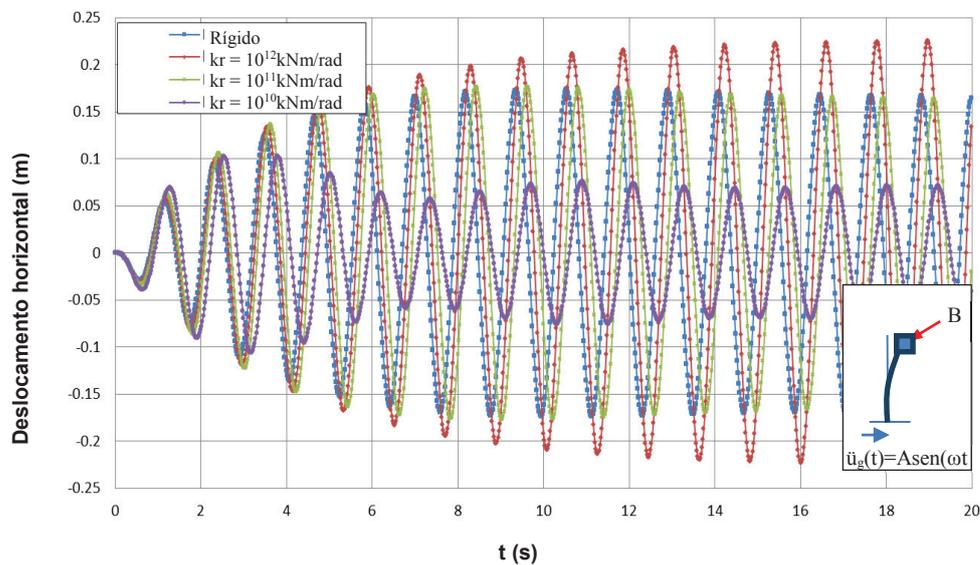


Figura 4.10 – Deslocamento horizontal do ponto B em T-2. $A=0.4g$, $C=0.25M$, $\omega=5.1$ rad/seg.

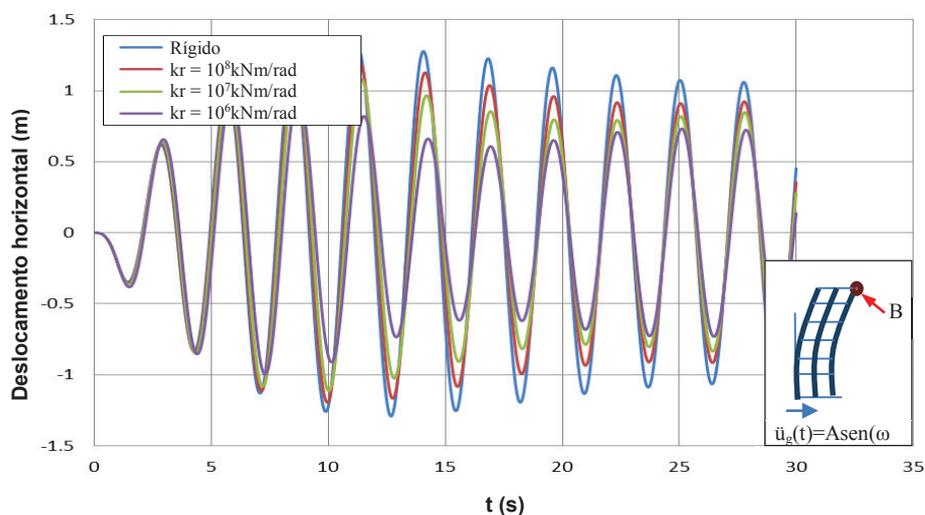


Figura 4.11 – Deslocamento horizontal do ponto B em Po-6. $A = 0.4g$, $C = 0.25M$, $\omega = 2.3$ rad/seg.

4.2.3.2. Influência na ressonância

Nesta seção é avaliada a influência da rigidez rotacional na relação entre o deslocamento horizontal máximo do topo das estruturas T-2 e Po-6 na fase permanente e a frequência de excitação (curvas de ressonância).

Nas Figuras 4.12 e 4.13 mostra-se a variação da amplitude máxima de vibração horizontal no topo da torre T-2 e do pórtico Po-6, respectivamente. A consideração de uma base flexível modifica a resposta da estrutura na ressonância, isto tanto para a torre T-2 quanto para o Pórtico Po-6. Em ambos os casos, a redução da rigidez rotacional da base se traduz em um incremento da amplitude das vibrações máximas na fase permanente, assim como em um decréscimo das frequências naturais. Esta diminuição no valor da frequência é mais pronunciada, em ambos os casos, para a segunda frequência de vibração.

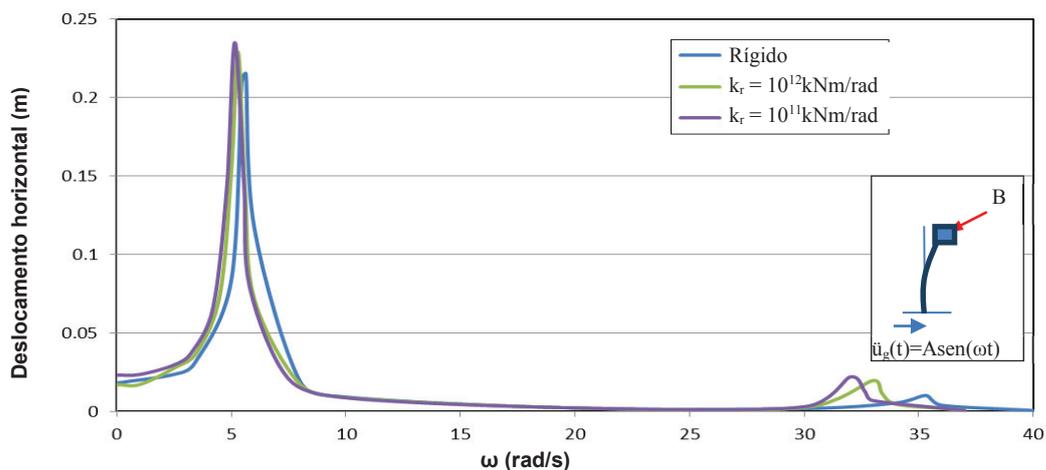


Figura 4.12 – Deslocamento horizontal máximo de B em T-2 na fase permanente vs. frequência de excitação. $A = 0.4g$, $C = 0.25M$.

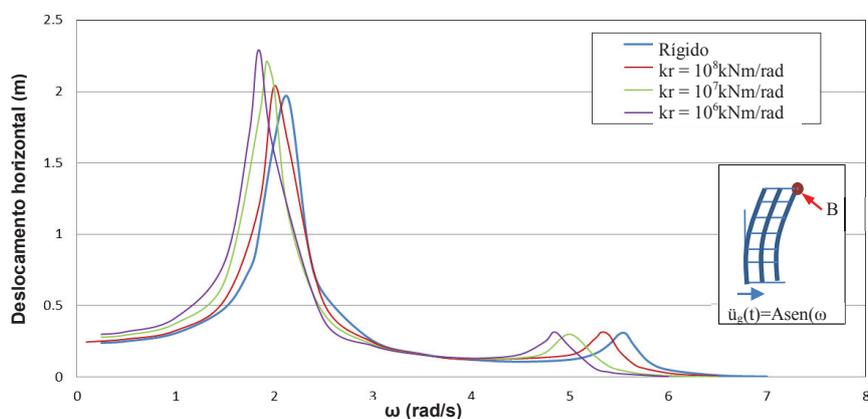


Figura 4.13 – Deslocamento horizontal máximo de B em Po-6 na fase permanente vs. frequência de excitação. $A = 0.4g$, $C = 0.25M$.

4.3. Exemplos da Análise Não Linear – Excitação Harmônica

4.3.1. Influência da não linearidade geométrica

Nesta seção é estudada a influência da não linearidade geométrica do sistema quando submetido a um deslocamento harmônico de base. Como exemplo para a validação das implementações de integração não linear no tempo, é estudado o arco abatido Ac-1, já que este apresenta forte não linearidade geométrica. Após a validação, é estudada a influência da não linearidade geométrica na resposta das estruturas T-2 e Po-6.

4.3.1.1. Validação da integração direta no tempo

Na Figura 4.14 é mostrada resposta do deslocamento vertical no centro do vão do arco Ac-1, calculada com os dois algoritmos de integração não linear, Newmark e Runge-Kutta implícito RKG4. Pode-se observar que a resposta obtida através do algoritmo do Newmark coincide com a resposta obtida através de RKG4.

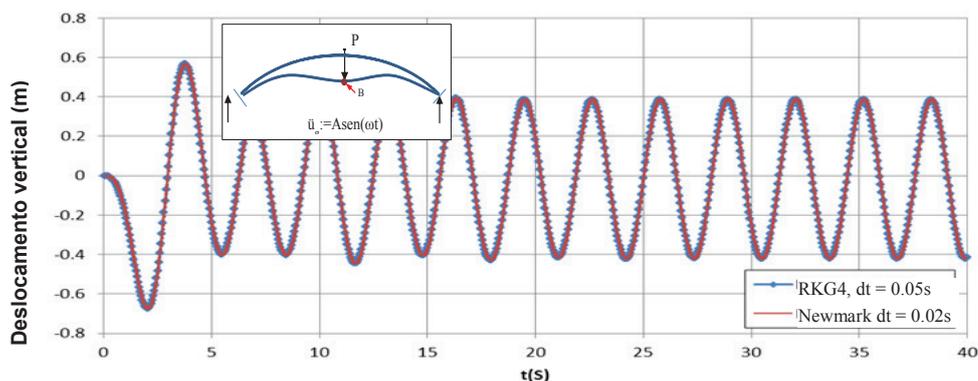


Figura 4.14 – Deslocamento vertical de B vs. t em Ac-1. $A = 0.8g$, $C = 0.50M$. $P = 0.0kN$, $\omega = 1.95rad/s$. Base rígida.

Compara-se, a seguir, a resposta linear e não linear variando a intensidade da excitação partindo da premissa que, para intensidades de excitação baixas, a resposta linear e não linear devem ser próximas, proximidade que deve diminuir com o aumento da intensidade da excitação. A Figura 4.15 mostra a vibração

vertical no centro do vão. Pode-se notar que, para uma aceleração de base de $0.01g$, a resposta linear e não linear são muito próximas. À medida que a magnitude aumenta, a resposta não linear se afasta da solução linear. Outro aspecto que se pode notar é a diferença da configuração da vibração, que é simétrica no caso linear e não simétrica no caso não linear, sendo os picos negativos maiores que os positivos. Diferença esta que é acentuada com o aumento da intensidade da excitação. Este comportamento é esperado em estruturas como o arco abatido, onde a rigidez do sistema aumenta quando o arco é tracionado e diminui quando o mesmo é comprimido.

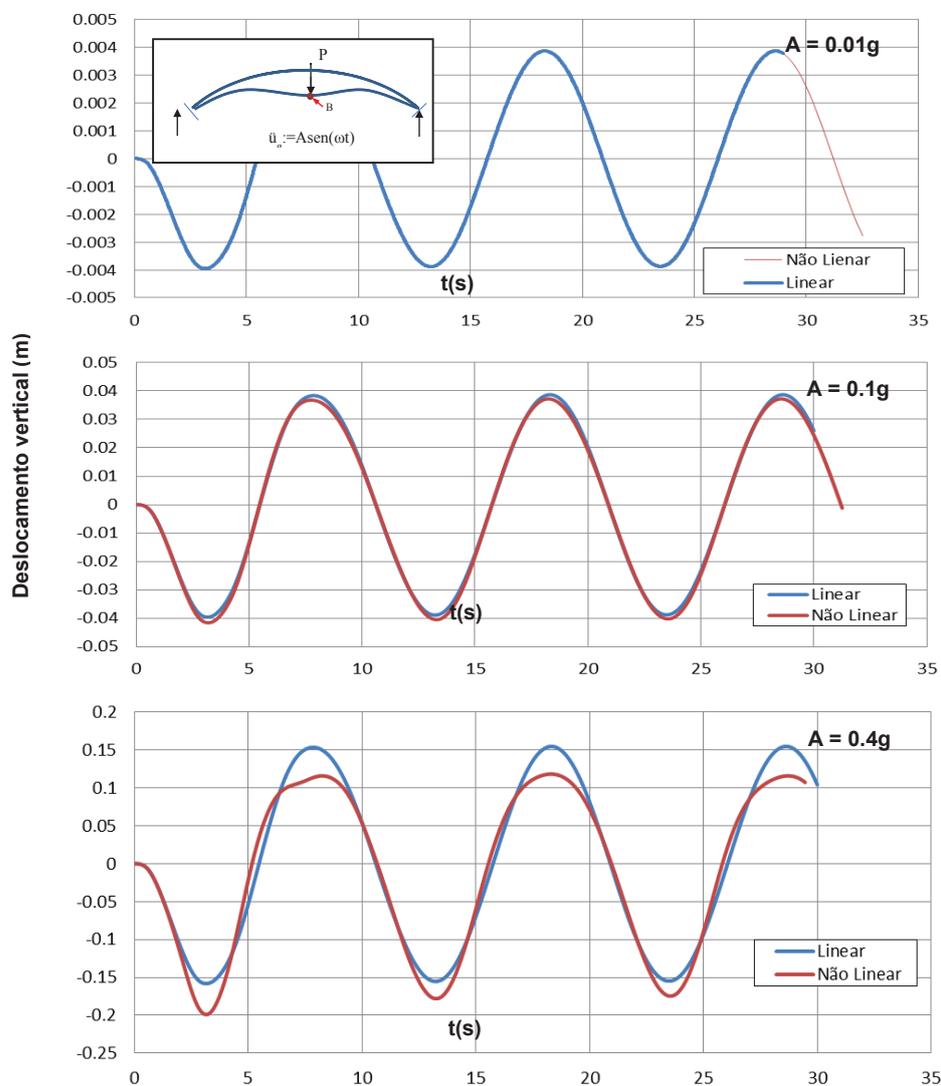


Figura 4.15 – Deslocamento vertical de B em Ac-1 vs. t. $C = 0.5M$, $\omega = 0.80\text{rad/s}$, $P = 0.2\text{kN}$.

A seguir, é estudada a resposta do deslocamento vertical do centro do arco Ac-1 quando submetido a um deslocamento vertical de base harmônico com um tempo de duração de $T_g = 15s$, e a uma carga estática de valor P (Figura 4.5).

A Figura 4.16 mostra a variação do deslocamento vertical com o tempo. Pode ser visto que, após o término da excitação dinâmica, $t = 15s$, o valor do deslocamento tende a uma resposta permanente constante compatível com o valor da carga estática P . Este valor de deslocamento coincide com o valor do deslocamento calculado através de uma análise estática não linear. Isto pode ser observado na Figura 4.17, onde se compara o deslocamento na fase permanente com a resposta do sistema calculada através de uma análise estática. Pode-se observar que a solução dinâmica na fase permanente coincide com a solução estática.

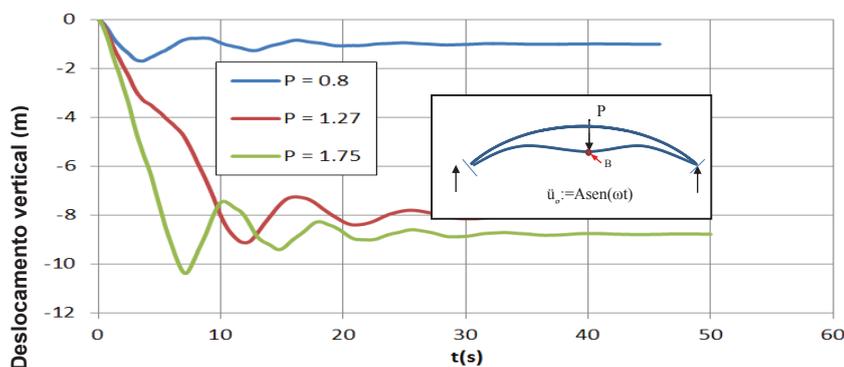


Figura 4.16 – Deslocamento vertical de B em Ac-1 vs. t . $C = 0.75M$, $\omega = 0.80\text{rad/s}$. Duração da excitação de base $T_g = 15s$.

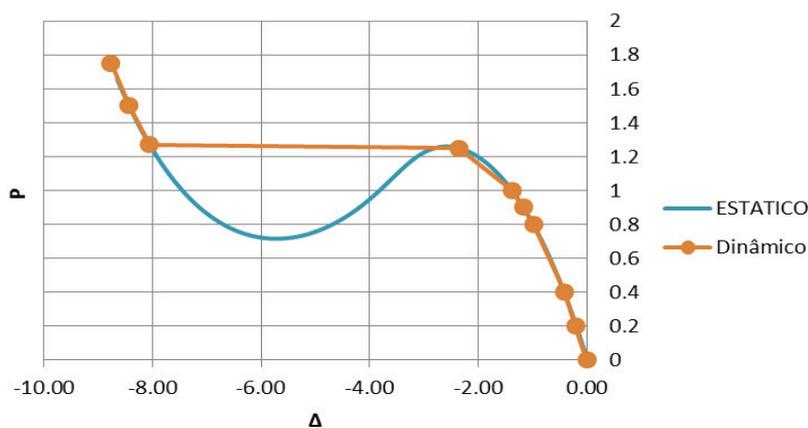


Figura 4.17 – Relação P vs. deslocamento vertical de B em Ac-1 na fase permanente. $A = 0.4g$, $C = 0.75M$, $\omega = 0.80\text{rad/s}$. Duração da excitação de base $T_g = 15s$.

Pode-se observar também que, para o intervalo de valores de força $0.71\text{kN} < P < 1.25\text{kN}$, há três possíveis posições de equilíbrio estático para um mesmo nível de força. Neste intervalo, a configuração final de equilíbrio depende da magnitude da excitação harmônica e das condições iniciais. Os resultados considerando condições iniciais nulas para dois valores de A (0.8g e 2.2g) são apresentados na Figura 4.18.

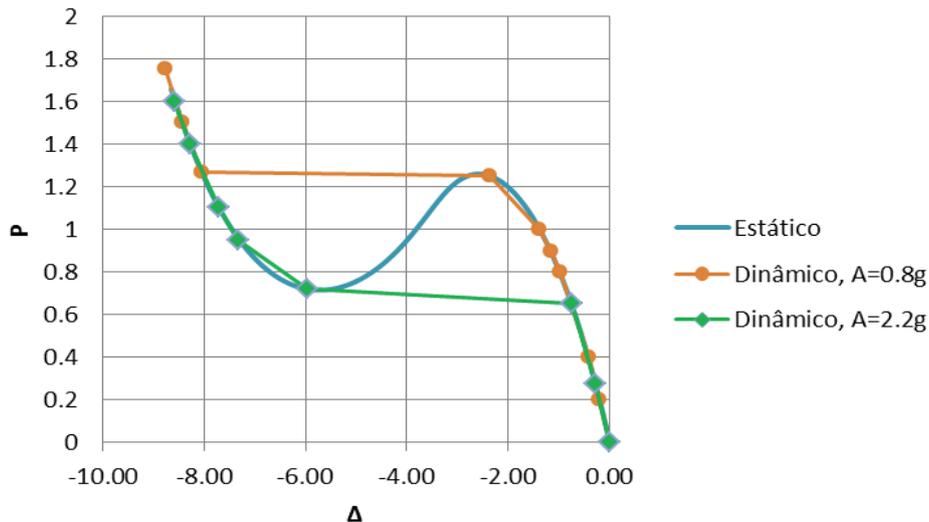


Figura 4.18 – Relação P vs. Deslocamento vertical de B em Ac-1 na fase permanente. $C = 0.75M$, $\omega = 0.80\text{rad/s}$; duração da excitação de base $T_g = 15\text{s}$.

4.3.1.2. Não linearidade geométrica na ressonância

A seguir é estudada a influência da não linearidade geométrica nas curvas de ressonância da torre T-2 e do pórtico Po-6.

Nas Figuras 4.19 e 4.20 é mostrada a curva de ressonância da vibração horizontal do topo da torre T-2 e do pórtico Po-6, respectivamente. Pode ser observado que, para ambas as estruturas, quando submetidas à aceleração de base de amplitude $A = 0.4\text{g}$, o efeito da não linearidade geométrica se traduz em um leve incremento do deslocamento máximo na ressonância, e uma leve diminuição do valor da frequência de ressonância. O efeito é similar tanto para a base rígida quanto para a base com rigidez rotacional linear, sendo que em ambos os casos a

diferença entre os valores de frequência de ressonância linear e não linear não supera 1%.

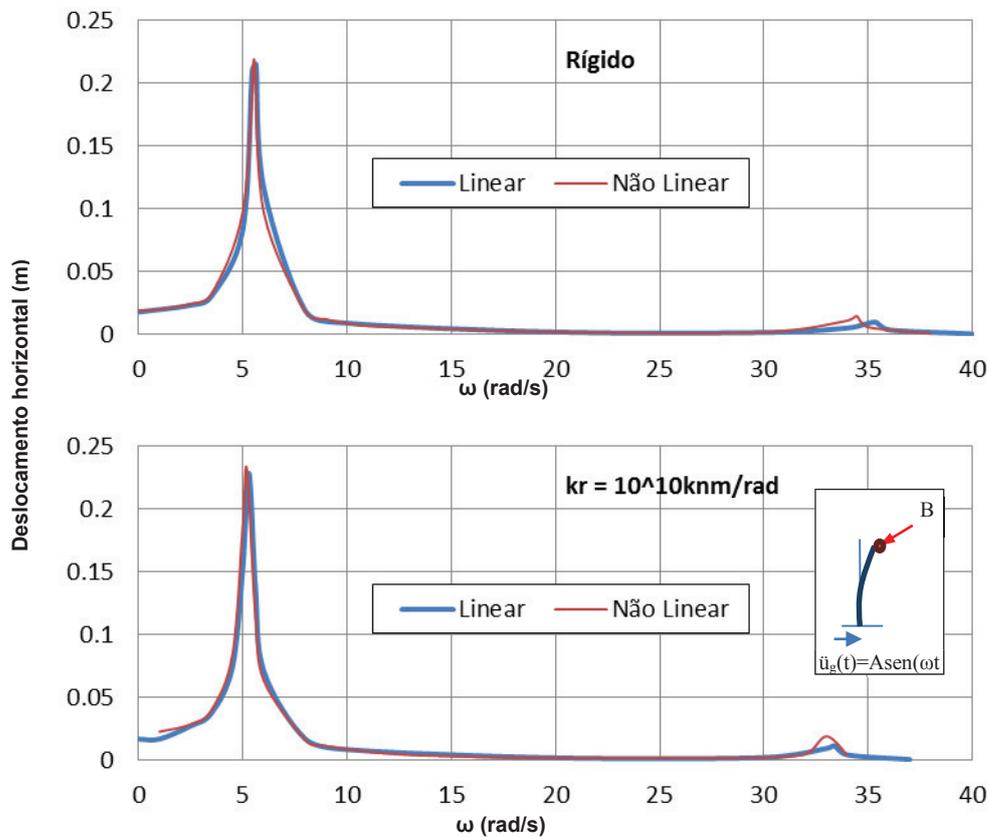


Figura 4.19 – Deslocamento horizontal máximo de B em T-1 na fase permanente vs. frequência de excitação. $A = 0.4g$, $C = 0.25M$.

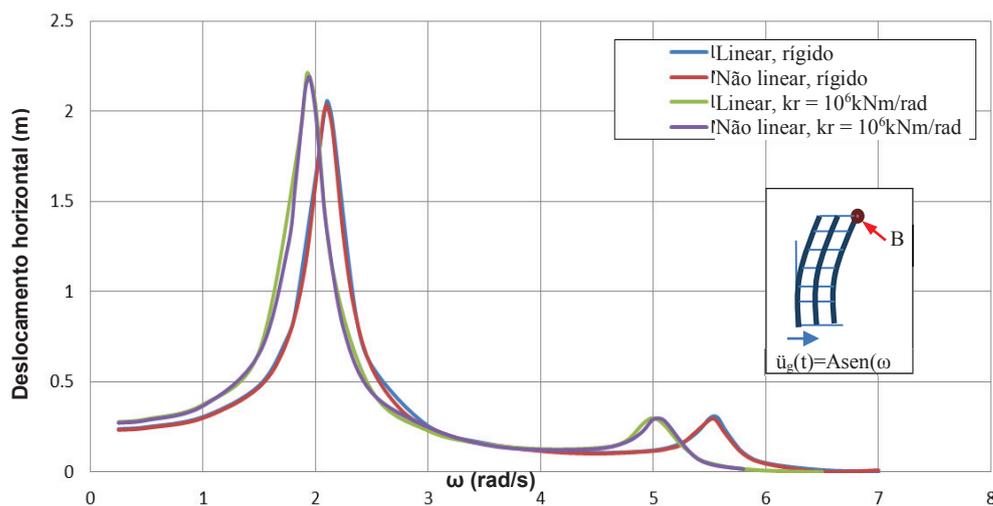


Figura 4.20 – Deslocamento horizontal máximo de B em Po-6 na fase permanente vs. frequência de excitação. $A=0.4g$, $C=0.25M$.

4.3.1.3.

Não linearidade geométrica e variação da amplitude da aceleração de base

A seguir é analisada a influência da não linearidade geométrica das estruturas T-2 e Po-6 no deslocamento máximo na fase permanente em função da variação da magnitude da aceleração. Para este exemplo, a aceleração de base tem frequência de excitação igual à primeira frequência natural de vibração do sistema linear para ambas as estruturas.

Nas Figuras 4.21 e 4.22, que mostra, respectivamente, a variação do deslocamento máximo na fase permanente com a variação da magnitude da aceleração nas estruturas T-2 e Po-6, pode ser observado que o efeito da não linearidade geométrica se manifesta na redução do valor do deslocamento máximo com respeito ao valor do sistema linear. Esta redução cresce com o aumento da magnitude da excitação devido ao efeito de não linearidade cúbica presente em sistemas de barras submetidas a esforços de flexão.

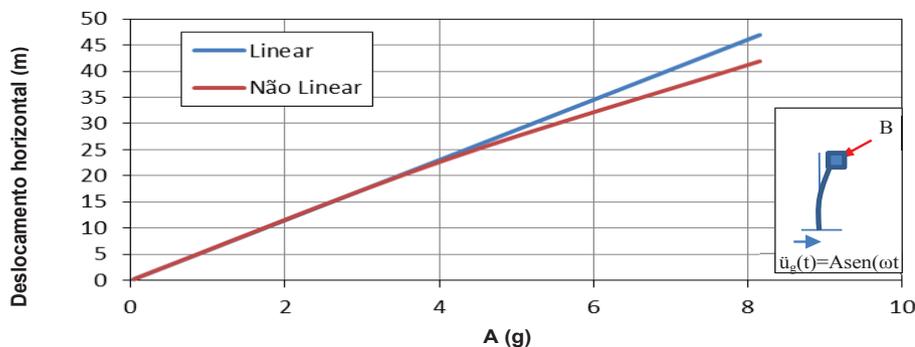


Figura 4.21 – Deslocamento horizontal máximo de B em T-2 na fase permanente vs. A. $\omega = 5.19\text{rad/s}$, $C = 0.25M$, $k_r = \text{infinito}$ (rígido).

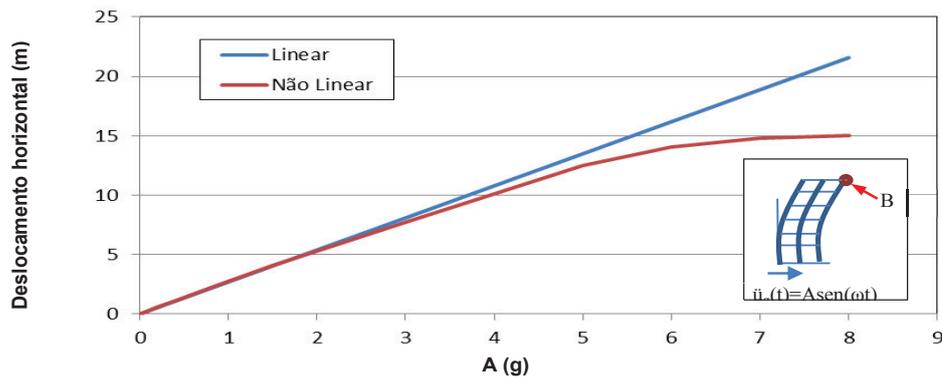


Figura 4.22 – Deslocamento horizontal máximo de B em Po-6 na fase permanente x A. $\omega = 1.95\text{rad/s}$, $C = 0.25M$, $k_r = 10^6\text{kNm/rad}$.

A diferença entre a resposta linear e não linear é menor que 5% para amplitudes de aceleração de base menores que quatro vezes a aceleração da gravidade, para ambas as estruturas estudadas (T-2 e Po-6). É importante salientar que valores de aceleração de base superiores a quatro vezes a aceleração da gravidade são excessivos se considerado que nos sismos as acelerações máximas oscilam na ordem de 0.5 a uma vez a aceleração da gravidade e, supondo ampliações por condições de sítio (solo com características de amplificação), entre 2.5 a 3 vezes a aceleração da gravidade. Exemplo disto são os registros de aceleração sísmica de eventos como El Centro (1940) e Kobe (1995), onde as acelerações máximas registradas foram de 0.4g e 0.5g, respectivamente. Por outro lado, o nível de deslocamento atingido em ambos os casos para acelerações de magnitude maior que 4g é excessivo para situações práticas encontradas na engenharia civil. Entretanto, acelerações bem maiores que os valores considerados são encontrados em problemas envolvendo estruturas aeroespaciais.

4.3.1.4.

Não linearidade geométrica e variação da rigidez linear da base

Nesta seção é estudada a influência da variação da rigidez da base em estruturas com grande não linearidade geométrica. Para isto, a estrutura estudada na presente seção é o arco abatido Ac-1, já que este apresenta diferença visível entre a resposta linear e não linear para valores de aceleração de base próximos aos valores convencionais de aceleração registradas em sismos, como mostra a Figura 4.15.

Na Figura 4.23 é mostrada a resposta no tempo do deslocamento vertical do centro do arco Ac-1, considerando um deslocamento harmônico de base atuando por um tempo $T_g = 15s$, uma força estática $P = 0.2kN$ e a flexibilidade rotacional dos apoios, k_r . Pode ser observado que a respostas para os valores extremos $k_r = \infty$ e $k_r = 0$, ou seja, nos casos de apoio rígido e rotulado, são muito próximas para os valores considerados de amplitude de aceleração de base, carga estática e frequência de excitação. Para valores intermediários de k_r a resposta encontra-se entre as respostas destes valores limites de rigidez rotacional de base.

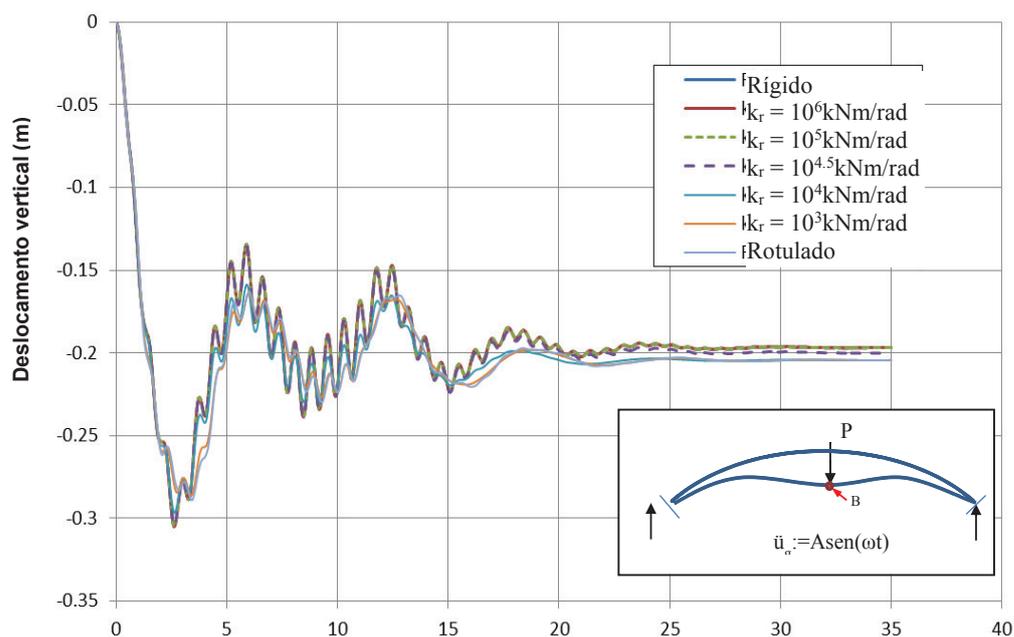


Figura 4.23 – Deslocamento vertical de B em Ac-1 x t. $A=0.4g$, $C=0.75M$, $\omega=5.0rad/s$, $P=0.2kN$. $k_h=rígido$. Duração da excitação de base $T_g = 15s$.

A Figura 4.24 mostra a variação do deslocamento vertical no centro do arco ao longo do tempo, considerando flexibilidade translacional da base no sentido horizontal, ou seja, rigidez horizontal da base k_h . Pode-se observar uma diferença importante entre a consideração de base rígida e base flexível. Observa-se também que, para valores de rigidez horizontal superiores a 10^6 kN/m, a resposta do sistema é muito próxima da resposta considerando base rígida. De forma análoga, para valores de k_h menores que 10^4 kN/m, a resposta é próxima da resposta supondo extremos sem restrição a deslocamento horizontal. Este comportamento

também é notado na Figura 4.25, que apresenta a curva de ressonância para a vibração vertical do centro do arco.

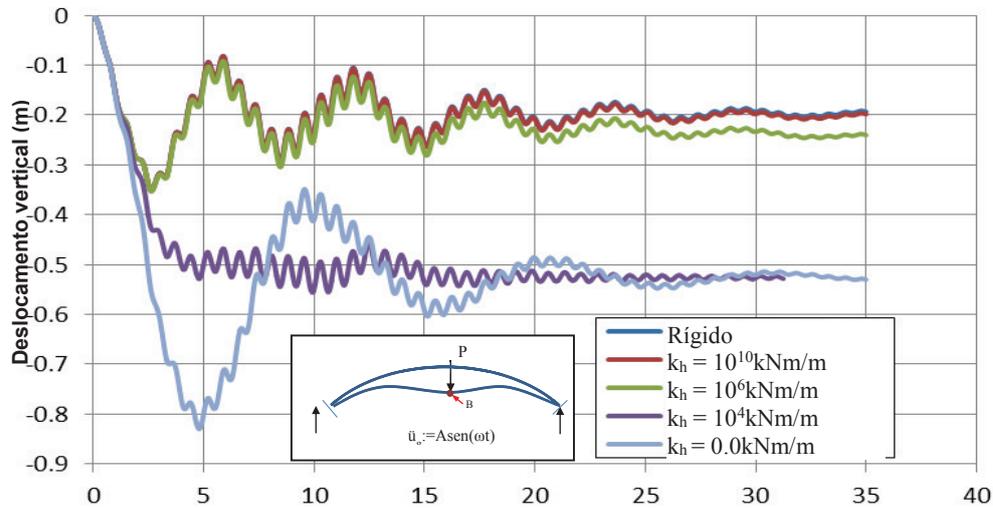


Figura 4.24 – Deslocamento vertical de B em Ac-1 vs. t. $A=0.4g$, $C=0.75M$, $\omega=5.0$ rad/s, $P=0.2$. k_r =rígido. Duração da excitação de base $T_g = 15s$.

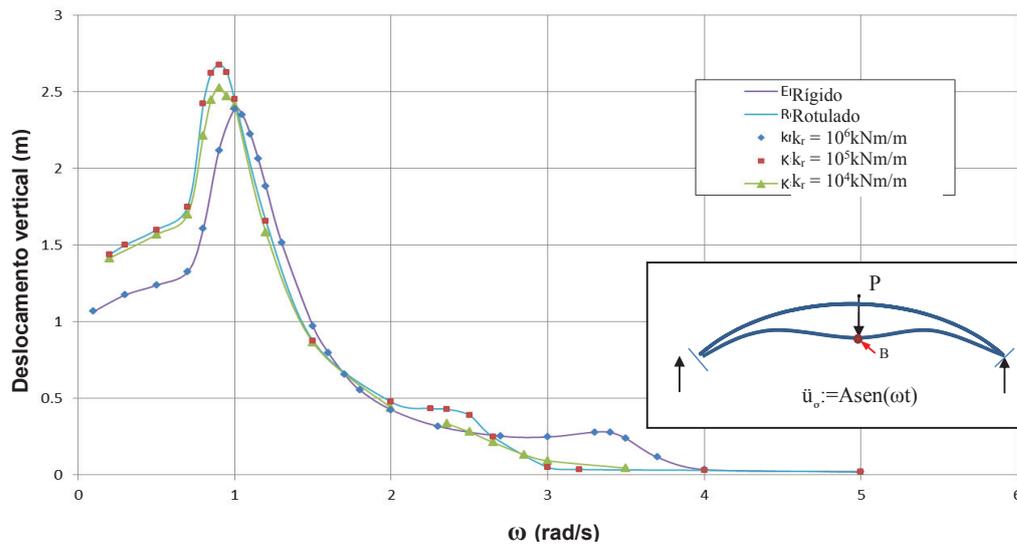


Figura 4.25 – Deslocamento horizontal máximo de B em Ac-1 na fase permanente vs. frequência de excitação. $A = 0.4g$, $C = 0.25M$, $P = 0$, $k_h =$ infinito.

4.3.2. Consideração de base elasto-plástica

Na presente seção é estudada a influência do comportamento elasto-plástico da base na resposta dinâmica da estrutura. Para este fim, consideram-se molas

com comportamento elasto-plástico. Na presente seção é estudada a torre T-2, que tem apoio com flexibilidade à rotação. Na Figura 4.26 é mostrada a resposta no tempo do deslocamento horizontal do topo da torre T-2, considerando uma mola rotacional elasto-plástica com momento de plastificação $M_p = 160\text{MNm}$. Este momento é adotado analisando a resposta considerando rigidez rotacional linear, de tal modo que, para a sollicitação dada, o momento de plastificação seja atingido e a base da estrutura entre em regime elasto-plástico. Pode-se notar que, quando considerado um comportamento elasto-plástico da mola rotacional, os deslocamentos na fase permanente diminuem; isto devido à dissipação da energia na plastificação. Neste caso não é possível considerar plasticidade perfeita já que o sistema ficaria hipostático. Também pode ser observado que, quando diminuí a rigidez no regime elasto-plástico, os deslocamentos máximos na fase permanente diminuem por aumento da dissipação.

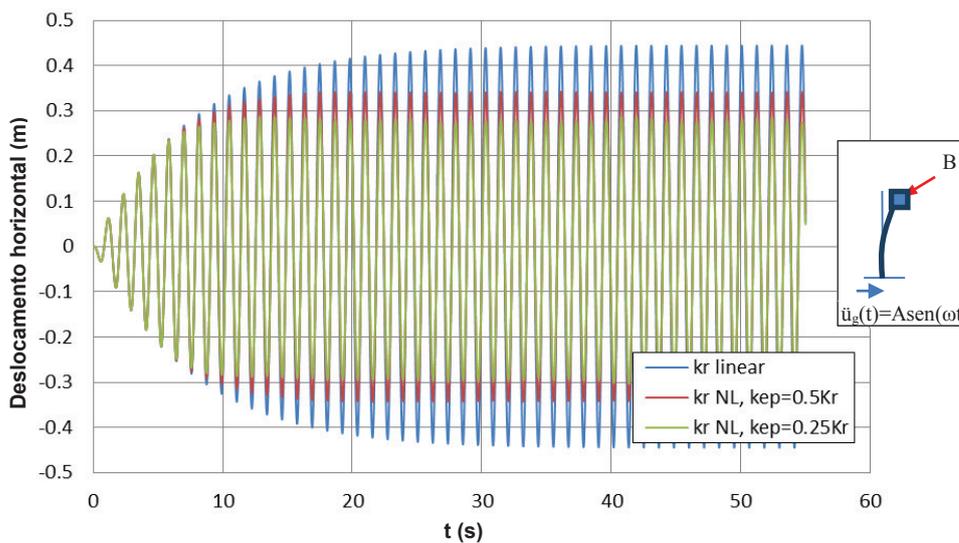


Figura 4.26 – Deslocamento horizontal de B em T-1 x t. $A=0.4g$, $C=0.25M$, $k_r=10^{11}\text{kNm/rad}$, $\omega=5.40\text{rad/s}$, $M_p=160\text{MNm}$.

Na Figura 4.27 é mostrado o comportamento histerético da mola rotacional elasto-plástica para os dois valores de rigidez elasto-plástica considerados. Pode ser visto que, para uma rigidez no regime elasto-plástico $0.5k_r$, há uma menor acumulação de rotações permanentes que para o caso de $k_{ep}=0.25k_r$, onde há uma clara evidência de rotações permanentes já que a relação momento-rotação mostra diversos ciclos à esquerda da origem.

Estes resultados também evidenciam que, em estruturas sujeitas a movimentos de base, mecanismos capazes de dissipar energia podem ser usados de forma eficiente para controlar a amplitude das vibrações e, conseqüentemente, os esforços adicionais na estrutura.

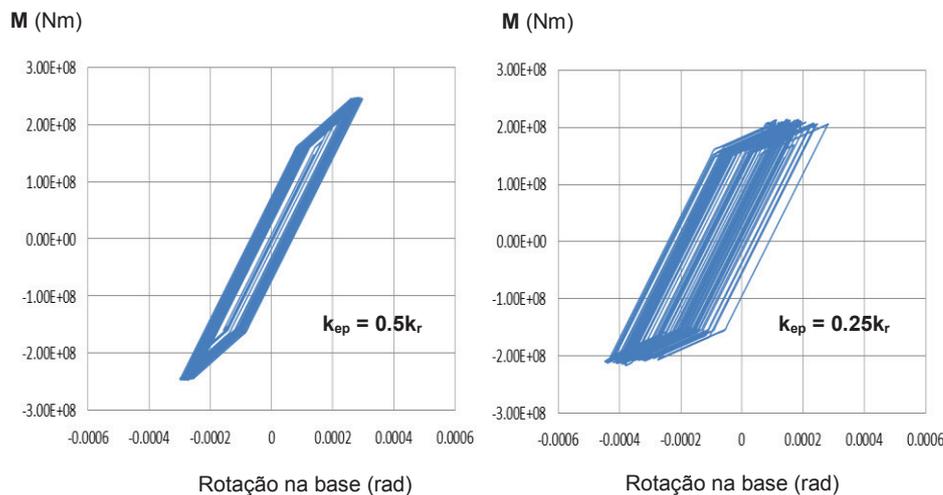


Figura 4.27 – Relação Momento vs. Rotação na base. $A=0.4g$, $C=0.25M$, $k_r=10^{11}kNm/rad$, $\omega=5.40rad/s$, $M_p=160MNm$.

4.4. Análise Sísmica

4.4.1. Geração de sismo artificial

Na geração de sismos artificiais é empregado o algoritmo de superposição de harmônicos descrito na seção 3.4. Para a geração randômica do ângulo de fase é usado um algoritmo de geração randômica de números de distribuição uniforme com congruência mista (Fisher, 2011) que gera números de forma pseudoaleatória a través da seguinte fórmula de recursiva:

$$x_i := m \left(\frac{a x_{i-1} + c}{m} - \text{floor} \left(\frac{a x_{i-1} + c}{m} \right) \right) \quad (4.1)$$

onde a e c são coeficientes que dependem do tipo de distribuição dos números a serem gerados e m é o tamanho do universo possível de dados a obter. Para dados que sigam uma distribuição uniforme é sugerido usar os valores $a=c=255$ (Fisher, 2011). No presente trabalho adota-se $m = 2064$. O operador $\text{floor}(\cdot)$ devolve o

valor absoluto mais próximo do argumento. O algoritmo depende de um valor inicial para x , x_0 , chamado também de valor semente. Este valor pode ser adotado de forma aleatória. Pode-se adotar, por exemplo, a hora da geração ou algum outro critério onde o usuário tenha o menor nível de participação possível. O algoritmo gera números reais de 0 a 1. Para encontrar os ângulos de fase aleatórios em radianos, cada número gerado deve ser multiplicado por 2π , ou seja:

$$\alpha_i = x_i \cdot 2\pi \quad (4.2)$$

Na presente seção, é gerado um acelerograma artificial pelo método de superposição de harmônicos, utilizando um valor de semente de $x_0 = 5$ e usando o espectro de potência do sismo “El Centro” (Clough e Penzien). São gerados 2064 ângulos fase pseudoaleatórios. Na Figura 4.28 é apresentada a aceleração sísmica artificial normalizada para um pico de aceleração máxima igual a 0.39g, similar à aceleração máxima do sismo El Centro (1940).

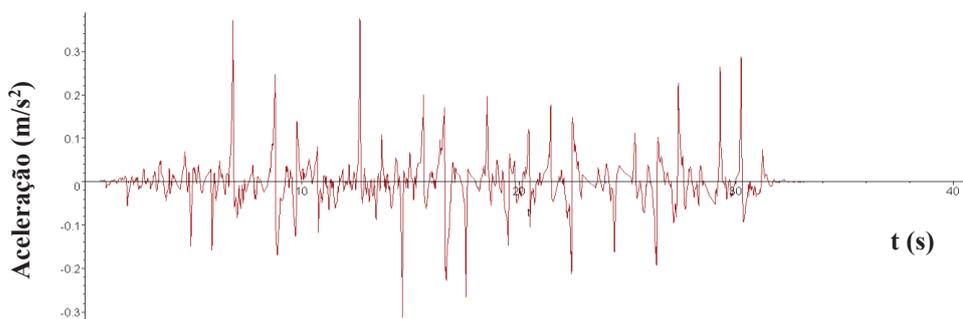


Figura 4.28 – Sismo artificial gerado a partir do espectro de potência do sismo “El centro (1940)” direção Norte-Sul.

Cabe salientar que, a partir de um espectro de densidade de potência, podem ser gerados inúmeros acelerogramas artificiais, devendo-se realizar estudos de confiabilidade para a determinação do sismo de projeto. Na Figura 4.29, são superpostos o acelerograma do sismo El Centro e o acelerograma que foi obtido a partir deste, o qual foi normalizado para ter um pico de aceleração máxima igual ao sismo de origem. Pode ser visto que ambos os acelerogramas têm diferenças na quantidade de picos de aceleração e no instante em que eles acontecem, produto

dos ângulos de fase aleatórios e da definição do tempo de duração da fase intensa, maior no sismo artificial.

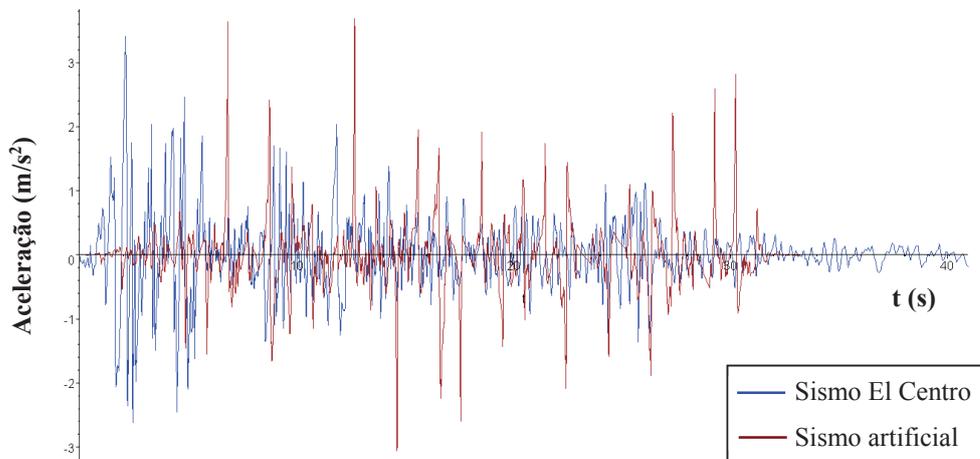


Figura 4.29 – Superposição de acelerogramas do sismo artificial e o sismo “El Centro”.

Apesar das diferenças entre o acelerogramas real e artificial, a relação intrínseca entre estes dois registros pode ser observada nos espectros de densidade de potência correspondentes mostrados na Figura 4.30, onde se pode verificar que ambos os espectros possuem o mesmo conteúdo de frequências, justificado pelo processo de geração do sismo artificial, o qual é composto pelos harmônicos presentes no sismo de origem.

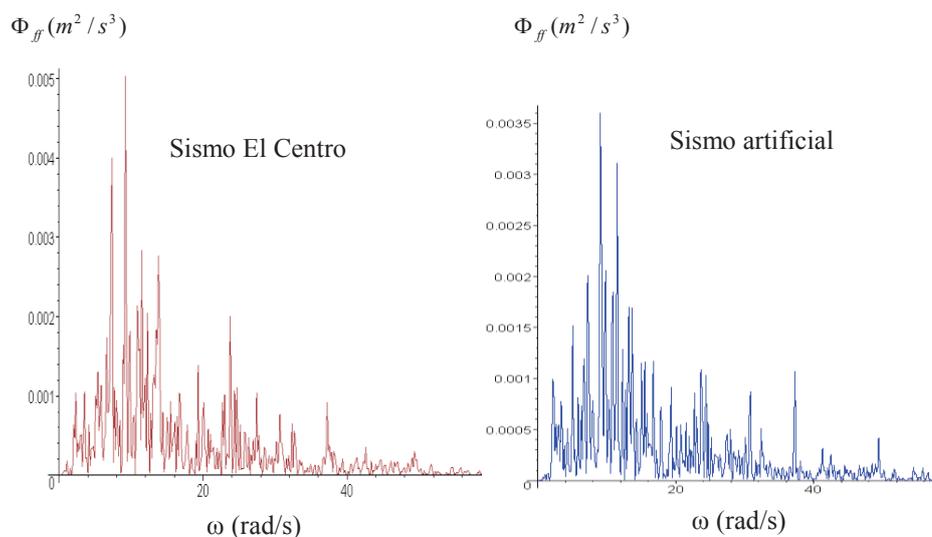


Figura 4.30 – Comparação entre espectros de densidade de potência.

4.4.2. Comparação entre as resposta com sismos real e artificial

Nesta seção é estudada a resposta linear do sistema Po-6 (pórtico de seis andares) quando submetido a ação sísmica, considerando como solicitações os acelerogramas de El Centro direção Norte-Sul e o gerado artificialmente a partir deste, mostrados na Figura 4.29. Na Figura 4.31 é apresentada a resposta no tempo do deslocamento horizontal do topo do sistema Po-6, considerando comportamento linear elástico e base com rigidez rotacional linear.

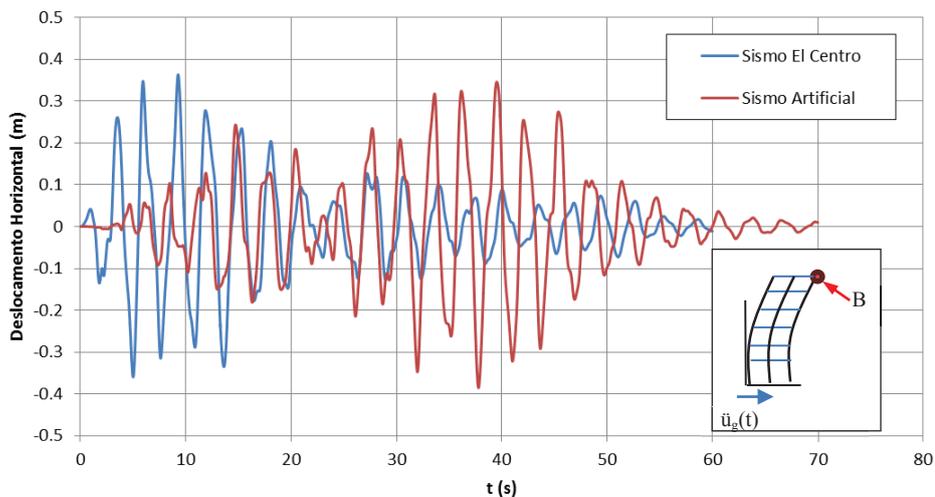


Figura 4.31 – Deslocamento horizontal no tempo do topo do sistema Po-6. $C=0,25M$, $k_r=10^{11}kNm/rad$. $t_s=50seg$, $t_{if} = 5seg$, $t_{ff} = 40seg$.

Na Figura 4.31 pode ser visto que a resposta obtida considerando como excitação o sismo real El Centro tem uma configuração diferente da calculada com o sismo artificial no que diz respeito ao tempo em que acontecem os maiores deslocamentos, sendo que, para o caso do sismo El Centro, os deslocamentos máximos encontram-se nos primeiros 20s de duração do sismo, e no sismo artificial estão compreendidos entre os 25 e 45 segundos. Apesar disto, há uma proximidade no nível do deslocamento máximo, sendo em torno de 0,372m no caso do sismo El Centro, e de 0,385m no caso do sismo artificial. Isto mostra a proximidade entre as potências dos dois sismos estudados. A diferença do tempo em que ocorrem a fases intensas de deslocamentos é importante em uma análise que considere comportamento não linear de material, na qual a resposta pode mudar de forma importante dependendo do histórico de deformações no material, como é o caso de plastificação ou dano.

4.4.3. Excitação sísmica e não linearidade geométrica

Para avaliar o efeito da não linearidade geométrica, é estudada a resposta da estrutura Po-6, submetida à ação do sismo artificial. Na Figura 4.32 pode-se observar que a consideração de não linearidade geométrica se traduz em uma diferença de configuração comparando com a resposta do sistema linear. Observa-se que em ambos os casos o deslocamento máximo é próximo a 0.39m, porém estes ocorrem em tempos distintos.

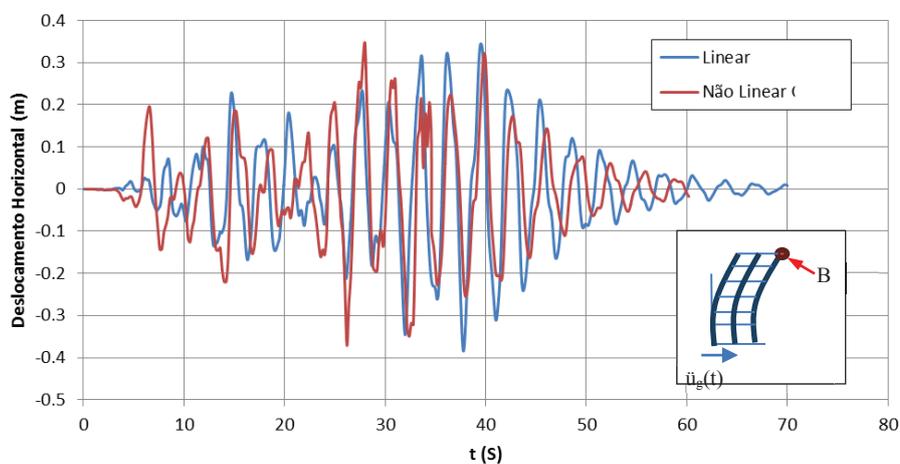


Figura 4.32 – Deslocamento horizontal de B em Po-6 x t, sismo Artificial. C = 0.25M, $k_r = 10^7$ kNm/rad, $t_s = 50$ seg, $t_{if} = 5$ seg, $t_{ff} = 40$ seg.

4.4.4. Excitação sísmica e elasto-plasticidade da base

Nesta seção é estudada a influência da plasticidade quando a estrutura é excitada sísmicamente. Para isto considera-se a estrutura T-1 com um apoio com flexibilidade rotacional com comportamento elasto-plástico. Na Figura 4.33 pode ser observado que a consideração do comportamento elasto-plástico modifica bastante a resposta do sistema, diminuindo a magnitude dos deslocamentos, evidenciando desta forma a dissipação associada à plasticidade, assim como a ocorrência de um deslocamento permanente ao término do sismo em virtude da

acumulação de deformação plástica. A deformação permanente é evidenciada também na Figura 4.34, onde se mostra a relação momento-rotação na base.

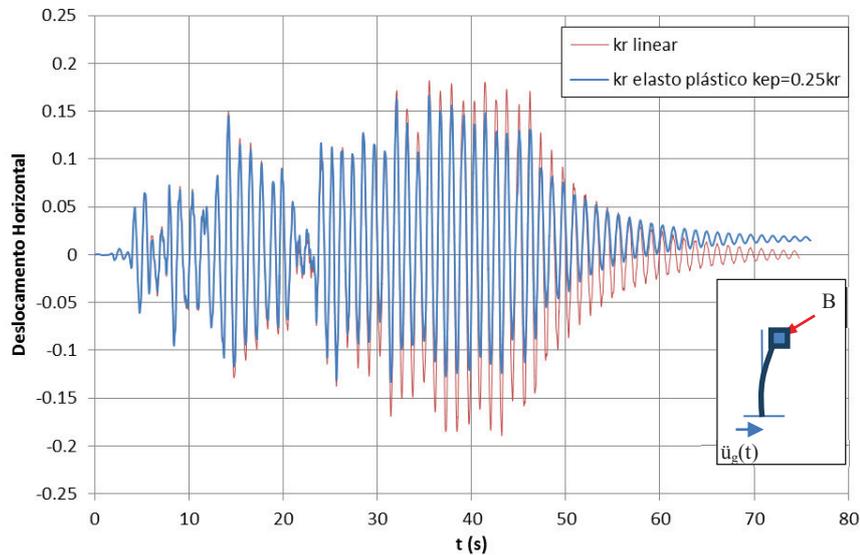


Figura 4.33 – Deslocamento horizontal de B em T-1 x t, sismo Artificial. $C=0.25M$, $k_r=10^{11}kNm/rad$. $t_s=55s$, $t_{if} = 5s$, $t_{ff} = 45s$. $M_p=80MNm$.

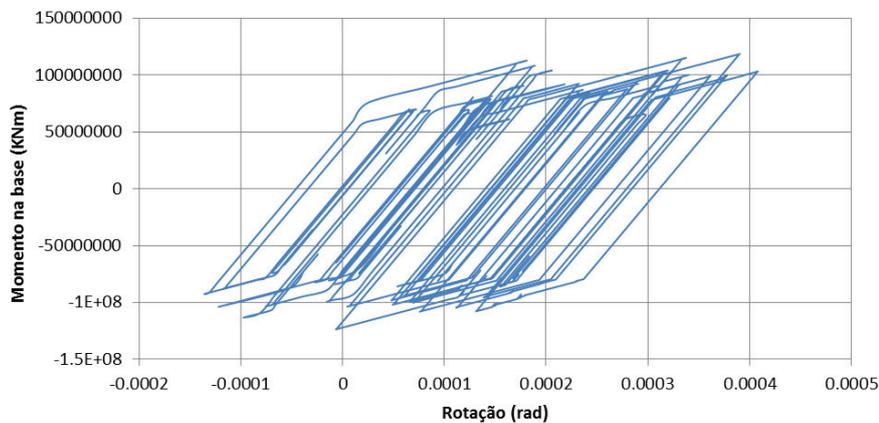


Figura 4.34 – Relação Momento x Rotação na base. Sismo artificial. $C = 0.25M$, $k_r = 10^{11}kNm/rad$, $t_s = 55s$, $t_{if} = 5s$, $t_{ff} = 45s$, $M_p = 80MNm$.

5 Formulação Dinâmica Não Linear no Domínio da Frequência

No Capítulo 2, foram apresentadas as formulações para a análise dinâmica de estruturas reticuladas no domínio do tempo, sendo uma informação importante vinda desta análise a resposta da estrutura na região de ressonância. Porém, para a obtenção da resposta em frequência através da análise no domínio do tempo, é necessário obter a resposta do sistema estrutural na fase permanente do movimento, como pode ser visto, por exemplo, em Galvão (2004) e Silva (2009). Isto pode resultar em um grande esforço computacional para estruturas com grande número de graus de liberdade. Este esforço aumenta ainda mais se a estrutura apresenta um comportamento não linear. Neste caso, a resposta em frequência se torna bem mais complexa que no caso linear em virtude da possibilidade de soluções coexistentes para certas frequências de excitação, estáveis e instáveis, e bifurcações que dão origem a diversos pontos limite ao longo da curva de ressonância. Além disto, muitos algoritmos de integração numérica apresentam um amortecimento numérico que comprometem o cálculo da magnitude da resposta permanente, em particular em sistemas com longos transientes.

No caso de estruturas submetidas a excitações sísmicas, há um grande interesse em conhecer suas propriedades em frequência, já que a vulnerabilidade da estrutura durante os eventos sísmicos depende do conteúdo de frequências e da faixa de valores que concentra a maior potência sísmica. Na presente tese, propõe-se uma técnica incremental-iterativa para o cálculo da resposta em frequência de sistemas estruturais reticulados não lineares.

A transformação das equações discretizadas de movimento através de elementos finitos para o domínio da frequência é feita através do método do balanço harmônico clássico para o caso linear, seguindo a formulação apresentada em Pasqueti (2008), juntamente com o método de Galerkin no tempo e de técnicas de continuação.

Para a análise não linear, é usada uma variante do método do balanço harmônico juntamente com o método de Galerkin para obtenção das equações algébricas não lineares no domínio da frequência. A formulação é uma adaptação particular do método proposto por Cheung e Chen (1990) e generalizado para o uso em modelos de elementos finitos por Chen *et al* (2001). Para a análise não linear é considerada apenas a não linearidade geométrica dos elementos estruturais.

5.1. Obtenção de Curvas de Ressonância Através da Análise no Tempo

Para a obtenção das curvas de ressonância de uma estrutura através da análise no tempo é necessário submeter à estrutura a uma excitação harmônica com uma frequência de excitação ω que é multiplicada por um vetor de cargas de referência. Neste caso, a Equação (2.54), pode ser reescrita como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{F}_{int}(t) = F \cos(\omega t) \mathbf{F}_r \quad (5.1)$$

onde F e ω são a magnitude e frequência da excitação harmônica, respectivamente.

A técnica mais simples para obter as curvas de ressonância para sistemas não lineares sob uma excitação harmônica consiste em fazer várias análises no tempo, variando-se a frequência de excitação. As análises no tempo são geralmente feitas por integração direta das equações de equilíbrio. Estas análises devem ser feitas até se alcançar a fase permanente do movimento, tal como mostrado na Figura 5.1.

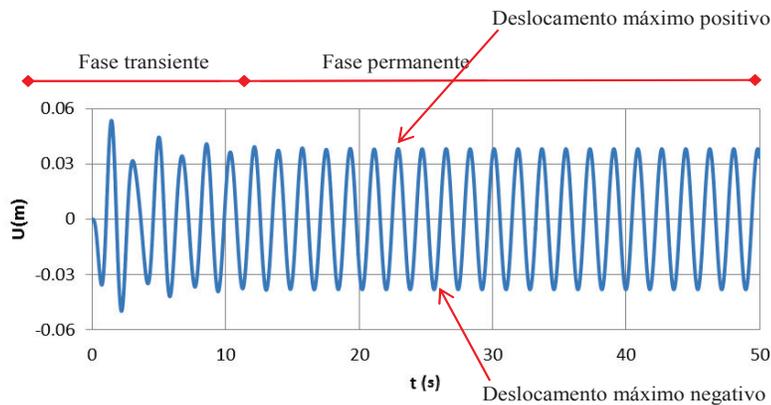


Figura 5.1 – Variação do deslocamento no tempo de um sistema de um grau de liberdade submetido a uma carga harmônica com frequência de excitação ω ; fase transitória e fase permanente.

A curva de ressonância é obtida mapeando os deslocamentos máximos na fase permanente correspondente a cada valor de frequência considerado. Para o caso de análises lineares o deslocamento máximo negativo e positivo tem a mesma magnitude. Porém, em análises não lineares, há a possibilidade de que estes valores sejam diferentes, como é o caso de estruturas com não linearidade geométrica quadrática. A curva de ressonância pode ser expressa pela relação entre a frequência de excitação e a norma do deslocamento máximo.

Uma desvantagem deste método, mesmo em análises lineares, é a necessidade de continuar a análise no tempo até se alcançar a fase permanente. Isto depende diretamente das propriedades de amortecimento da estrutura e das não linearidades, podendo levar a um grande esforço computacional em sistemas com um grande número de graus de liberdade. A principal dificuldade é, entretanto, mapear pontos onde há multiplicidade de soluções, incluindo soluções instáveis.

5.2. Método do Balanço Harmônico

O Método do Balanço Harmônico (MBH) é um dos métodos mais simples usados para transformar um sistema do domínio do tempo para o domínio da frequência. Este método permite a transformação de um sistema de equações diferenciais, lineares ou não lineares, em um sistema de equações algébricas. A

ideia básica deste método está na aproximação da solução de uma equação diferencial por uma série truncada de Fourier. Portanto, uma função solução $x(t)$ pode ser expressa como:

$$x(t) = \sum_{n=0}^N [A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t)] \quad (5.2)$$

onde A_n e B_n são amplitudes do n -ésimo harmônico e N é o número de harmônicos usados na aproximação. Esta aproximação deve ser substituída na equação diferencial, e, após se fazer a transformação de potências e produtos de funções harmônicas em somas de harmônicos, deve ser feito o balanço de harmônicos coletando todos os coeficientes de cada um dos harmônicos presentes na equação e igualando-os a zero. Este processo tem como resultado um sistema de equações algébricas onde as variáveis a serem determinadas são as amplitudes modais A_n e B_n e a frequência de excitação, ω . Para não linearidades polinomiais em que a função solução $x(t)$ está elevada a uma potência inteira na equação diferencial, é útil expandir as potências dos termos trigonométricos, através das relações de identidade com ângulos múltiplos. Por exemplo, considerando potências cúbicas e quárticas, podem ser consideradas as seguintes relações:

$$\begin{aligned} (\cos(n\omega t))^3 &= \frac{3}{4} \cos(n\omega t) + \frac{1}{4} \cos(3n\omega t) \\ (\cos(n\omega t))^4 &= \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos(2n\omega t) + \frac{1}{8} \cos(4n\omega t) \end{aligned} \quad (5.3)$$

O processo descrito anteriormente é aplicado sob a premissa que a equação diferencial é homogênea ou que o termo independente $f(t)$ é também expresso como uma combinação dos harmônicos. Porém, se este não for o caso, ainda é possível usar o MBH expandindo o termo independente $f(t)$ em uma série de Fourier que contenha os mesmos harmônicos empregados na aproximação da função solução $x(t)$, ou seja:

$$f(t) = \sum_{n=0}^N [C_n \cos(n\omega t) + D_n \sin(n\omega t)] \quad (5.4)$$

onde os coeficientes da série C_n e D_n podem ser obtidos levando em conta a ortogonalidade dos harmônicos.

5.3. Formulação Linear do Equilíbrio Dinâmico na Frequência

Usando o MBH, descrito na seção anterior, a resposta no tempo do campo dos deslocamentos pode ser determinada como:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=0}^N [\mathbf{A}_n \cos(n\omega t) + \mathbf{B}_n \sin(n\omega t)] \quad (5.5)$$

onde \mathbf{A}_n e \mathbf{B}_n são os vetores que contêm as componentes nodais da amplitude do n -ésimo harmônico e N é o número de harmônicos usados na aproximação. Considerando o sistema linear, onde o vetor de forças internas é dado por $\mathbf{F}_{int}(t) = \mathbf{K}\mathbf{u}(t)$, é necessário apenas o segundo termo da Equação (5.5), isto é:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{A}_1 \cos(\omega t) + \mathbf{B}_1 \sin(\omega t) \quad (5.6)$$

Substituindo a equação anterior na equação (5.1) obtém-se:

$$\begin{aligned} & (\omega \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}_1 - (\omega^2 \mathbf{M} - \mathbf{K}) \cdot \mathbf{B}_1) \cos(\omega t) - ((-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \cdot \mathbf{A}_1 + \omega \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}_1) \sin(\omega t) \\ & = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}_r \cdot \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (5.7)$$

Fazendo o balanço dos harmônicos, obtém-se o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} \omega \mathbf{C} & -\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K} \\ -\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K} & -\omega \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{B}_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}_r \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (5.8)$$

A equação (5.8) pode ainda ser representada de forma mais compacta da seguinte forma:

$$\bar{\mathbf{K}}(\omega) \cdot \bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{F}} = \mathbf{0} \quad (5.9)$$

onde:

$$\bar{\mathbf{K}}(\omega) = \begin{bmatrix} \omega \mathbf{C} & -\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K} \\ -\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K} & -\omega \mathbf{C} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{A}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{B}_1 \end{Bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{F}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}_r \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (5.10)$$

sendo a frequência de excitação ω e o vetor de amplitudes modais $\bar{\mathbf{A}}$ as variáveis a serem determinadas. A matriz $\bar{\mathbf{K}}(\omega)$ é conhecida como matriz de transferência ou matriz de impedância. Cabe salientar que, apesar de ser uma análise linear, o sistema de equações é não linear. Portanto, é necessário o emprego de um método de solução para sistemas de equações não lineares.

5.4. Formulação Não Linear do Equilíbrio Dinâmico na Frequência: Método do Balanço Harmônico-Galerkin

Para a consideração do comportamento não linear nas estruturas, é usada uma variante do MBH descrito anteriormente. Neste caso, considerando que na fase permanente do movimento há somente vibrações periódicas, é conveniente a mudança da variável do tempo t para uma variável de tempo adimensional τ através de:

$$\tau = \omega t \quad (5.11)$$

onde ω é a frequência do movimento periódico, Substituindo a equação (5.11) na equação (5.1), chega-se ao seguinte sistema de equação de movimento:

$$\omega^2 \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(\tau) + \omega \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(\tau) + \mathbf{F}\mathbf{i}(\mathbf{u}(\tau)) = F \cos(\tau) \mathbf{F}_r \quad (5.12)$$

Da mesma forma que no caso do balanço harmônico tradicional, o campo de deslocamentos é aproximado por uma série truncada de Fourier. Logo, cada componente do vetor de deslocamentos pode ser aproximada por:

$$u_i(\tau) = \sum_{n=0}^N [a_{i,n} \cos(n\tau) + b_{i,n} \sin(n\tau)] \quad (5.13)$$

onde $a_{i,n}$ e $b_{i,n}$ são as componentes dos vetores de amplitude modal do i -ésimo harmônico. Para a consideração de não linearidades de natureza quadrática e cúbica, a mínima aproximação possível é dada pela soma dos dois primeiros termos da série de Fourier. Adotando então esta aproximação a componente de deslocamento é aproximada por:

$$u_i(\tau) = a_{i,0} + b_{i,1}\cos(\tau) + c_{i,1}\sin(\tau) \quad (5.14)$$

É importante ressaltar que esta aproximação é adotada supondo que o efeito da não linearidade é pequeno. Para estruturas com forte não linearidade geométrica devem ser adicionados mais termos da série descrita pela equação (5.13), aumentando a ordem do sistema algébrico a ser resolvido. No caso linear e para sistemas com não linearidade cúbica, pode-se usar a aproximação:

$$u_i(\tau) = a_{i,1}\cos(\tau) + b_{i,1}\sin(\tau) \quad (5.15)$$

De uma forma mais compacta a equação (5.14) pode ser reescrita como:

$$u_i = \mathbf{C} \bar{\mathbf{a}}_i \quad (5.16)$$

onde:

$$\mathbf{C}(\tau) = \langle 1, \sin(\tau), \cos(\tau) \rangle, \text{ e } \bar{\mathbf{a}}_i = \langle a_{i,0}, b_{i,1}, c_{i,1} \rangle^T \quad (5.17)$$

A partir das componentes nodais, pode ser obtida a seguinte relação:

$$\mathbf{u}(\tau) = \mathbf{S}(\tau) \cdot \bar{\mathbf{A}} \quad (5.18)$$

com:

$$\mathbf{S}(\tau) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}(\tau) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}(\tau) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}(\tau) & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}(\tau) & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{C}(\tau) \end{bmatrix}_{NGL \times 3NGL}$$

$$\bar{\mathbf{A}}^T = \langle \bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \dots, \bar{\mathbf{a}}_{NGL} \rangle_{1 \times 3NGL} \quad (5.19)$$

onde NGL é o número de graus de liberdade.

Substituindo então a equação (5.18) na equação (5.12), obtém-se:

$$\omega^2 \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{S}}(\tau) \bar{\mathbf{A}} + \omega \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{S}}(\tau) \mathbf{A} + \mathbf{F} \mathbf{i}(\mathbf{S}(\tau), \bar{\mathbf{A}}) = F \cdot \cos(\tau) \mathbf{F}_r \quad (5.20)$$

Para eliminar a variável temporal τ , o resíduo ponderado calculado multiplicado ambos os lados da equação (5.20) por uma função peso e integrando-os com respeito à variável periódica τ no intervalo $\tau = 0 - 2\pi$ é minimizado. Para esta ponderação é adotado o método de Galerkin, onde a função peso é a própria função de aproximação, e que, neste caso, é dada pela matriz $\mathbf{S}(\tau)$. Realizada esta ponderação, obtém-se a partir de (5.20):

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left[\mathbf{S}(\tau)^T \left(\omega^2 \mathbf{M} \dot{\mathbf{S}}(\tau) \bar{\mathbf{A}} + \omega \mathbf{C} \dot{\mathbf{S}}(\tau) \mathbf{A} + \mathbf{F} \mathbf{i}(\mathbf{S}(\tau), \bar{\mathbf{A}}) \right) \right] d\tau \\ = \int_0^{2\pi} \mathbf{S}(\tau)^T \mathbf{F}_0 \cos(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (5.21)$$

Reescrevendo a equação anterior de uma forma mais compacta, tem-se:

$$\omega^2 \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{A}} + \omega \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{F}} \mathbf{i}(\bar{\mathbf{A}}) = \bar{\mathbf{F}} \quad (5.22)$$

com:

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{M}} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{S}(\tau)^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{S}}(\tau) d\tau \\
\bar{\mathbf{C}} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{S}(\tau)^T \mathbf{C} \dot{\mathbf{S}}(\tau) d\tau \\
\bar{\mathbf{F}} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{S}(\tau)^T \mathbf{F} \cos(\tau) \mathbf{F}_r d\tau \\
\bar{\mathbf{F}}\mathbf{i}(\bar{\mathbf{A}}) &= \int_0^{2\pi} \mathbf{S}(\tau)^T \mathbf{F}\mathbf{i}(\mathbf{S}(\tau), \bar{\mathbf{A}}) d\tau
\end{aligned} \tag{5.23}$$

A equação (5.22) define um sistema algébrico de equações não lineares, que tem como incógnitas a frequência ω e o vetor de amplitudes modais $\bar{\mathbf{A}}$. A determinação do vetor $\bar{\mathbf{F}}\mathbf{i}(\bar{\mathbf{A}})$ depende da expressão usada para a determinação $\mathbf{F}\mathbf{i}(\mathbf{u}(\tau))$ que contém a fonte do comportamento não linear do sistema estrutural. Para a aplicação do método anteriormente descrito, é necessária uma expressão expedita de $\mathbf{F}\mathbf{i}$ em função dos deslocamentos, resultando em um vetor dependente das amplitudes $\bar{\mathbf{F}}\mathbf{i}(\bar{\mathbf{A}})$. Uma vez determinado $\bar{\mathbf{F}}\mathbf{i}(\bar{\mathbf{A}})$, o passo seguinte é a solução do sistema algébrico de equações não lineares, como mostrado a seguir.

5.5.

Solução do Sistema de Equações Não Lineares na Frequência: Controle de Arco

Como visto nos itens anteriores, a análise no domínio da frequência recai na solução de um sistema de equações não lineares, mesmo para problemas com comportamento linear, como mostrado nas equações (5.9) e (5.22). Faz-se então necessário o emprego de um algoritmo de solução de equações não lineares para a determinação da relação entre a frequência de excitação e o vetor de amplitudes modais. Neste contexto, as equações (5.9) e (5.22) podem ser definidas de forma mais geral como:

$$\mathbf{R}(\omega, \bar{\mathbf{A}}) = \mathbf{0} \tag{5.24}$$

Através da análise incremental, pode ser estabelecido que o equilíbrio dinâmico no domínio da frequência para um incremento i é dado por:

$$\mathbf{R}(\omega_i, \bar{\mathbf{A}}_i) = \mathbf{0} \quad (5.25)$$

onde o valor das incógnitas no incremento i é calculado a partir do equilíbrio do incremento anterior já conhecido. Tem-se então:

$$\omega_i = \omega_{i-1} + \Delta\omega_i, \quad \bar{\mathbf{A}}_i = \bar{\mathbf{A}}_{i-1} + \Delta\bar{\mathbf{A}}_i \quad (5.26)$$

Substituindo a equação anterior na equação (5.25), obtém-se:

$$\mathbf{R}(\omega_{i-1} + \Delta\omega_i, \bar{\mathbf{A}}_{i-1} + \Delta\bar{\mathbf{A}}_i) = \mathbf{0} \quad (5.27)$$

Os incrementos $\Delta\omega_i$ e $\Delta\bar{\mathbf{A}}_i$ são as novas incógnitas a serem obtidas, as quais podem ser calculadas usando um processo iterativo, a saber:

$$\Delta\omega_i^k = \Delta\omega_i^{k-1} + \delta\omega_i^k, \quad \Delta\bar{\mathbf{A}}_i^k = \Delta\bar{\mathbf{A}}_i^{k-1} + \delta\bar{\mathbf{A}}_i^k \quad (5.28)$$

sendo $\delta\omega_i^k$ e $\delta\bar{\mathbf{A}}_i^k$ as variações ou corretores dos incrementos de frequência e amplitude respectivamente e o índice sobrescrito k indica o número da iteração. Os corretores $\delta\omega_i^k$ e $\delta\bar{\mathbf{A}}_i^k$ podem ser obtidos através da aproximação de Newton, variando a equação (5.27), ou seja:

$$\frac{\partial \mathbf{R}^{k-1}}{\partial \bar{\mathbf{A}}_i} \delta\bar{\mathbf{A}}_i^k + \frac{\partial \mathbf{R}^{k-1}}{\partial \omega_i} \delta\omega_i^k = \mathbf{R}^{k-1} \quad (5.29)$$

ou, de maneira mais compacta, como:

$$\overline{\mathbf{K}}\mathbf{m}^{k-1} \delta\bar{\mathbf{A}}_i^k + \delta\omega_i^k \bar{\mathbf{f}}^{k-1} = \mathbf{R}^{k-1} \quad (5.30)$$

Para resolver o sistema de equações (5.30), é necessária a adição de uma equação de restrição. Na presente seção é empregada a restrição do comprimento de arco formulada por Crisfield (1981) e por Ramm (1981) com a finalidade de passar pelos diversos pontos limites presentes nas curvas de ressonância não lineares. A adaptação da restrição de arco para solução de sistemas não lineares na frequência pode ser vista nos trabalhos de Ferreira e Serpa (2005) e de Pasquetti

(2008). No presente trabalho é usada uma adaptação particular do método do controle do comprimento de arco para a solução do sistema de equações algébricas não lineares vindas da aplicação do método do MBH. Para este problema específico, a equação de restrição do comprimento de arco é dada por:

$$g(\Delta\bar{A}_i^k, \Delta\omega_i^k) = (\Delta\bar{A}_i^k)^T \cdot \Delta\bar{A}_i^k + (\Delta\omega_i^k)^2 (\bar{\mathbf{f}}^{k-1})^T \cdot \bar{\mathbf{f}}^{k-1} - \Delta l_i^2 = 0 \quad (5.31)$$

onde Δl é o parâmetro de controle prescrito e que permanece constante durante todo o processo iterativo. Combinando as equações (5.27), (5.28), (5.30) e (5.31), chega-se ao cálculo do corretor de frequência, $\delta\omega_i^k$, a saber:

$$\delta\omega_i^k = \begin{cases} \pm \frac{\Delta l_i^2}{\sqrt{\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{v} + \bar{\mathbf{f}}^{k-1 T} \cdot \bar{\mathbf{f}}^{k-1}}} & \text{se } k = 1 \\ -\frac{\mathbf{r}^{k T} \cdot \mathbf{v}^k}{\mathbf{v}^{k T} \cdot \mathbf{v}^k} & \text{se } k > 1 \end{cases} \quad (5.32)$$

com:

$$\mathbf{v}^k = (\overline{\mathbf{K}\mathbf{m}}^{k-1})^{-1} \cdot \bar{\mathbf{f}}^{k-1}, \mathbf{r}^k = (\overline{\mathbf{K}\mathbf{m}}^{k-1})^{-1} \cdot \mathbf{R}^{k-1} \quad (5.33)$$

O sinal do primeiro corretor (preditor) de frequência, $\delta\omega_i^1$, é determinado seguindo o critério de trabalho positivo, ou seja:

$$\text{sign}(\delta\omega_i^1) = \text{sign}((\mathbf{v}^k)^T \cdot \bar{\mathbf{f}}^{k-1}) \quad (5.34)$$

onde $\text{sign}(\cdot)$ é o operador que devolve o sinal da expressão dentro do parêntese. O corretor do vetor de amplitudes pode ser calculado a partir da equação (5.30) como:

$$\delta\bar{A}_i^k = \mathbf{r}^k - \delta\omega_i^k \cdot \mathbf{v}^k \quad (5.35)$$

Para o caso do método do balanço harmônico clássico usado na análise linear, as seguintes particularizações podem ser obtidas:

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{K}\mathbf{m}} &= \begin{bmatrix} \omega\mathbf{C} & -\omega^2\mathbf{M} + \mathbf{K} \\ -\omega^2\mathbf{M} + \mathbf{K} & -\omega\mathbf{C} \end{bmatrix} \\ \bar{\mathbf{f}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{C} & -2\omega\mathbf{M} \\ -2\omega\mathbf{M} & -\mathbf{C} \end{bmatrix} \cdot \bar{\mathbf{A}}\end{aligned}\quad (5.36)$$

Analogamente, para o MBH–Galerkin na análise não linear, podem ser deduzidas as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{K}\mathbf{m}} &= \omega^2\bar{\mathbf{M}} + \omega\bar{\mathbf{C}} + \frac{\partial\bar{\mathbf{F}}_i(\bar{\mathbf{A}})}{\partial\bar{\mathbf{A}}} \\ \bar{\mathbf{f}} &= 2\omega\bar{\mathbf{M}} + \bar{\mathbf{C}}\end{aligned}\quad (5.37)$$

5.6. Não Linearidade Geométrica na Frequência

Como visto na seção 5.4, o equilíbrio dinâmico no domínio da frequência precisa de uma solução expedita para a determinação das forças internas dependentes dos deslocamentos. Em virtude da análise incremental, o vetor de deslocamentos pode ser expresso como:

$$\mathbf{u}(t_i) = \mathbf{u}(t_{i-1}) + \Delta\mathbf{u}(t) \quad (5.38)$$

e o vetor de forças internas pode ser calculado como:

$$\mathbf{F}_{int}(t_i) = \mathbf{F}_{int}(t_{i-1}) + \Delta\mathbf{F}_{int}(t) \quad (5.39)$$

O incremento do vetor de forças internas pode ser deduzido a partir das relações cinemáticas de deformação e deslocamento e levando em consideração as relações constitutivas entre tensões e deformações. Essas relações dependem do tipo de formulação não linear adotada. Este tópico já foi tratado no Capítulo 2. Na presente tese é estudada apenas a não linearidade geométrica, dependente dos esforços internos. Desta forma, o incremento de forças internas pode ser aproximado por:

$$\Delta\mathbf{F}_{int} = (\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_{NL})\Delta\mathbf{u} \quad (5.40)$$

onde \mathbf{K}_L é a matriz de rigidez linear elástica e \mathbf{K}_{NL} é a matriz que contém os efeitos não lineares, ambas definidas na equação (2.22). Considerando uma formulação linearizada, a matriz de rigidez geométrica para um elemento plano de viga-coluna em coordenadas locais é expressa por Silva (2009) como:

$$K_{NL} = \begin{bmatrix} \frac{P}{L} & \frac{MI+M2}{L^2} & 0 & -\frac{P}{L} & -\frac{MI+M2}{L^2} & 0 \\ \frac{MI+M2}{L^2} & \frac{6P}{5L} & \frac{P}{10} & -\frac{MI+M2}{L^2} & -\frac{6P}{5L} & \frac{P}{10} \\ 0 & \frac{P}{10} & \frac{PL}{15} & 0 & -\frac{P}{10} & -\frac{PL}{30} \\ -\frac{P}{L} & -\frac{MI+M2}{L^2} & 0 & \frac{P}{L} & \frac{MI+M2}{L^2} & 0 \\ -\frac{MI+M2}{L^2} & -\frac{6P}{5L} & -\frac{P}{10} & \frac{MI+M2}{L^2} & \frac{6P}{5L} & -\frac{P}{10} \\ 0 & \frac{P}{10} & -\frac{PL}{30} & 0 & -\frac{P}{10} & \frac{PL}{15} \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

sendo P o esforço normal médio e $M1$ e $M2$ os momentos fletores do nó inicial e final, respectivamente. Em um elemento de barra, os esforços internos são função do campo de deslocamentos longitudinal $u(x)$ e transversal $v(x)$. No caso de uma barra de seção constante, tais esforços são dados por:

$$P = EA \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x} + \frac{1}{L} \int_0^L \left(\frac{\partial v(x)}{\partial x} \right)^2 \cdot dx \right)$$

$$M = EI \left(\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} \right) \quad (5.42)$$

Os campos de deslocamentos longitudinais $u(x)$ e transversais $v(x)$ são obtidos de acordo com a equação (2.19) como:

$$u(x) = \sum_{i=1}^2 H_i(x) u_i, \quad v(x) = \sum_{i=3}^6 H_i(x) u_i \quad (5.43)$$

onde as funções de interpolação, $H_i(x)$, estão descritas em (2.20). Os incrementos dos deslocamentos nodais podem ser expressos em função dos incrementos das amplitudes modais, de forma análoga à equação (5.18), logo:

$$\Delta \mathbf{u}(t) = \mathbf{S}(\tau) \cdot \Delta \bar{\mathbf{A}} \quad (5.44)$$

Combinando as equações (5.18), (5.39), (5.40) e (5.44), o vetor de forças internas \mathbf{F}_{int_i} pode ser obtido como:

$$\mathbf{F}_{int_i} = \mathbf{K}_L \mathbf{S}(\tau) \bar{\mathbf{A}} + \mathbf{F}_{int_{i-1}} + \mathbf{K}_{NL} \mathbf{S}(\tau) \Delta \bar{\mathbf{A}} \quad (5.45)$$

Finalmente, o vetor de forças internas no domínio da frequência, definido na equação (5.23), pode ser calculado como:

$$\bar{\mathbf{F}}_{i}(\bar{\mathbf{A}}) = \bar{\mathbf{K}}_L \bar{\mathbf{A}}_i + \bar{\mathbf{K}}_{NL} \Delta \bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{F}}_{i-1}(\bar{\mathbf{A}}) \quad (5.46)$$

onde:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{K}}_L &= \int_0^{2\pi} \mathbf{S}(\tau)^T \mathbf{K}_L \mathbf{S}(\tau) d\tau \\ \bar{\mathbf{K}}_{NL} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{S}(\tau)^T \mathbf{K}_{NL} \mathbf{S}(\tau) d\tau \\ \bar{\mathbf{F}}_{i-1}(\bar{\mathbf{A}}) &= \int_0^{2\pi} \mathbf{S}(\tau)^T \mathbf{F}_{NL_{i-1}} d\tau \end{aligned} \quad (5.47)$$

É importante salientar que, se for desconsiderado o comportamento não linear, ou seja, se $\bar{\mathbf{F}}_{i-1}(\bar{\mathbf{A}}) = \bar{\mathbf{K}}_L \bar{\mathbf{A}}_i$, o sistema de equações de equilíbrio no domínio da frequência definido na equação (5.22) resulta no mesmo obtido através do MBH clássico, definido através da equação (5.9).

5.7.

Rotação da Matriz de Rigidez Não Linear no Domínio da Frequência e Montagem do Sistema Global

Para a montagem do sistema global de equações, as matrizes \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K}_L e \mathbf{K}_{NL} definidas nas equações (2.55) e (2.22), respectivamente, devem estar no sistema global de coordenadas. As deduções feitas para \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K}_L são aplicáveis a qualquer sistema de referência, sendo possível se trabalhar com as matrizes já transformadas para o sistema global. Já \mathbf{K}_{NL} , definida na equação (5.41), está

formulada em referência ao sistema local do elemento, sendo necessária sua transformação para o sistema de coordenadas globais. Com base na expressão (2.48), a matriz $\bar{\mathbf{K}}_{NL}$ pode ser reescrita como:

$$\bar{\mathbf{K}}_{NL} = \int_0^{2\pi} \mathbf{S}(\tau)^T \mathbf{T}^T \mathbf{K}_{NL} \mathbf{T} \mathbf{S}(\tau) d\tau \quad (5.48)$$

onde \mathbf{T} é a matriz de rotação definida em (2.46) e que está em função do ângulo α , que é a inclinação do elemento com respeito ao eixo horizontal das coordenadas globais. Este processo pode ser inconveniente em termos da implementação de um código de programação para a montagem de $\bar{\mathbf{K}}_{NL}$, já que os elementos de \mathbf{K}_{NL} têm expressões extensas, quando expressos em função dos deslocamentos nodais, mesmo no sistema global. Estas expressões seriam ainda mais extensas se feita a transformação para um ângulo arbitrário α após a transformação. Neste contexto, é conveniente contar com uma matriz de transformação que opere após a integração com respeito à variável τ , de tal forma que $\bar{\mathbf{K}}_{NL}$ possa ser obtida em coordenadas globais como:

$$\bar{\mathbf{K}}_{NL} = \mathbf{T}'^T \int_0^{2\pi} \mathbf{S}(\tau)^T \mathbf{K}_{NL} \mathbf{S}(\tau) d\tau \mathbf{T}' \quad (5.49)$$

onde \mathbf{T}' é uma matriz de rotação equivalente que cumpre com a seguinte igualdade:

$$\mathbf{T}'^T \mathbf{S}(\tau)^T = \mathbf{S}(\tau)^T \mathbf{T}^T \quad (5.50)$$

Aproveitando a condição de matriz diagonal em blocos de $\mathbf{S}(\tau)$, da ortogonalidade da matriz de rotação \mathbf{T} e por meio de manipulações matriciais, pode ser obtida uma expressão para obter as componentes da matriz \mathbf{T}' em função dos elementos da matriz de rotação \mathbf{T} , que pode ser montada por blocos da seguinte forma:

$$\mathbf{T}' = \begin{bmatrix} \mathbf{t}'_{1,1} & \cdots & \mathbf{t}'_{1,NGL} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{t}'_{NGL,1} & \cdots & \mathbf{t}'_{NGL,NGL} \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

onde componente $\mathbf{t}'_{i,j}$ são submatrizes calculadas através de:

$$\mathbf{t}'_{i,j} = \mathbf{T}_{i,j} \mathbf{I}_3 \quad (5.52)$$

onde \mathbf{I}_3 é a matriz identidade de ordem 3x3. Por fim, a montagem do sistema global é feito de forma similar ao procedimento adotado no método da rigidez direta, de forma análoga ao processo feito na análise no domínio do tempo.

6 Exemplos Numéricos no Domínio da Frequência

Neste Capítulo são apresentados exemplos numéricos para validar a formulação apresentada no Capítulo 5, assim como estudar a resposta em frequência de alguns sistemas estruturais. Nos exemplos apresentados é considerada apenas a não linearidade geométrica.

6.1. Resposta em Frequência: Formulação linear

Nesta seção é analisada a resposta linear em frequência de estruturas reticuladas obtidas com a formulação apresentada no Capítulo 5. Para validar a implementação computacional, a resposta obtida através do método do balanço harmônico é comparada com o resultado obtido através de análises no tempo e soluções analíticas. Para tal, duas estruturas são estudadas, a primeira, um pilar engastado na base e livre no topo, e a segunda, uma torre engasta na base e com uma massa concentrada no topo.

6.1.1. Pilar engastado e livre

Como primeiro exemplo numérico desta seção, é calculada a resposta em frequência de um pilar engastado na base modelado através de um único elemento de barra. O pilar está submetido à ação de uma excitação de base harmônica horizontal, tal como mostrado na Figura 6.1. Esta estrutura é adotada do trabalho apresentado por Paullo *et al.* (2013). As propriedades geométricas e mecânicas também podem ser encontradas na mesma Figura 6.1.

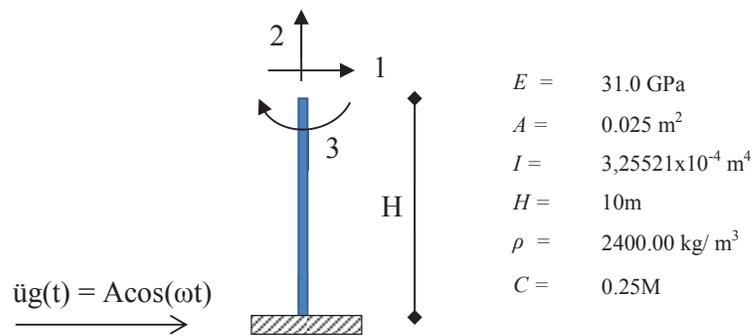


Figura 6.1 – Pilar engastado e livre, submetido a deslocamento harmônico de base.

Como se considera apenas com um elemento de barra, a estrutura apresenta apenas a três graus de liberdade. As suas propriedades dinâmicas são apresentadas na Tabela 6.1, determinadas analiticamente a partir do problema de autovalor.

Tabela 6-1. Frequências e períodos de vibração de pilar engastado e livre

Número do Modo	Frequência (rad/s)	Período (s)
1	9.163	0.6857
2	90.280	0.0695
3	622.495	0.0101

A Figura 6.2 ilustra a resposta no tempo relativa ao deslocamento horizontal no topo do elemento, considerando a estrutura sujeita a uma aceleração de base harmônica com frequência de excitação igual à primeira frequência natural. Pode-se observar que o deslocamento máximo tende para um valor em torno a 0.103 m.

Este valor deve corresponder ao deslocamento máximo da curva de ressonância que relaciona deslocamento máximo vs. frequência.

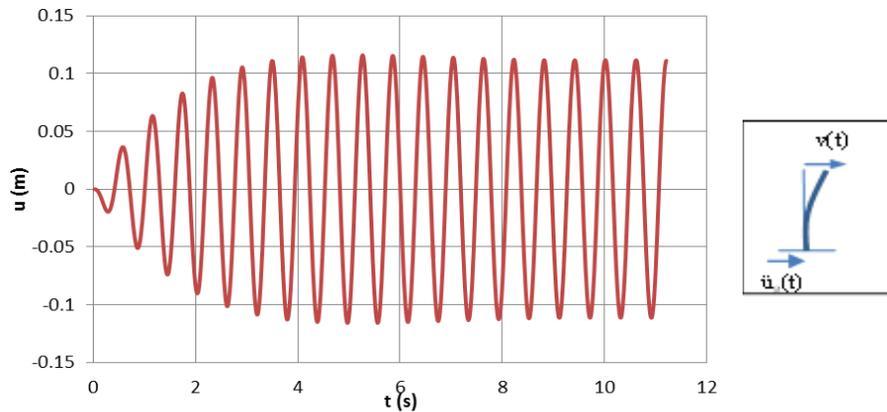


Figura 6.2 – Deslocamento horizontal vs. tempo, $A_g = 0.4g$, $\omega = 9.16 \text{ rad/s}$.

Através do MBH obtém-se a relação entre a norma deslocamento horizontal máximo no extremo livre com a frequência da excitação, como mostra a Figura 6.3. A amplitude máxima localiza-se em torno $\omega = 9.16 \text{ rad/s}$, coincidente, como esperado, com a primeira frequência natural do sistema, sendo a norma da amplitude para este valor de frequência igual a 0.104 m. Este valor coincide com o deslocamento máximo obtido pela análise no tempo, validando assim os resultados obtidos através do balanço harmônico.

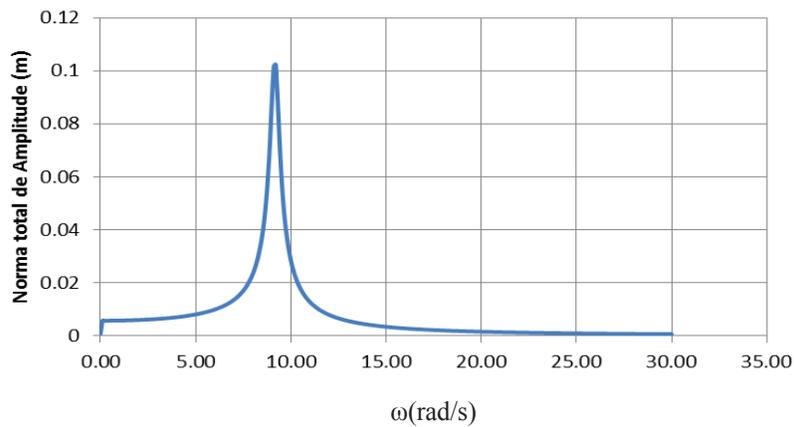


Figura 6.3 – Norma da amplitude do deslocamento horizontal máximo no topo do elemento vs. frequência, $A_g = 0.4g$.

6.1.2. Torre com massa concentrada

Como segundo exemplo empregando a formulação linear em frequência, é analisada uma torre com massa concentrada no topo e com flexibilidade linear à rotação na base, submetida a um deslocamento de base horizontal. Esta estrutura foi analisada no trabalho de Paullo *et al.* (2013). A estrutura da torre, mostrada de forma esquemática na Figura 6.4, é modelada com 20 elementos de barra, todos de igual comprimento.

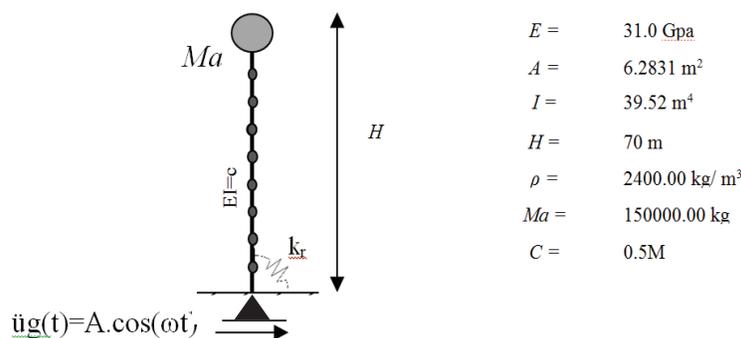


Figura 6.4 – Torre com massa concentrada no topo e apoio flexível à rotação. Ref. (Paullo *et al.*, 2010).

Na Figura 6.5 são mostradas as curvas de ressonância relativas ao deslocamento horizontal do topo da torre. Nesta figura são comparados os resultados do deslocamento horizontal máximo na fase permanente, obtidos a partir de análises no tempo, e os resultados obtidos através da formulação linear usando o MBH. Na Figura 6.5 verifica-se que as respostas obtidas através da análise no tempo e do MBH coincidem para os dois casos de flexibilidade rotacional de base aqui considerados, evidenciando que o algoritmo tem capacidade de representar adequadamente a resposta em frequência. Ainda na Figura 6.5, pode ser visto que o MBH permite determinar com maior precisão o valor da amplitude máxima na frequência de ressonância. Outro aspecto que é possível ressaltar é a economia de esforço computacional conseguida com o cálculo direto da curva de ressonância, já que, para uma análise no tempo, é necessária a integração do sistema até atingir a fase permanente para a obtenção de um único ponto da curva de resposta em frequência.

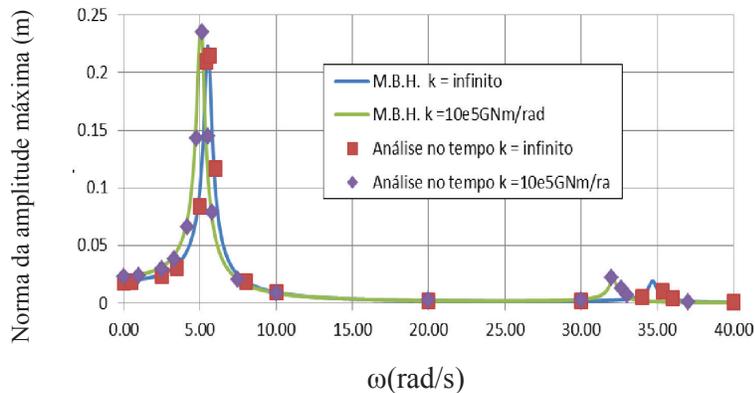


Figura 6.5 – Norma da amplitude do deslocamento horizontal máximo no topo vs. frequência de excitação.

6.2.

Resposta em Frequência: Formulação Não Linear

Nesta seção é analisada a resposta do sistema em frequência considerando não linearidade geométrica nas estruturas. É apresentado um primeiro exemplo de um grau de liberdade para a validação da formulação do MBH-Galerkin para o caso não linear. Para isto, é comparada a resposta obtida através do MBH com os resultados obtidos no domínio do tempo. A seguir, são apresentados exemplos para o estudo da influência da não linearidade geométrica em algumas estruturas.

6.2.1.

Sistema de um grau de liberdade com rigidez não linear quadrática

É apresentado como um primeiro exemplo ilustrativo, um sistema discreto não amortecido de um único grau de liberdade, mostrado na Figura 6.6, submetido a uma excitação harmônica, o qual tem uma mola com rigidez não linear.

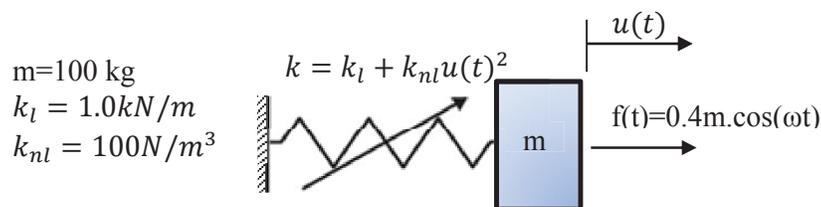


Figura 6.6 – Sistema de 1 grau de liberdade com rigidez não linear não amortecido.

Por se tratar de um sistema não amortecido e apenas com não linearidade cúbica, o deslocamento pode ser aproximado apenas por um único harmônico, a saber:

$$u(t) = A_1 \cos(\omega t) \quad (6.1)$$

onde A_1 é a amplitude de vibração e ω é a frequência de vibração. Esta simplificação permite estabelecer uma relação direta entre a amplitude de vibração e o deslocamento máximo na fase permanente.

Na Figura 6.7 é mostrada a resposta em frequência do deslocamento na fase permanente calculada através do algoritmo do MBH – Galerkin e a resposta obtida através de análises no tempo. Para a análise no tempo, são consideradas condições iniciais homogêneas. Na Figura 6.7 pode ser observado que há semelhança entre as duas respostas, validando desta forma a implementação do algoritmo do MBH – Galerkin. Pode-se também observar o efeito da não linearidade cúbica positiva, caracterizado pelo ganho de rigidez. Mostra-se também em vermelho a relação não linear frequência-amplitude. Por fim, nota-se que a solução obtida no tempo consegue representar com precisão o ramo ressonante estável. O outro ramo pode ser obtido decrescendo-se a frequência da excitação. Observa-se a existência de um ponto limite (tangente vertical) onde ocorre uma bifurcação sela-nó, que separa o ramo não ressonante estável do ramo ressonante instável. Verifica-se que o algoritmo de continuação consegue ultrapassar o ponto limite e obter a três respostas coexistentes para frequências de excitação superiores à associada ao ponto limite ($\omega \cong 25$ rad/s). Caso fosse considerado amortecimento, outro ponto limite surgiria limitando a amplitude máxima, como ocorre no caso linear.

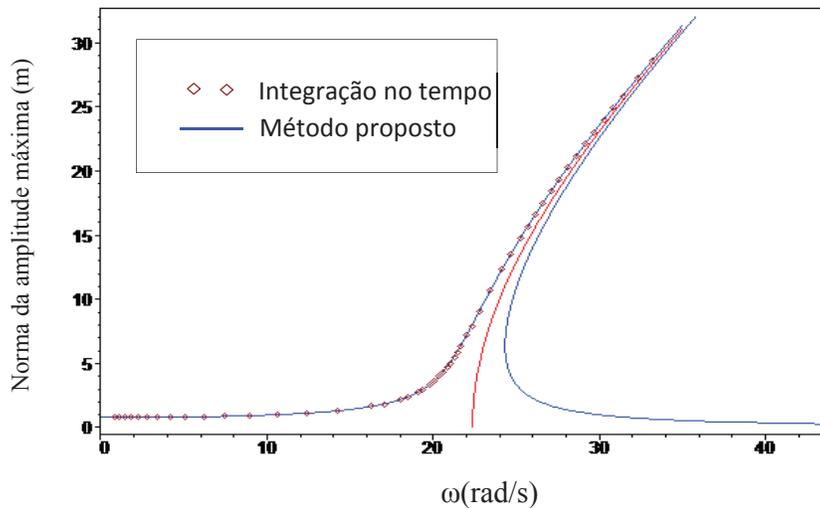


Figura 6.7 – Sistema de 1 grau de liberdade não amortecido com rigidez não linear.

6.2.2.

Influência da intensidade da excitação e não linearidade cúbica

Nesta seção é estudada a resposta não linear em frequência do sistema de pilar engastado-livre mostrado na Figura 6.1, considerando agora a formulação não linear geométrica. É estudada a influência do aumento da intensidade da excitação na resposta em frequência do deslocamento horizontal.

Na Figura 6.8 pode ser observado que o efeito da não linearidade geométrica é traduzido em um aumento da rigidez, e, conseqüentemente, no aumento do valor da frequência de ressonância com a amplitude, apresentando um comportamento do tipo “*hardening*” típico de barras esbeltas submetidas predominantemente a esforços de flexão, onde predomina a não linearidade cúbica, que é positiva neste caso. Cabe ressaltar que a não linearidade geométrica deste tipo de estrutura é relativamente baixa, só aparecendo seus efeitos para grandes magnitudes de carregamento. Este ganho de rigidez aumenta com a magnitude da aceleração de base, caracterizando o efeito não linear. Em virtude do amortecimento, verifica-se a presença de dois pontos limites para $A_g = 5g$ e $10g$, e, portanto uma região onde coexistem oscilações de pequena e grande amplitude. A solução permanente é, portanto, função das condições iniciais. A existência de soluções coexistentes pode levar a saltos dinâmicos em um regime transiente, levando a picos de tensões e deformações. Para valores menores da amplitude de excitação a resposta é

praticamente linear. Verifica-se que o algoritmo é capaz de obter a resposta não linear em frequência, ultrapassando os dois pontos limites.

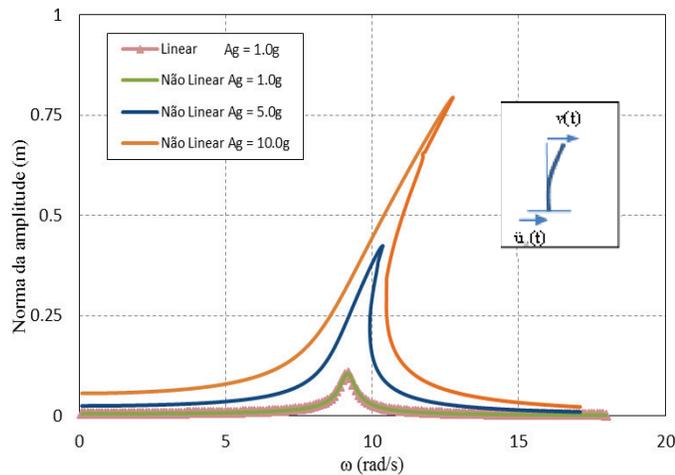


Figura 6.8 – Norma do deslocamento horizontal máximo no topo vs. frequência.

6.2.3.

Arco bi-engastado: Efeito da não linearidade quadrática

Nesta seção é analisado um arco circular abatido bi-engastado. A estrutura está submetida a uma excitação harmônica vertical com uma magnitude de aceleração igual à aceleração da gravidade g . A estrutura é modelada com 20 elementos de barra de igual comprimento. As propriedades de seção e material são apresentadas na Figura 6.9.

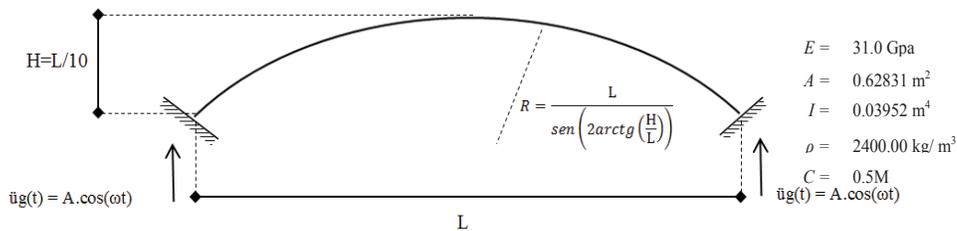


Figura 6.9 – Arco abatido bi-engastado submetido a movimento harmônico vertical.

Na Figura 6.10, pode ser visto que o efeito da não linearidade geométrica se traduz em uma redução do valor da frequência de ressonância, e um aumento do

valor da amplitude de vibração. Esta resposta indica uma perda de rigidez (comportamento *softening*), característica desta classe de estruturas quando solicitada verticalmente. Isto se deve predominantemente aos esforços axiais de compressão que geram um aumento da não linearidade quadrática que, para este caso, é negativa. Nota-se que há uma diferença apreciável entre a solução linear e não linear na primeira região de ressonância, levando a não linearidade a um aumento das amplitudes de vibração.

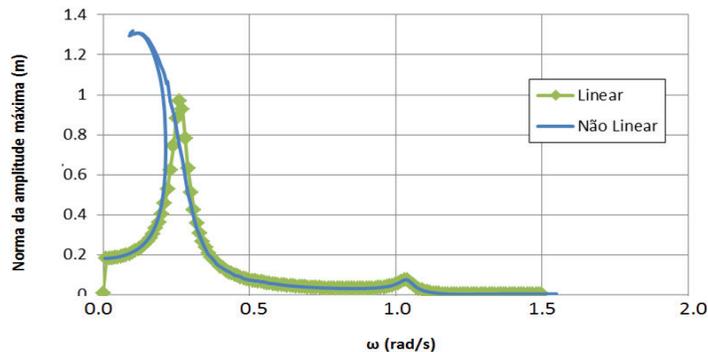


Figura 6.10 – Norma da amplitude vertical no meio do vão vs. frequência. $A=1.0g$, $L=100m$.

6.3.

Efeito de não linearidade geométrica em estruturas esbeltas

Nesta seção é estudada a influência da não linearidade geométrica na resposta em frequência em estruturas esbeltas quando submetidas a solicitações de base.

6.3.1.

Estrutura de galpão com cobertura de duas águas

Nesta seção é estudada uma estrutura de galpão com cobertura de duas águas, modelado com vinte elementos de viga-coluna, sendo cinco elementos de igual comprimento para cada pilar, e 10 elementos de mesmo tamanho para a cobertura. Os apoios são modelados como engastes e é levada em conta a não linearidade geométrica da estrutura. A geometria e propriedades da seção e do material são mostradas na Figura 6.11.

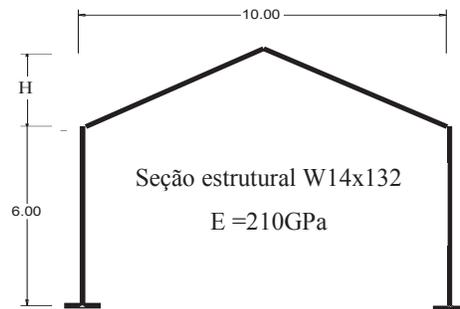


Figura 6.11 – Geometria de galpão com cobertura a duas águas.

Na Tabela 6.2 são apresentadas as quatro primeiras frequências naturais de vibração da estrutura considerando quatro valores diferentes da altura H.

Tabela 6-2. Primeiras quatro frequências vibração

Altura da cobertura H (m)	Frequência natural de vibração (rad/s)			
	1° Modo	2° Modo	3° Modo	4° Modo
0.0	25.571	57.235	152.200	186.915
1.0	25.004	59.408	146.412	194.570
3.0	22.607	54.810	126.167	184.203
6.0	18.003	42.311	94.185	105.354

Na Figura 6.12 são apresentados o primeiro e terceiro modo de vibração (modos assimétricos) e na Figura 6.13, o segundo e quarto modo de vibração (modos simétricos).

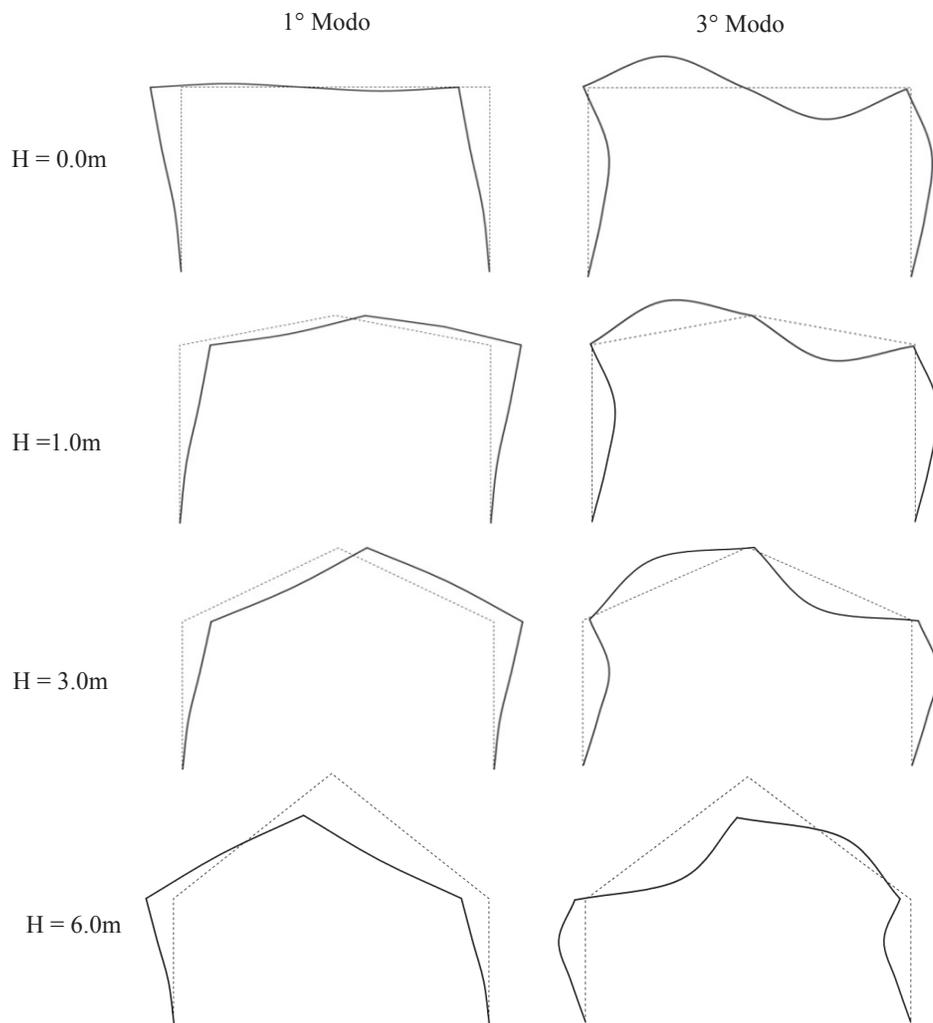


Figura 6.12 – Primeiro e terceiro modos de vibração natural. Modos assimétricos.

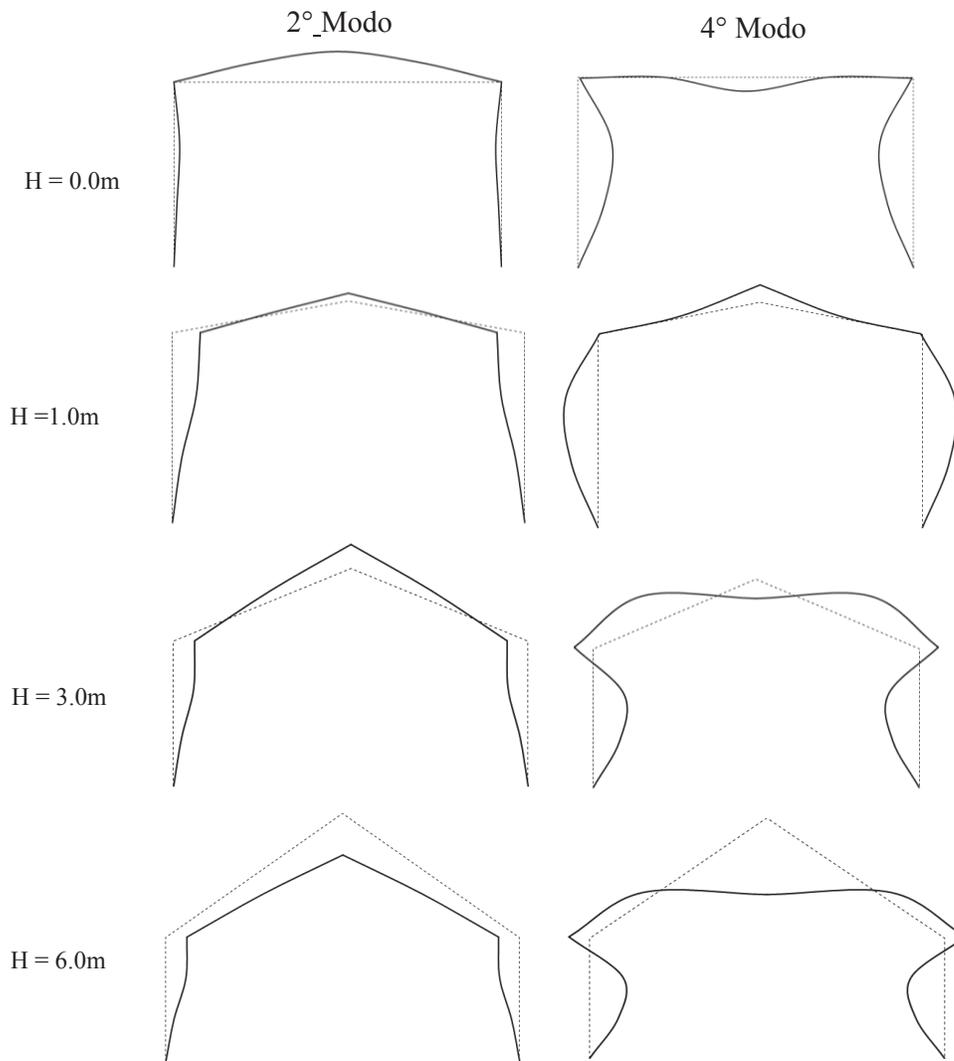


Figura 6.13 – Segundo e quarto modo de vibração natural. Modos simétricos.

6.3.1.1. Resposta para solicitação de base

Nesta seção é estudada a resposta do galpão quando submetido a uma excitação harmônica horizontal. Ao mesmo tempo é mostrada também a influência da variação da altura da cobertura H na resposta da estrutura. É considerada uma magnitude de aceleração de base de $0.8g$.

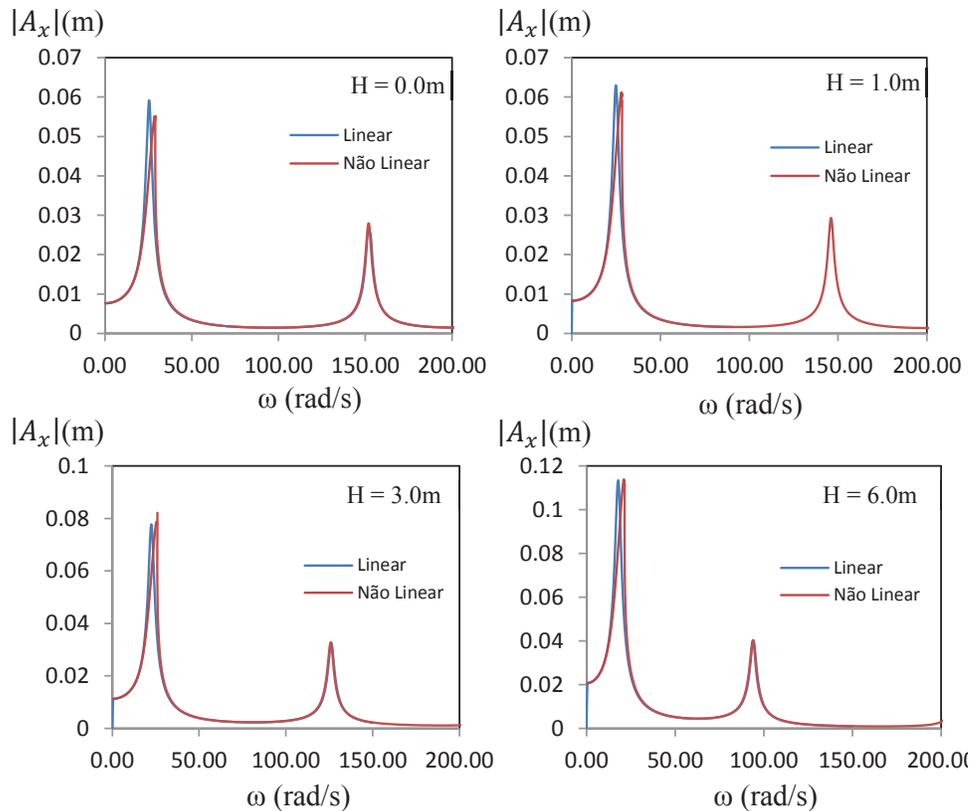


Figura 6.14 – Amplitude de vibração horizontal no meio do vão vs. frequência de excitação. $A_{gx} = 0.8g$.

Na Figura 6.14 é mostrada a variação da amplitude de vibração horizontal no topo do galpão em função da frequência de excitação. Na faixa de valores de frequência considerados, são excitados apenas o primeiro e terceiro modos, ou seja, apenas os modos não simétricos, como mostra a Figura 6.12. O pórtico apresenta uma não linearidade do tipo *hardening* que afeta apenas o primeiro pico de ressonância. Isto é devido a não linearidade cúbica que é função do deslocamento transversal que é predominante nos modos não simétricos. Fora da vizinhança da primeira frequência de ressonância excitada horizontalmente, as respostas linear e não linear apresentam-se coincidentes, indicando que o efeito da não linearidade geométrica não é substancial para estas faixas de frequência.

6.3.1.2. Resposta para solicitação na direção vertical

Nesta seção é estudada a resposta do galpão com cobertura a duas águas quando solicitado na direção vertical. Neste caso, é considerada uma magnitude de aceleração de 0.8g, igual ao caso anterior.

Na Figura 6.15 é mostrada a variação da amplitude de vibração vertical no meio do vão (topo do galpão) em função da frequência de excitação. Na faixa de valores de frequência considerada são excitados apenas o segundo e quarto modo, manifestado em um aumento das amplitudes de vibração na vizinhança da segunda e quarta frequência de vibração natural (modos simétricos - ver Figura 6.13). Neste caso, a não linearidade é do tipo *softening* e leva a um aumento da amplitude máxima de vibração. Isto é devido a não linearidade quadrática que expressa a interação entre deslocamentos axiais e laterais. Note-se também que este efeito decresce com o aumento do valor da altura da cobertura H. Similar à resposta com excitação horizontal, nas regiões afastadas da primeira frequência de ressonância excitada, a resposta linear e não linear apresentam-se coincidentes, indicando pouca influência da não linearidade geométrica.

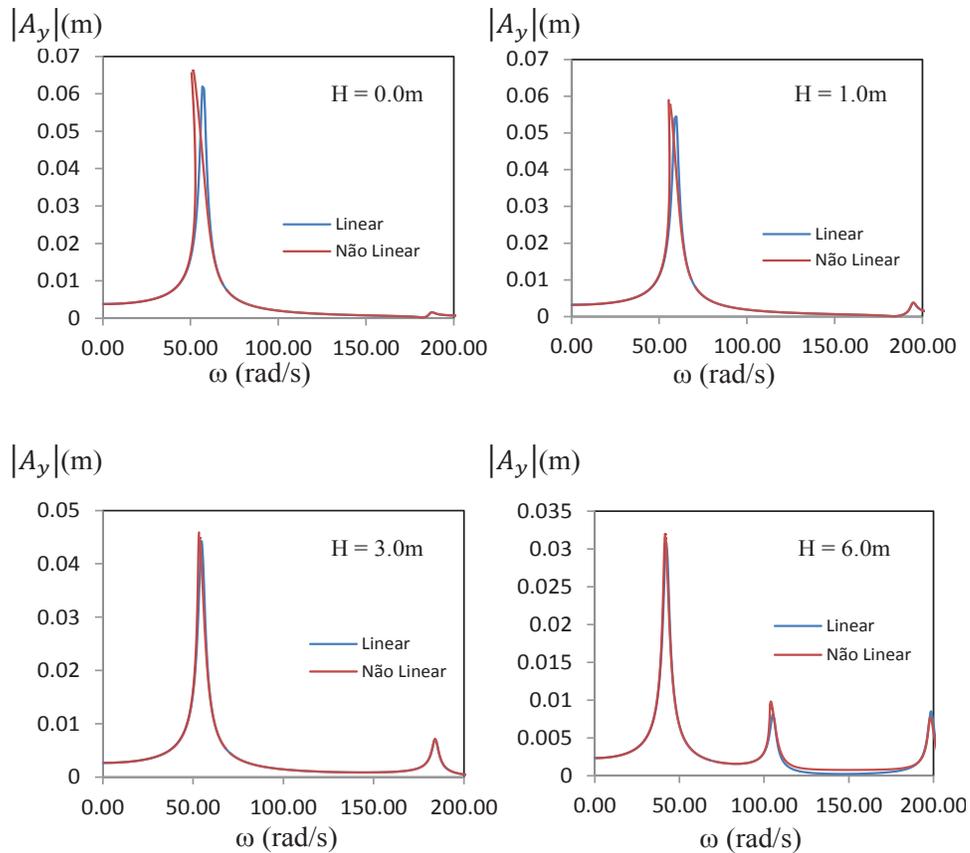


Figura 6.15 – Amplitude de vibração vertical no meio do vão vs. frequência de excitação. $A_{gy} = 0.8g$.

6.3.1.3.

Resposta para solicitação horizontal e vertical simultânea

Nesta seção é considerado que a excitação com componentes de aceleração vertical e horizontal. A existência destas duas componentes é usual em problemas de excitação sísmica. Algumas normas de análise sísmica para projeto estrutural, tais como a norma de análise sísmico do código de projeto estrutural peruano (MVC-RNE.E-030, 2007), adota uma proporção entre a amplitude de aceleração horizontal e vertical. É considerado que a aceleração vertical tem uma amplitude igual a 0.66 vezes a amplitude da aceleração horizontal. A aceleração horizontal é adotada como 0.8 vezes a aceleração da gravidade.

A Figura 6.16 mostra a resposta em frequência da vibração horizontal e vertical no topo do galpão Neste caso as quatro primeiras frequências naturais são excitadas. Esta combinação de excitações tem um profundo efeito na primeira

região de ressonância, evidenciado pelo efeito de “*hardening*”, para todos os valores H considerados, No caso da segunda frequência de ressonância, o efeito de *hardening*, é visível apenas para o valor de $H = 0.0\text{m}$ (pórtico plano). Já nas demais zonas as respostas linear e não linear são próximas. Verifica-se um aumento da amplitude de vibração horizontal na região da primeira frequência de ressonância quando o valor de H aumenta. Assim como também que para o caso de $H = 3.0\text{m}$ e de $H = 6.0\text{m}$, há uma notoriedade maior na excitação dos quatro primeiros modos de vibração, se comparado com a resposta para $H = 0.0\text{m}$.

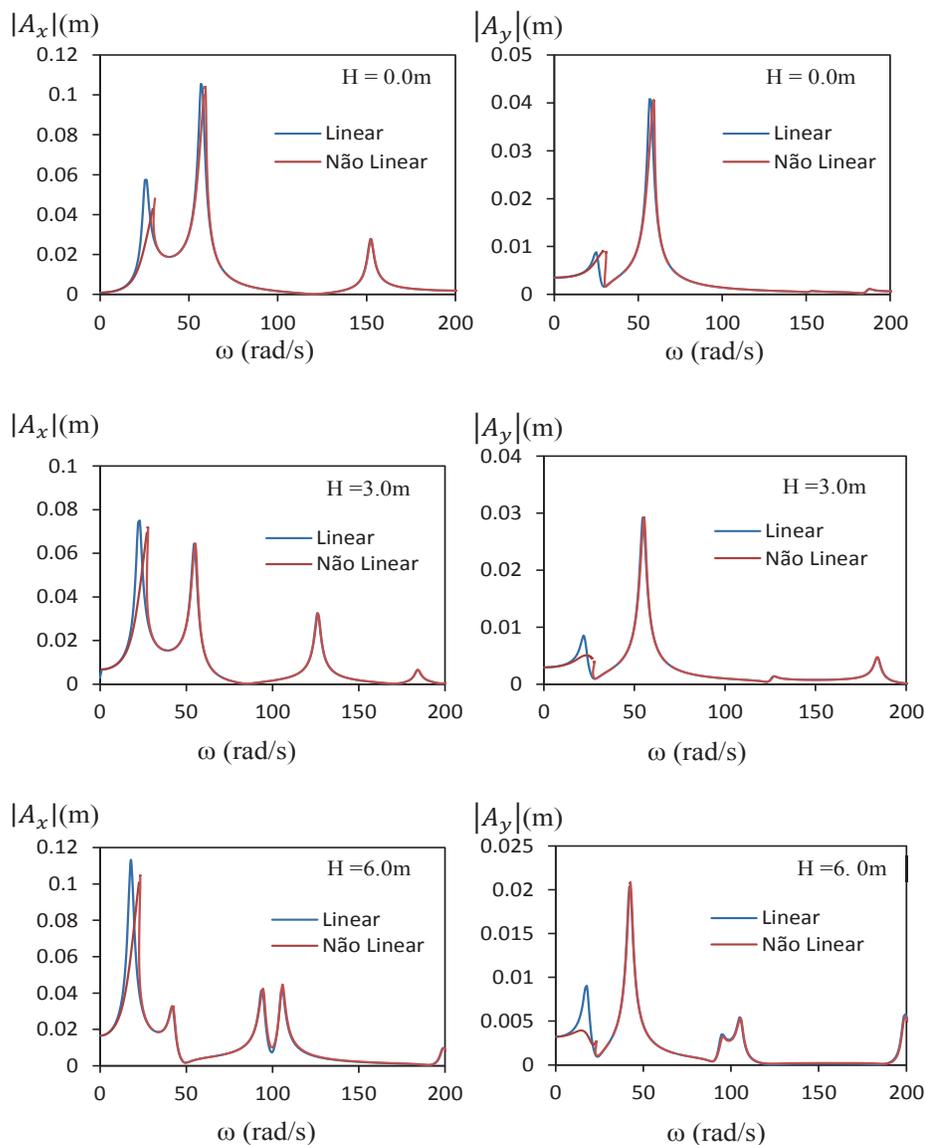


Figura 6.16 – Amplitude de vibração horizontal e vertical no meio do vão vs. frequência de excitação. $A_{gx} = 0.8g$, $A_{gy} = 0.667A_{gx}$.

Verifica-se que o tipo de excitação de base tem grande influência nos picos de ressonância, com diferentes modos sendo excitados em cada caso, e no tipo de não linearidade da estrutura.

6.3.2. Estrutura de galpão com cobertura em arco

Nesta seção é analisada uma estrutura de galpão com cobertura em arco circular. A sua geometria é mostrada na Figura 6.17. Pode-se observar que as dimensões dos pilares, largura do vão, e altura da cobertura é similar ao do galpão analisado na seção 6.3.1. A estrutura é modelada com vinte elementos de barra, com consideração de não linearidade geométrica, sendo cinco elementos de igual comprimento em cada pilar, e 10 elementos de mesmo tamanho para a cobertura. Os apoios são modelados como engastes.

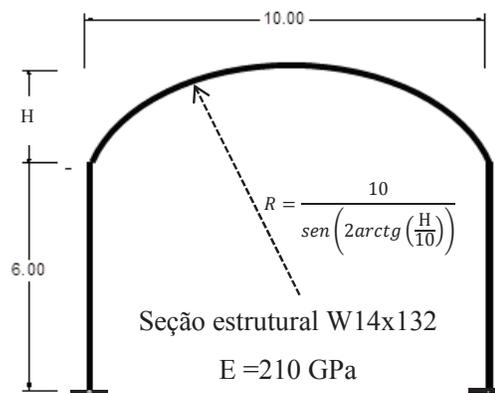


Figura 6.17– Geometria de galpão com cobertura em arco circular. (dimensões em metros)

Na Tabela 6.3 são apresentadas as quatro primeiras frequências naturais de vibração da estrutura considerando três valores diferentes de altura de cobertura. Nota-se que as frequências decrescem com o aumento da altura H e que as frequência têm a mesma ordem de grandeza que as frequências do exemplo anterior.

Tabela 6-3. Primeiras quatro frequências vibração

Altura da cobertura H (m)	Frequência natural de vibração (rad/s)			
	1° Modo	2° Modo	3° Modo	4° Modo
1.0	24.624	60.096	142.727	190.045
3.0	20.666	56.501	114.327	176.371
5.0	15.563	47.401	87.486	134.576

Nas Figuras 6.18 e 6.19 são apresentados o primeiro e terceiro modos de vibração, e o segundo e quarto modos de vibração, respectivamente.

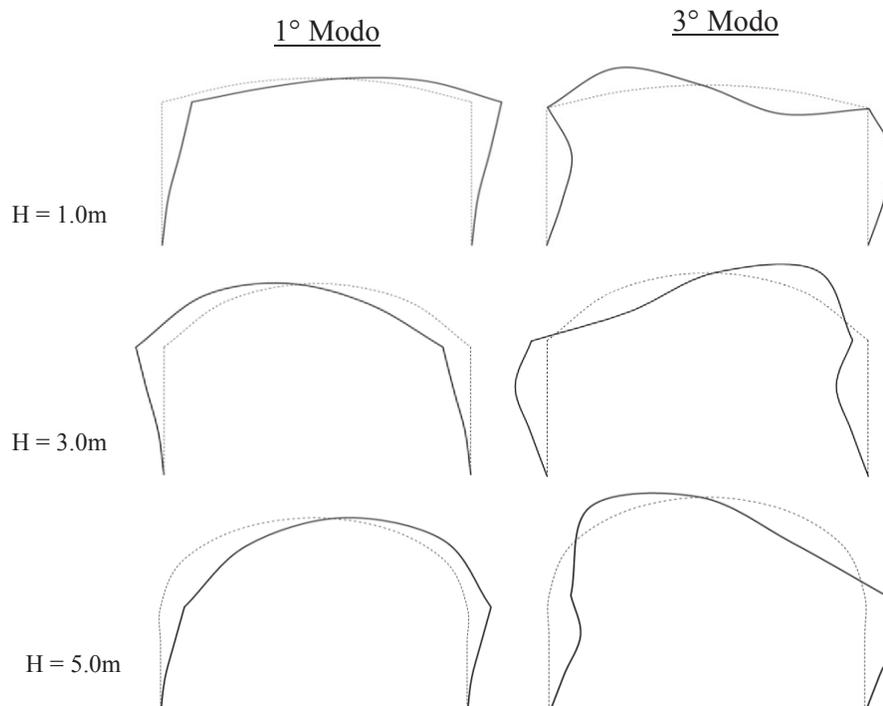


Figura 6.18 – Primeiro e terceiro modos de vibração natural. Modos não simétricos.

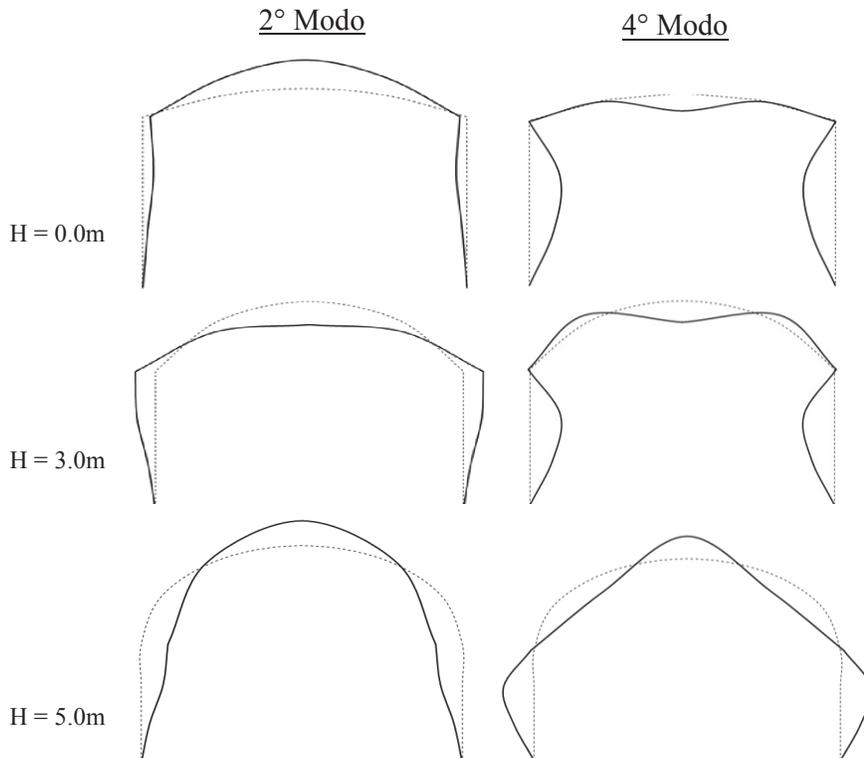


Figura 6.19 – Segundo e quarto modos de vibração natural. Modos simétricos.

6.3.2.1.

Resposta para solicitação sísmica horizontal

Nesta seção é estudada a resposta do galpão com cobertura em arco excitado por um movimento harmônico horizontal. Ao mesmo tempo é mostrada a influência da variação da altura da cobertura H na resposta da estrutura. Considera-se que a aceleração de base tem uma amplitude de $0.8g$.

A Figura 6.20 mostra a relação entre a norma da amplitude máxima no topo do galpão, considerando três valores de H . Para todos os valores de H adotados, são excitadas apenas as frequências ímpares, como no exemplo anterior. Nota-se também que a influência da não linearidade geométrica se manifesta apenas nas proximidades da primeira frequência de ressonância excitada, onde se observa um ganho de rigidez. Nas faixas de frequência afastadas da primeira frequência de ressonância, não é visível o efeito da não linearidade geométrica, em virtude da magnitude da excitação.

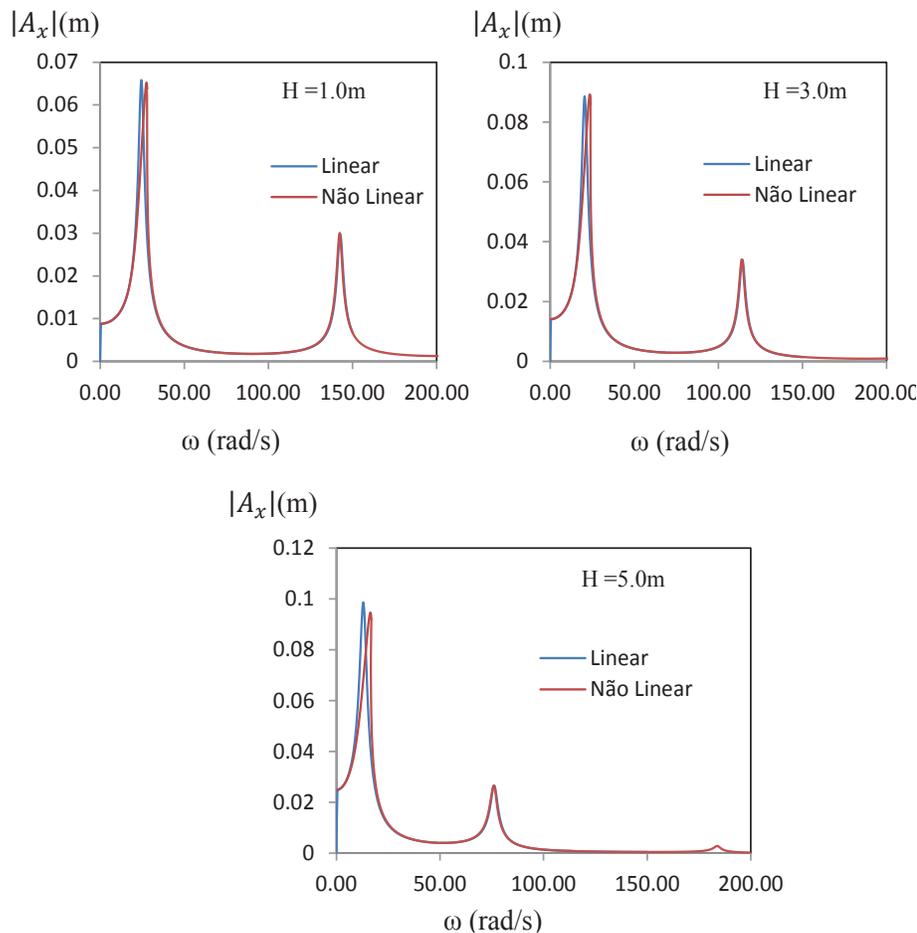


Figura 6.20 – Amplitude de vibração horizontal no meio do vão vs. Frequência. $A_{gx} = 0.8g$.

6.3.2.2. Resposta para solicitação sísmica Vertical

Estuda-se agora a resposta do galpão sob a ação de um movimento de base vertical. Para este caso é considerada uma aceleração de base de $0.8g$. A Figura 6.21 mostra a variação da amplitude de vibração vertical no meio do vão do galpão (topo do galpão) com a frequência de excitação. Similarmente ao exemplo anterior, são excitados apenas os modos pares, sendo visíveis picos de ressonância apenas na região da segunda e quarta frequência natural. Também, como no exemplo anterior, nota-se um comportamento não linear com perda de rigidez, porém menor que no galpão com cobertura a duas águas. É observado também um leve aumento da amplitude máxima de vibração em relação à resposta linear. As

regiões afastadas da primeira frequência de ressonância não sofrem mudanças importantes pela consideração da não linearidade geométrica.

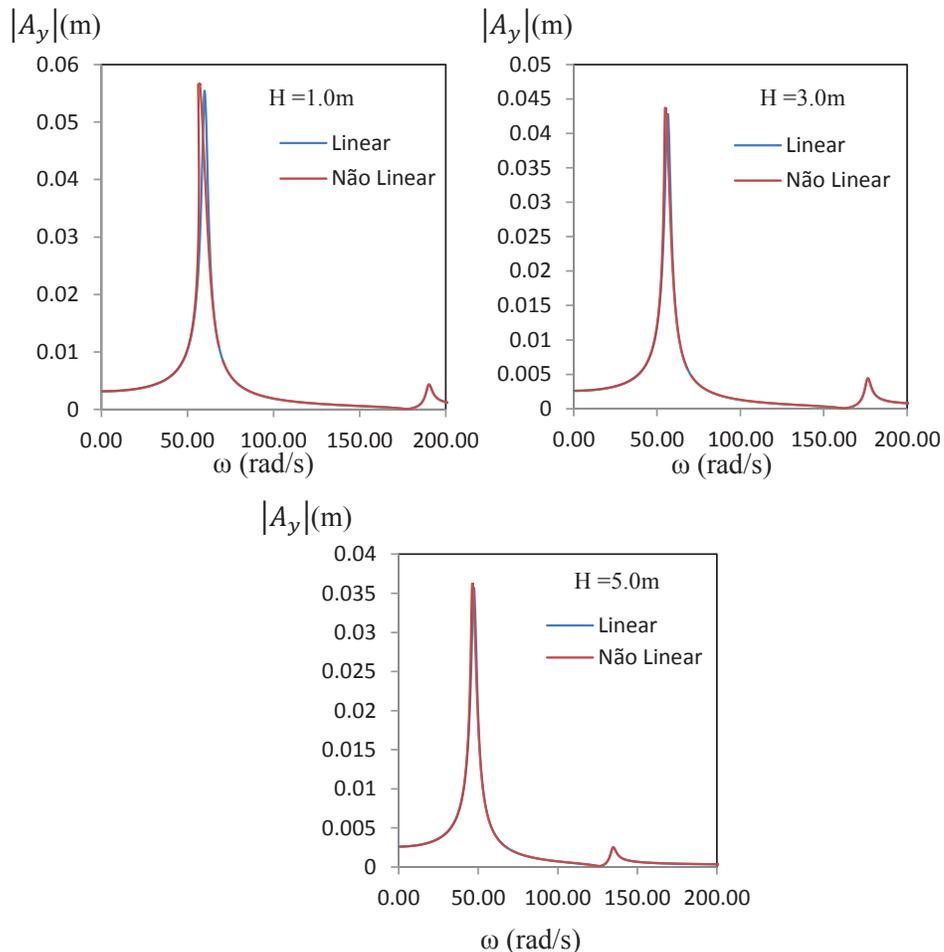


Figura 6.21 – Amplitude de vibração vertical no meio do vão vs. Frequência. $A_{gy} = 0.8g$.

6.3.2.3.

Resposta para solicitação sísmica horizontal e vertical simultâneos

Por fim, é considerado que uma excitação de base com componentes de aceleração vertical e horizontal. Como no exemplo anterior, considera-se que a aceleração vertical tem uma magnitude igual 0.667 vezes a amplitude da aceleração horizontal, sendo a aceleração horizontal igual a 0.8g.

A Figura 6.22 mostra as curvas de ressonância para ambas as componentes de vibração. Como no exemplo anterior, nota-se que as quatro primeiras frequências naturais são excitadas. Nota-se também o efeito de “*hardening*”.

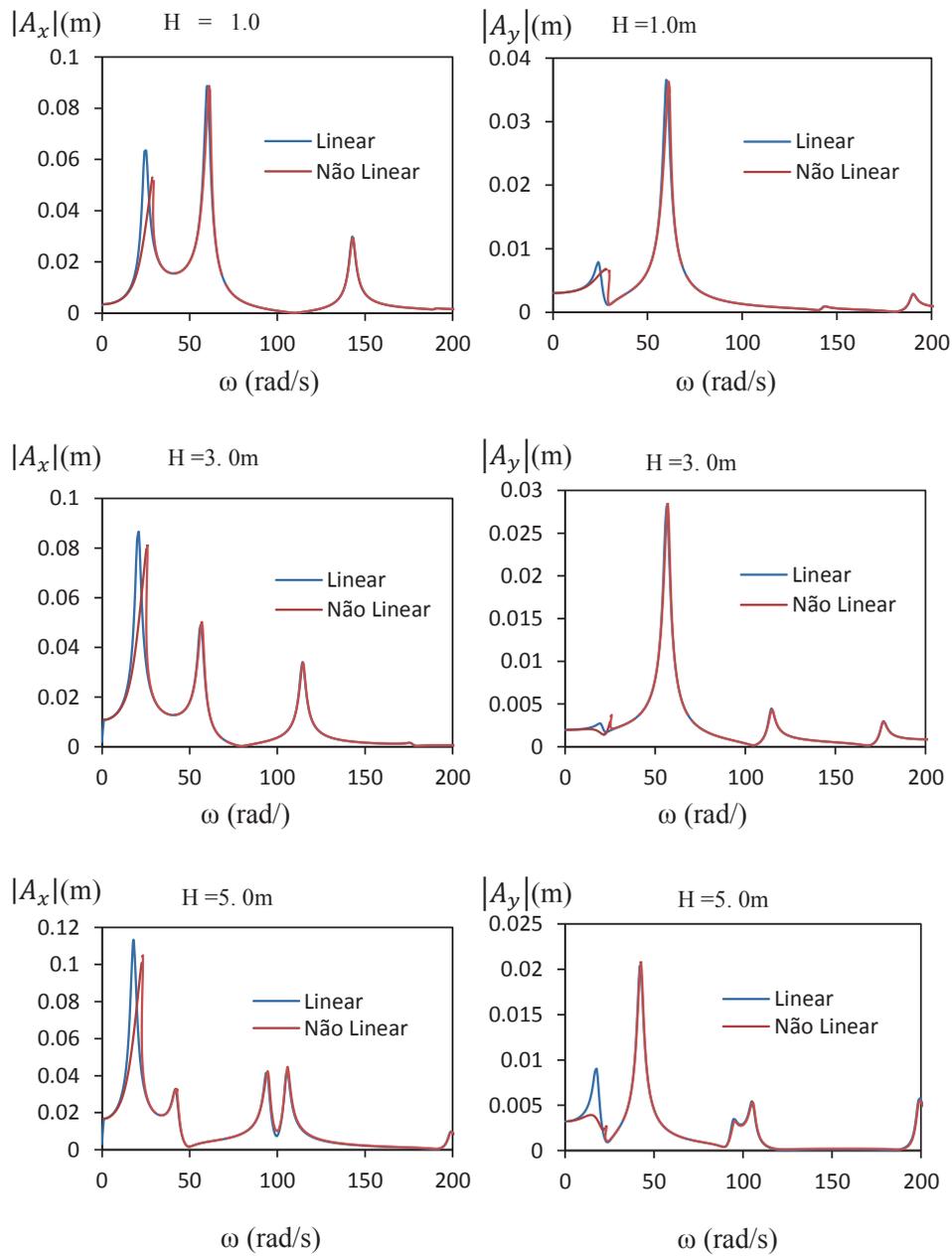


Figura 6.22 – Amplitude de vibração horizontal e vertical no meio do vão vs. Frequência. $A_{gx} = 0.8g$, $A_{gy} = 0.66A_{gx}$.

7

Estruturas Submetidas a Sismos Reais e Artificiais com Interação Solo-Estrutura

Com a validação da formulação da análise no domínio do tempo no Capítulo 4, e com base no estudo em frequência realizado no Capítulo 5, é mostrado neste capítulo o estudo de três tipos de galpões industriais submetidos a quatro tipos de ações sísmicas: sismos reais, sismos artificiais com potência similar ao sismo real, sismos artificiais com potência concentrada nas regiões de ressonância das estruturas e sismos de ação sucessiva. É considerada também neste Capítulo a influência da interação com a base, considerada com comportamento elasto-plástico.

7.1.

Solicitações Sísmicas

7.1.1.

Solicitações sísmicas reais

As solicitações sísmicas reais usadas nos exemplos da presente seção são os sismos El Centro (Califórnia, 1940) e Kobe (Kobe, 1995). Estes sismos são escolhidos por serem dois sismos com representatividade na área de pesquisa referente a este tema. O sismo El Centro por ser um registro clássico, considerado em inúmeras pesquisas, já o sismo Kobe é um evento mais recente (acontecido em 1995), e que chamou a atenção da comunidade científica pelos impactos negativos causados devido ao registro de grandes acelerações sofridas pelas estruturas e o colapso de diversas estruturas de grande porte. A Figura 7.1 mostra os registros de aceleração das componentes que apresentaram a maior magnitude de aceleração, assim como as respectivas funções densidade de espectro de potência.

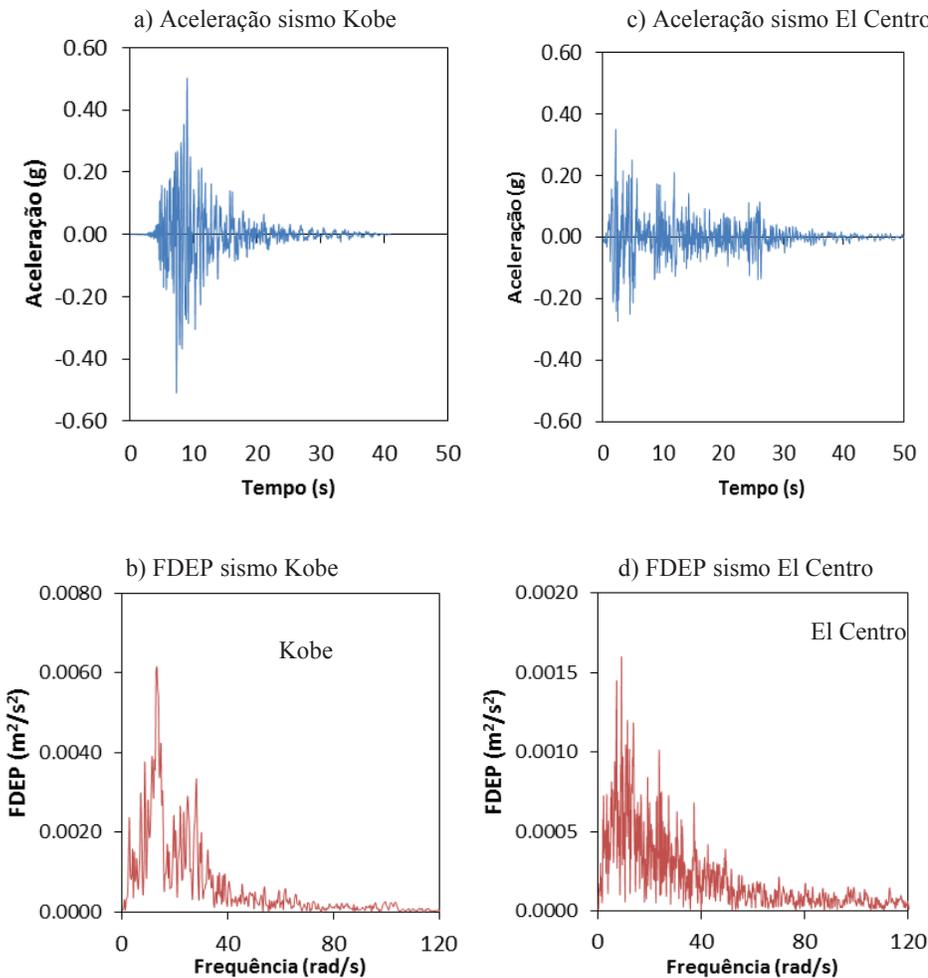


Figura 7.1 – Registro de aceleração e FDEP. a) Aceleração do sismo Kobe, componente Leste-Oeste. b) FDEP sismo Kobe. c) Aceleração do sismo El Centro, componente Norte-Sul. d) FDEP sismo El Centro.

Na Figura 7.1 pode-se observar a diferença entre os registros de aceleração dos sismos El Centro e Kobe. No caso do sismo El Centro, a aceleração de pico está em torno de 0.39g, sendo g a aceleração da gravidade, e tendo uma fase intensa de 35 segundos. Já no caso do sismo de Kobe, a aceleração de pico está em torno de 0.5g, com fase intensa claramente concentrada nos primeiros 20 segundos da duração do sismo. Em ambos os casos, a potência sísmica está concentrada na faixa de frequências de 0 a 40 rad/s. Esta concentração é mais acentuada no caso do sismo Kobe. Estes dados ilustram um dos grandes problemas da análise de estruturas sob uma excitação sísmica; a variabilidade dos sismos e a dificuldade de se definir um sismo de projeto.

7.1.2. Solicitações sísmicas artificiais

Os sismos artificiais são gerados seguindo o algoritmo apresentado no Capítulo 3. Para a presente seção são gerados cinco sismos artificiais a partir da FDEP do sismo El Centro, e cinco sismos a partir da FDEP do sismo Kobe, mudando em cada caso o faseamento dos harmônicos. Isto é conseguido com o algoritmo de geração randômica de ângulos de fase descritos no Capítulo 4, Seção 4.4.1, mudando o valor de semente x_0 . Assim, são obtidos cinco conjuntos de ângulos de fase com o algoritmo de geração randômica, considerando cinco valores de semente, a saber: $x_0 = 5$, $x_0 = 10$, $x_0 = 20$, $x_0 = 50$ e $x_0 = 100$. Cabe salientar que todos estes sismos artificiais têm potência sísmica similar ao sismo do qual foram gerados. Os sismos artificiais advindos da FDEP do sismo El Centro são nomeados através das seguintes siglas: SAEC1, SAEC2, SAEC3, SAEC4 e SAEC5. As siglas SAKB1, SAKB2, SAKB3, SAKB4 e SAKB5 identificam os sismos artificiais gerados a partir do sismo Kobe. Todos os sismos têm uma duração de 45 segundos e uma fase intensa de 30 segundos que começa após os 7 segundos iniciais do evento sísmico. Da mesma forma, todos os sismos estão normalizados para terem como aceleração de pico uma amplitude de 0.4g. Nas Figuras 7.2 e 7.3 são mostrados os acelerogramas dos sismos gerados artificialmente.

Todos os acelerogramas correspondem à solicitação horizontal para os exemplos realizados nesta seção. Além disto, em todos os exemplos apresentados no presente Capítulo, é considerada a ação de aceleração vertical igual a 0.667 vezes a aceleração horizontal, como considerado também no Capítulo 5, seguindo a recomendação da norma RNE-E-030 (2007).

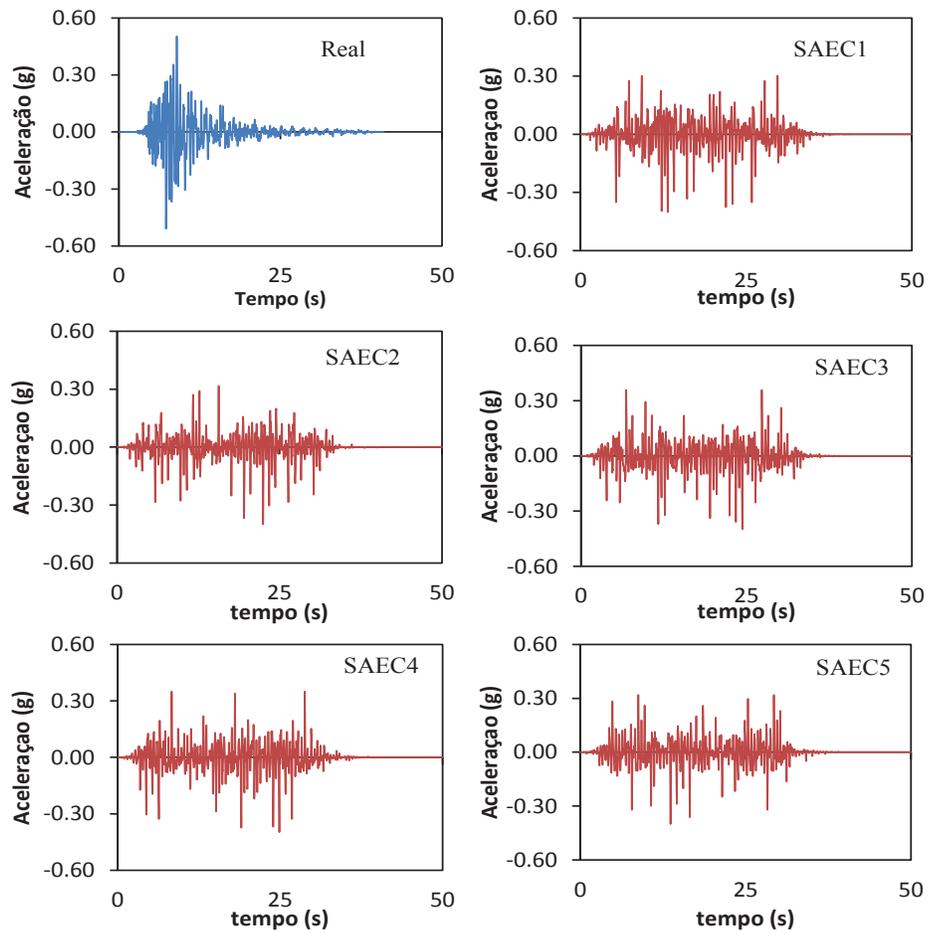


Figura 7.2 – Registo de aceleração artificiais gerados a partir do sismo El Centro.

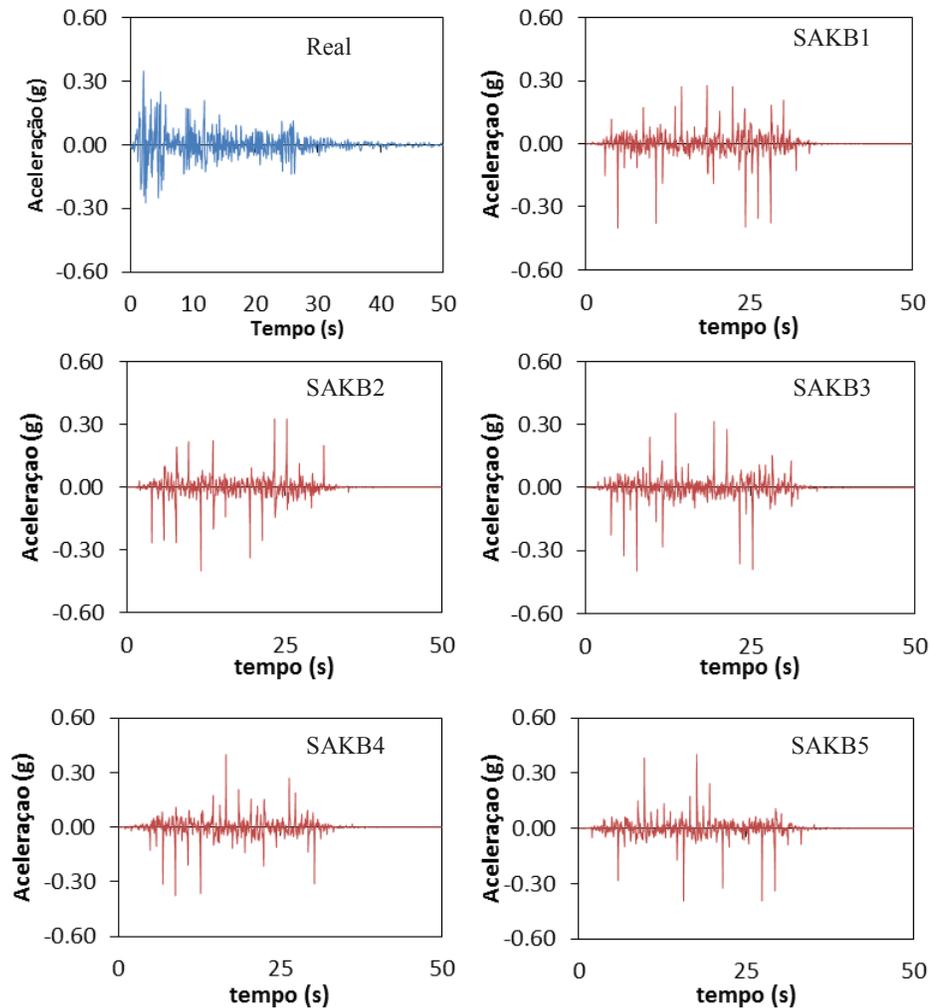


Figura 7.3 – Registo de aceleração artificiais gerados a partir do sismo Kobe.

7.2.

Pórtico Plano PT-1

Nesta seção é estudado um pórtico plano. As dimensões da estrutura e propriedades de material são adotadas com base no estudo em frequência realizado no Capítulo 6. O pórtico tem 6.0 metros de altura e vão livre de 10 metros de comprimento, dimensões iguais à estrutura PT-1 analisada no item 6.3.1. (vide Figura 6.11). É considerado comportamento elasto-plástico à rotação na região dos apoios. Este comportamento é simulado através de molas rotacionais elasto-plásticas. A geometria, características de seção e parâmetros

elasto-plásticos dos apoios são mostrados na Figura 7.4. A estrutura estudada nesta seção é identificada com a sigla PT-1

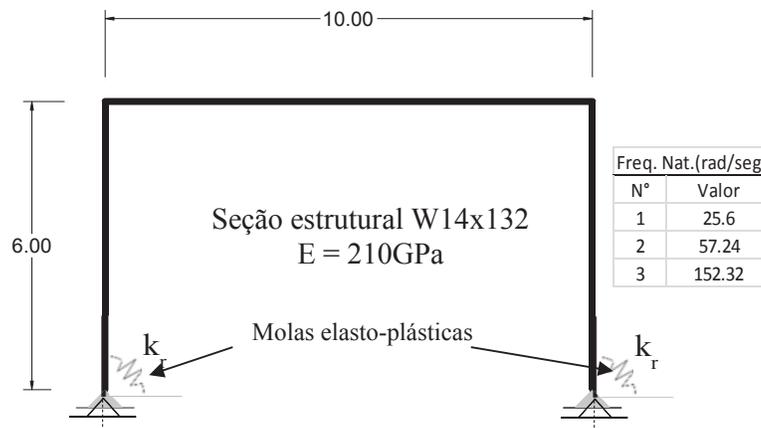


Figura 7.4 – Geometria e parâmetros de pórtico plano PT-1. Parâmetros da mola elasto-plástica: $k_r = 5 * 10^{10} Nm/rad$, $k^{ep} = 0.1 * k_r$, $M_p = 10^5 Nm$.

7.2.1. Resposta aos sismos reais

Na Figura 7.5 são apresentadas as respostas no tempo do deslocamento horizontal e aceleração horizontal no meio do vão do pórtico PT-1 (topo da estrutura), quando submetido à ação sísmica real El Kobe (1995), considerando base rígida e com flexibilidade à rotação. Pode-se observar que a resposta que considera flexibilidade da base apresenta picos menores tanto de deslocamento máximo quanto de aceleração máxima, havendo uma redução de 20% no deslocamento máximo, e uma redução de 23% na aceleração máxima. Isto indica que a combinação do efeito de dissipação plástica e de mudança das propriedades em frequência diminui as amplitudes de vibração e aceleração do pórtico.

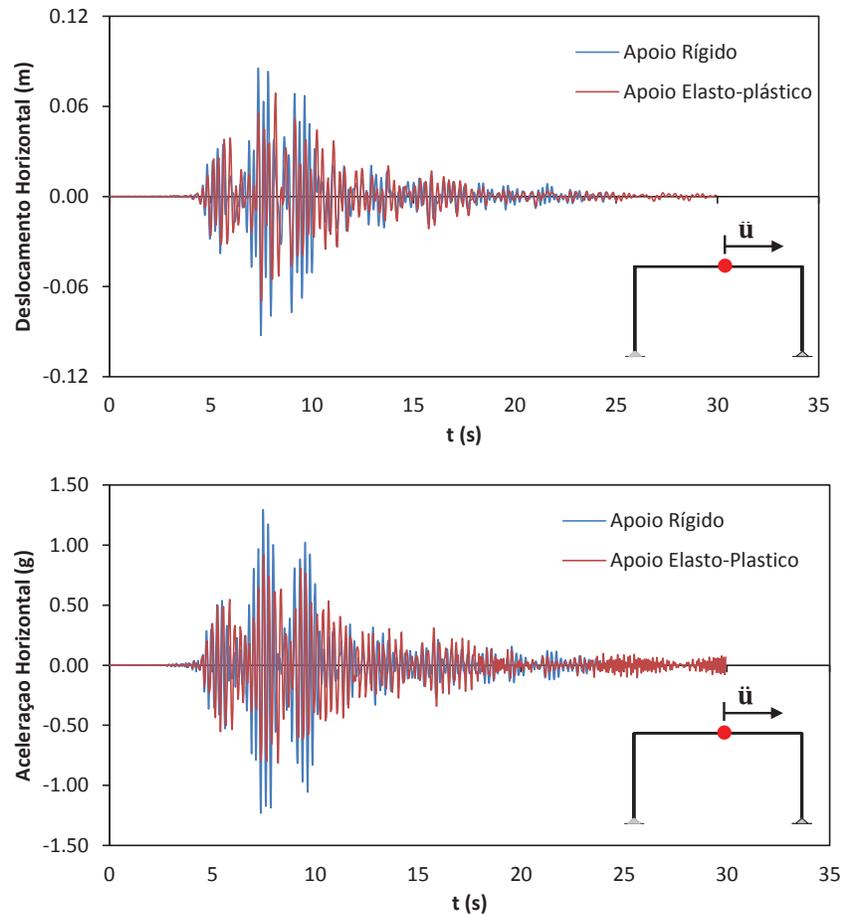


Figura 7.5 – Resposta de deslocamento e aceleração no centro do vão central. Sismo Kobe (1995).

Na Figura 7.6 são apresentadas as respostas no tempo do deslocamento e aceleração horizontal no topo da estrutura PT-1 quando submetida ao sismo real El Centro (1940). Neste caso, há uma diminuição de aproximadamente 10.5% do deslocamento horizontal máximo quando considerada rotação com comportamento elasto-plástico; já a aceleração máxima tem uma redução de 27%, efeito similar ao obtido no caso do sismo Kobe.

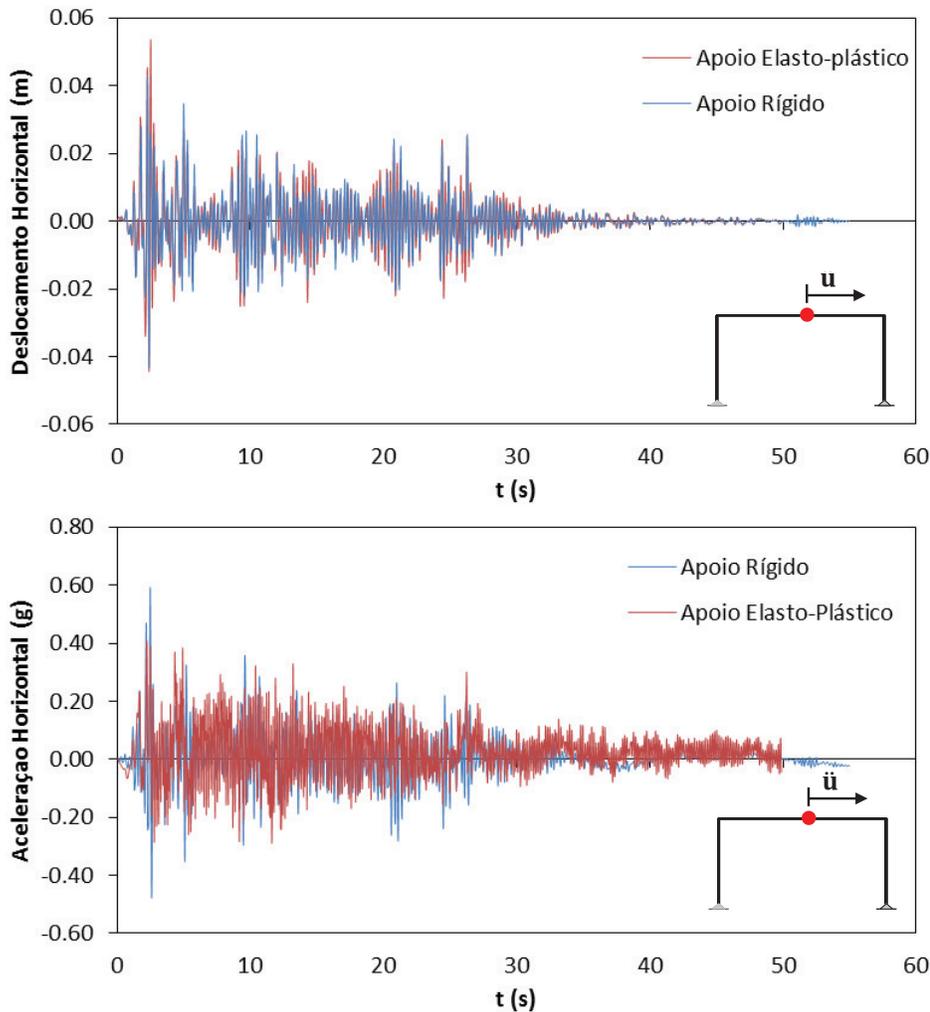


Figura 7.6 – Resposta de deslocamento e aceleração no centro do vão. Sismo El Centro (1940).

Pode ser visto também que o sismo Kobe registra deslocamentos e acelerações horizontais maiores que no caso do Sismo El Centro, sendo o deslocamento horizontal máximo de 0.083m no caso do sismo Kobe e de 0.057m no caso do sismo El Centro. Na Figura 7.7 são mostradas as relações de momento-rotação no apoio direito da estrutura, o qual apresenta as maiores rotações. Pode ser observado que, para ambas as solicitações, há evidência de rotação acumulada.

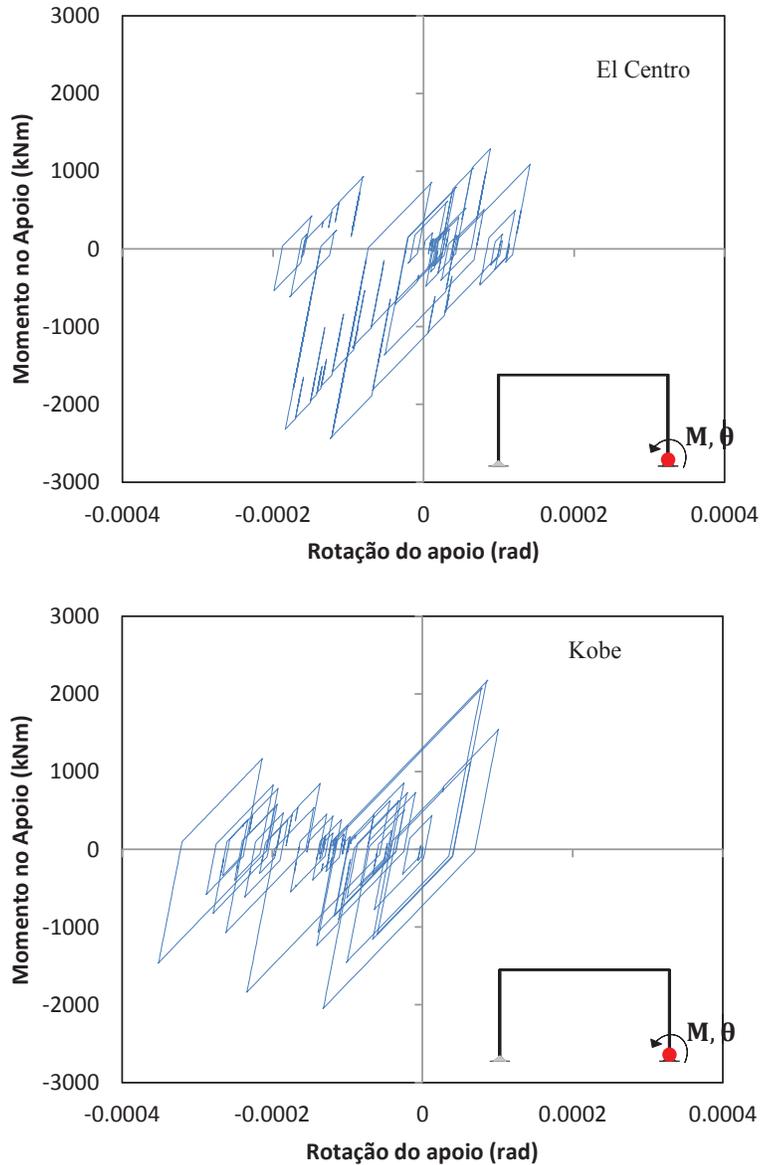


Figura 7.7 – Relação momento-rotação no apoio elasto-plástico.

7.2.2.

Resposta a sismos artificiais com semelhança de potência

Na presente seção é analisada a resposta da estrutura quando submetida a ações sísmicas artificiais apresentadas na seção 7.1, as quais possuem o mesmo conteúdo de frequências que os sismos que originaram estas ações artificiais. São considerados os 10 sismos artificiais definidos na seção 7.1. Na Figura 7.8 são apresentadas as respostas de deslocamento e aceleração horizontal para o sismo artificial SAKB1 ($x_0 = 5$). Novamente verifica-se que a consideração de

flexibilidade modifica a resposta da estrutura. Comparando-se com a Figura 7.5, verifica-se que a resposta no tempo é bastante diferente.

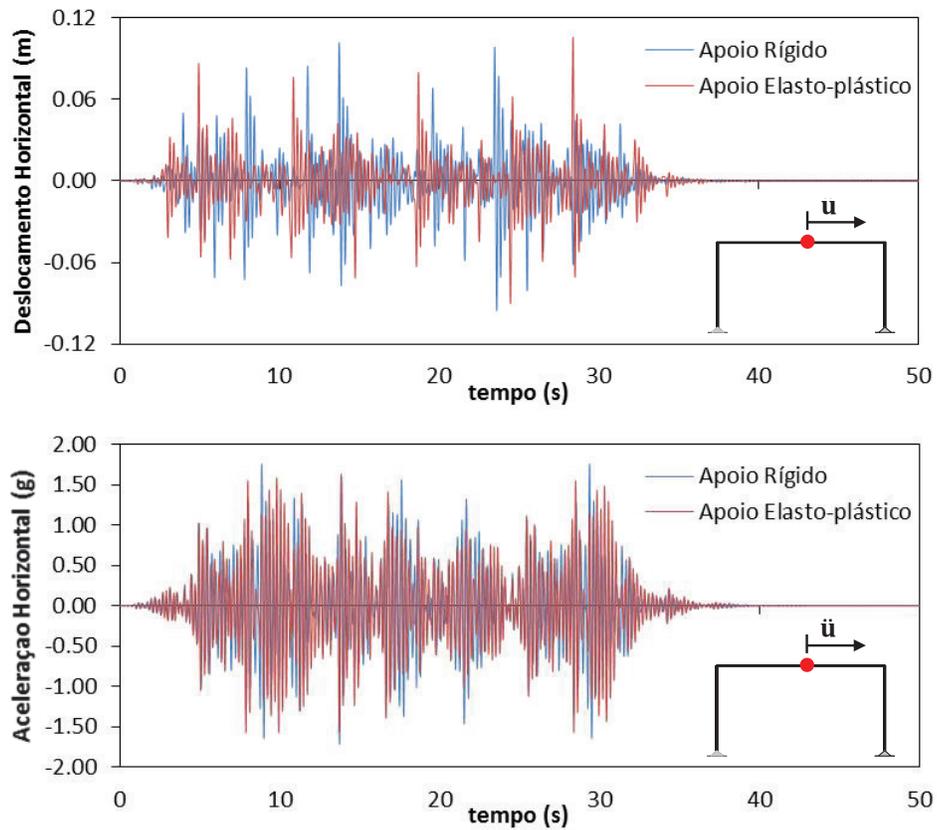


Figura 7.8 – Resposta de deslocamento e aceleração horizontal no topo de PT-1. SAKB1.

Na Figura 7.9 são apresentadas as respostas no tempo do deslocamento horizontal e aceleração horizontal do topo da estrutura PT-1, considerando como ação sísmica o registro gerado artificialmente SAEC1 ($x_0 = 5$). Comparando-se com a Figura 7.6, verifica-se novamente a grande influência da excitação na resposta no tempo.

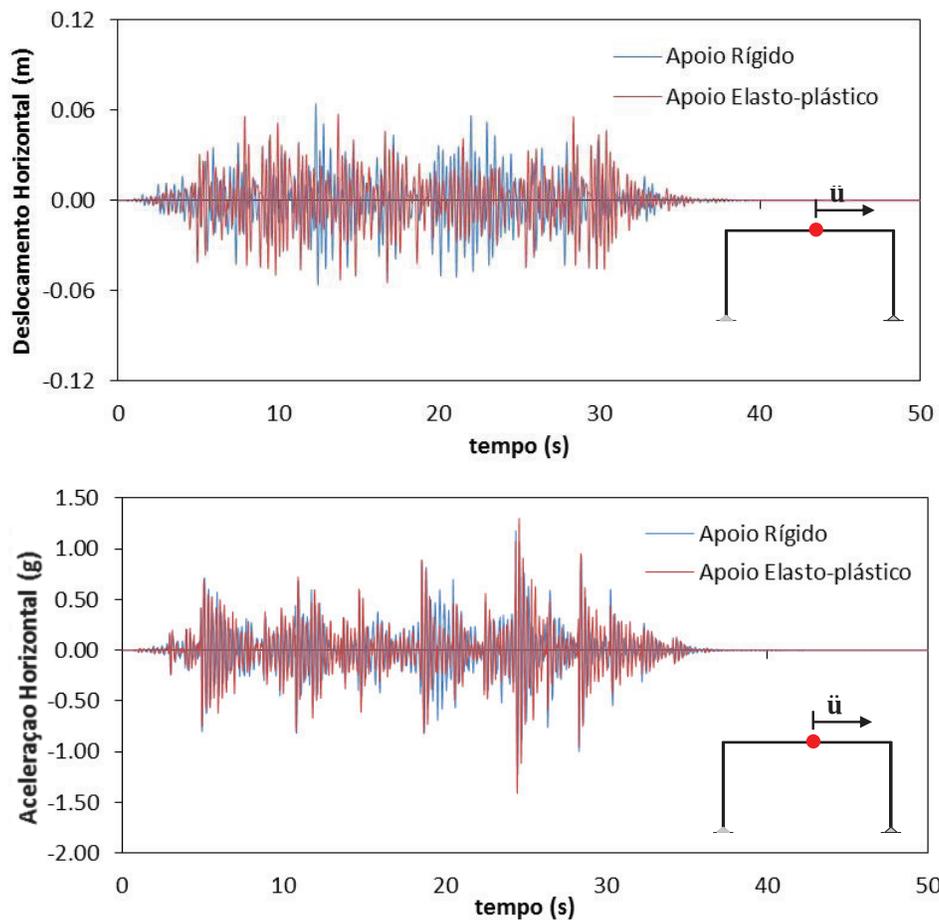


Figura 7.9 – Resposta de deslocamento e aceleração no centro do vão. SAEC1.

A Figura 7.10 mostra a relação momento-rotação no apoio direito (apoio que registrou as máximas rotações). A resposta obtida com o sismo artificial SAEC1 tem uma configuração diferente da resposta obtida com o sismo SAKB1. Enquanto a resposta obtida com SAEC1 tem uma configuração simétrica com respeito à configuração indeformada, a resposta obtida com SAKB1 concentra as deformações rotacionais no lado da rotação negativa. No entanto, ambas as respostas registram uma deformação máxima próxima em ordem de grandeza, sendo de 0.22mrad no caso de SAEC1 e de 0.25mrad no caso do sismo SAKB1. Este processo de plastificação é o responsável pela diminuição das vibrações em virtude da energia dissipada em cada ciclo.

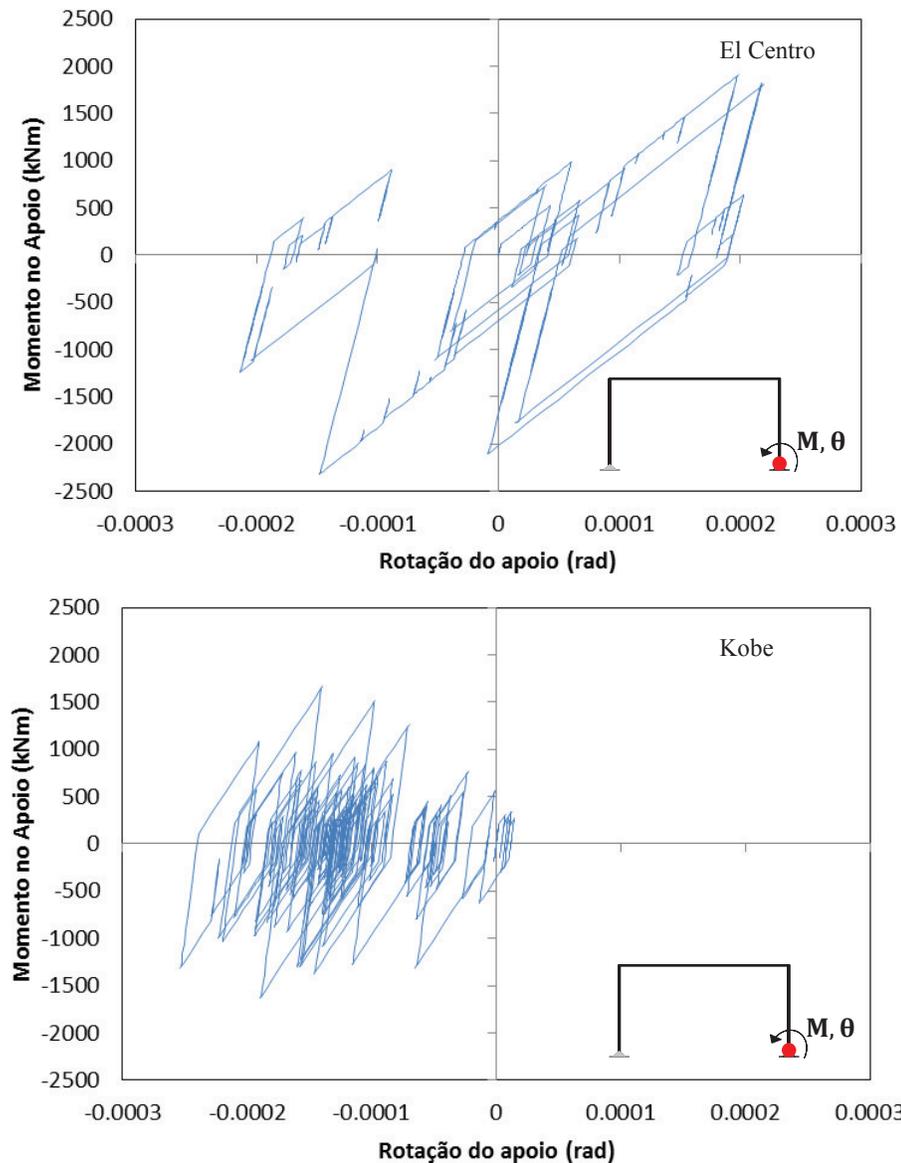


Figura 7.10 – Relação momento rotação no apoio elasto-plástico.

Na Tabela 7-1, são apresentados os valores do deslocamento horizontal máximo e aceleração horizontal máxima na seção central de PT-1, para os sismos El Centro e os cinco sismos artificiais gerados a partir deste. Para os sismos artificiais gerados, o deslocamento horizontal máximo varia de 0.0572m a 0.0755m no caso de apoios rígidos e entre 0.057m e 0.063m para apoios elasto-plásticos. Ambos os valores máximos ocorrem para o sismo artificial SAEC2, sendo 19.8% (apoios rígidos) e 12.7% (apoios elasto-plásticos) maior que os obtidos para o sismo real El Centro. Já no caso das acelerações máximas, nota-se

uma variabilidade maior, com valores de 0.43 a 1.40 vezes a aceleração da gravidade, para o caso de apoios rígidos e de 0.43 a 1.23 vezes a aceleração da gravidade para o caso de apoios flexíveis. As maiores acelerações máximas são registradas, para ambas as condições de apoios, para o sismo artificial SAEC-2, similar ao caso dos deslocamentos. No caso das acelerações, a comparação com a resposta ao sismo real registra uma variação maior que no caso dos deslocamentos, sendo 2.3 vezes para as condições de apoio rígido e 2.85 vezes para apoio flexível. Este comportamento mostra a grande influência no faseamento das frequências presentes em um sismo. Sismos com potência similar podem gerar respostas máximas distintas, apenas mudando o faseamento das frequências. Ou seja, sismos com o mesmo conteúdo de frequências podem levar a respostas completamente distintas, o que enfatiza a dificuldade de definir um sismo de projeto.

Tabela 7-1. Deslocamento e aceleração máxima no topo de PT-1 obtidos com o sismo real e artificiais a partir de El Centro

Sismo	Deslocamento Horizontal Máximo (m)		Aceleração Horizontal Máxima (g)		Amplificação em Aceleração (g/g)	
	Rígido	Elasto-Plástico	Rígido	Elasto-Plástico	Rígido	Elasto-Plástico
El Centro	0.063	0.055	0.6	0.43	1.50	1.08
SAEC1	0.0575	0.0501	1.06	1.06	2.65	2.65
SAEC2	0.0755	0.6274	1.40	1.23	3.50	3.08
SAEC3	0.0573	0.0571	0.43	0.44	1.08	1.10
SAEC4	0.0628	0.0577	0.54	1.08	1.35	2.70
SAEC5	0.0572	0.0573	1.07	1.07	2.68	2.68

Na Tabela 7-2 são apresentados os valores do deslocamento horizontal máximo e aceleração horizontal máxima obtidos da análise do sismo Kobe e dos cinco sismos artificiais gerados a partir deste. Para os sismos artificiais, o deslocamento horizontal máximo varia de 0.075m a 0.101m no caso de apoios rígidos, e de 0.075m a 0.097m para apoios rotacionais elasto-plásticos. Ambos os

valores máximos são registrados para o sismo artificial SAKB1. Já as acelerações máximas estão no intervalo de 1.29g a 1.85g, para o caso de apoios rígidos, e de 0.92g a 1.75g para o caso de apoios flexíveis. Um detalhe a salientar é que estes valores são maiores que os registrados a partir do sismo El Centro, mostrando desta forma que a composição de frequências presentes no sismo Kobe, resulta mais desfavorável para a estrutura.

Tabela 7-2. Deslocamento e aceleração máxima no topo de PT-1 obtidos com o sismo real e artificiais a partir do registro de Kobe

Sismo	Deslocamento Horizontal Máximo (m)		Aceleração Horizontal Máxima (g)		Amplificação em Aceleração (g/g)	
	Rígido	Elasto- Plástico	Rígido	Elasto- Plástico	Rígido	Elasto- Plástico
Kobe	0.088	0.078	1.29	0.93	2.580	1.860
SAKB1	0.101	0.097	1.85	1.75	3.700	3.500
SAKB2	0.075	0.0754	1.23	0.92	2.450	1.840
SAKB3	0.101	0.0921	1.72	1.90	3.448	3.800
SAKB4	0.095	0.093	1.66	1.75	3.320	3.700
SAKB5	0.092	0.0931	1.87	1.8	3.740	3.600

7.2.3.

Resposta a sismo artificial com potência concentrada nas regiões de ressonância

Nesta seção é estudada a resposta do sistema PT-1 considerando sismos artificiais gerados a partir de um espectro que tenha picos de maior potência concentrados nas regiões das frequências naturais de vibração, com o objetivo de estudar a influência do conteúdo de frequências de um sismo quando estas estão próximas às frequências de vibração da estrutura.

7.2.3.1.

Obtenção do espectro de potência

O espectro de potência com concentração de maior intensidade nas regiões de ressonância é obtido a partir da modificação e combinação dos espectros de potência dos sismos reais El Centro e Kobe. São consideradas as duas primeiras

frequências de vibração da estrutura para a determinação das regiões onde será concentrada a maior potência do sismo. Para a obtenção deste espectro segue-se o seguinte processo:

- A. *Concentração na região da primeira frequência de vibração:*** É feita a modificação do espectro de potência dos sismos El Centro e Kobe, deslocando os valores de potência sobre o eixo das frequências para que o pico de potência máximo coincida com a primeira frequência de vibração do pórtico PT-1. O ponto de maior potência do sismo El Centro corresponde a um valor de frequência de 12.87rad/s e, no caso do sismo Kobe, o pico de maior potência corresponde a um valor de frequência de 9.19rad/s (ver Figura 7.1), sendo a primeira frequência natural do Pórtico PT-1 igual a 25.63rad/s. (ver Figura 7.4). Este deslocamento do ponto máximo deixa um espaço em branco nos espectros de potência na faixa de valores de 0rad/s a 12.76 rad/s no sismo El Centro e de 0rad/s a 15.84rad/s no caso do sismo Kobe.
- B. *Preenchimento do espectro modificado:*** Os espaços em branco nos espectros modificados, produto do processo de modificação do passo **A**, são substituídos com os valores de espectro de potência correspondentes às faixas de valores 40-52.76rad/s no sismo El Centro e 40-55.84rad/s no caso do sismo Kobe.
- C. *Concentração de potência na região da segunda frequência natural:*** Com os espectros modificados, após os passos **A** e **B**, é feita a concentração de potência na região da segunda frequência natural do pórtico PT-1, que tem um valor de 57.24rad/s. Para isto é substituída a faixa de valores dos espectros já modificados após os passos **A** e **B** na faixa de valores de frequência de 52.24-62.24rad/s com os valores de frequência localizados na faixa de 21.63-31.63rad/s dos espectros modificados após os passos **A** e **B**, multiplicados por um fator de 0.66 já que este valor de frequência natural corresponde a um modo de vibração com predominância de vibração vertical da estrutura. Desta forma são modificados os espectros de potência de El Centro e Kobe, com potências concentradas nas duas primeiras frequências naturais de vibração do pórtico PT-1.

D. Combinação de espectros modificados e normalização: O último passo é a combinação dos espectros, esta combinação é feita superpondo os valores de potência de ambos os espectros modificados após o passo C com os valores de potência divididos pela metade. Finalmente é feita a normalização do espectro para ter um pico de potência máxima de 0.4 m/s^2 .

Na Figura 7.11 é mostrado o espectro de potência obtido com o processo anteriormente descrito e a curva de ressonância da vibração horizontal do topo de PT-1 quando submetido a uma aceleração harmônica de base com componente horizontal e vertical. Verifica-se a coincidência dos picos do espectro de potência com as duas primeiras regiões de ressonância.

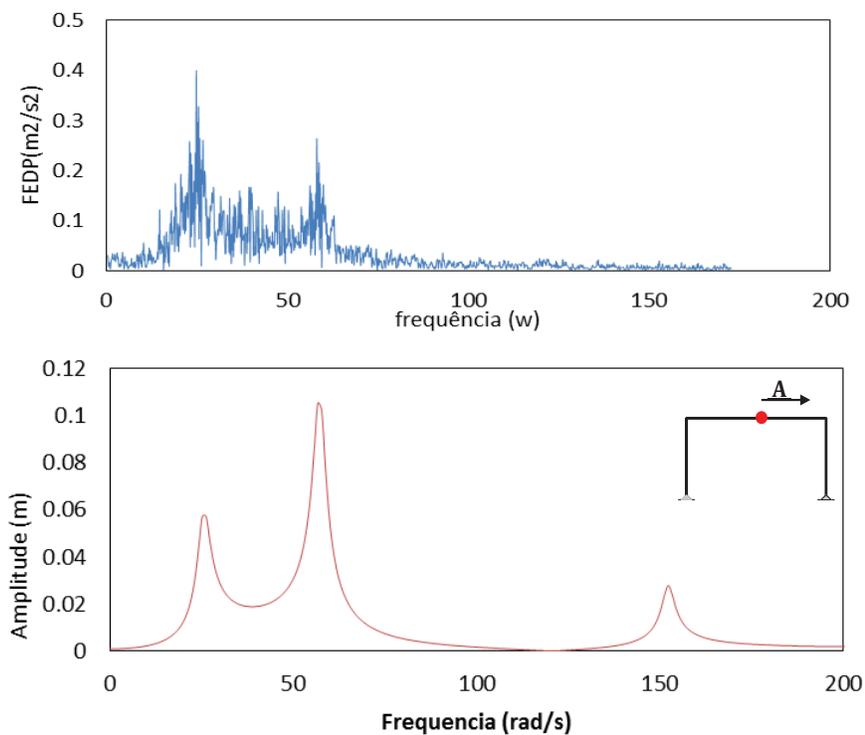


Figura 7.11 – Superior: FDEP com concentração de potência nas regiões de ressonância. Inferior: Amplitude de vibração horizontal no topo de PT-1 sob aceleração harmônica com componente horizontal e vertical.

7.2.3.2.

Resposta a sismos artificiais com potência concentrada na ressonância

São gerados cinco registros de aceleração artificiais usando o espectro de potência obtido na seção anterior (Figura 7.11) e os cinco grupos de ângulos de fase obtidos na seção 7.1.2. Os sismos são identificados com as siglas SAPCP1, SAPCP2, SAPCP3, SAPCP4 e SAPCP5. Estes cinco sismos são normalizados para terem uma aceleração máxima de 0.4g, similar aos sismos obtidos a partir da potência dos sismos reais El Centro e Kobe. Na Figura 7.12 é mostrado o registro de aceleração do sismo gerado artificialmente SAPCP1.

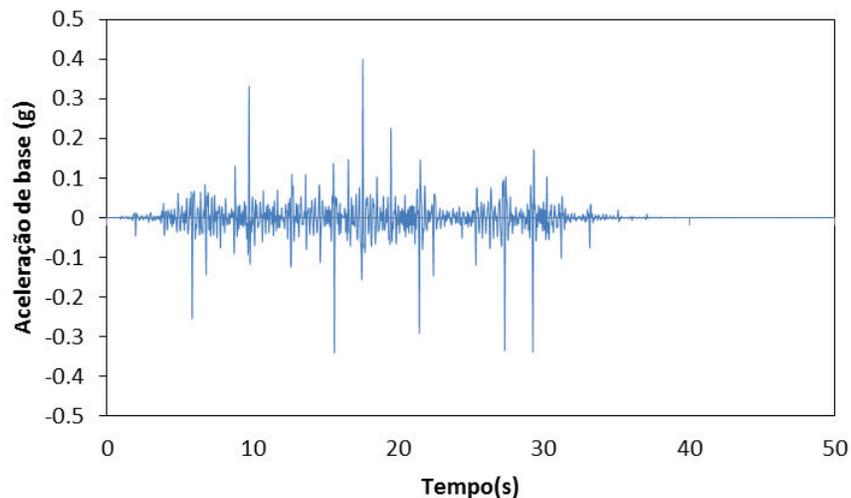


Figura 7.12 – Aceleração do sismo SAPCP1.

Na Figura 7.13 é mostrada a resposta no tempo do deslocamento e aceleração horizontal do topo da estrutura PT-1 submetido ao sismo SAPCP1. É registrado um deslocamento horizontal máximo de 0.133m e uma aceleração máxima de 2.12g. Tanto os deslocamentos horizontais quanto as acelerações horizontais registram valores máximos superiores aos obtidos quando considerados os sismos reais El Centro, Kobe e os sismos artificiais gerados a partir destes, onde o maior valor de deslocamento registrado corresponde a um valor de 0.097m no sismo artificial SAKB1.

Na Tabela 7-3 são mostrados os valores máximos de deslocamento e aceleração máximos para cada sinal, onde pode ser observado que o sismo

SAPCP1 registra os maiores valores de aceleração máxima e deslocamento máximos. Há uma menor variabilidade nas acelerações máximas que nos exemplos anteriores (Tabelas 7-1 e 7-2). Isto indica que, neste caso, a mudança de faseamento tem menor impacto que no caso dos sismos artificiais gerados a partir do sismo Kobe e El Centro.

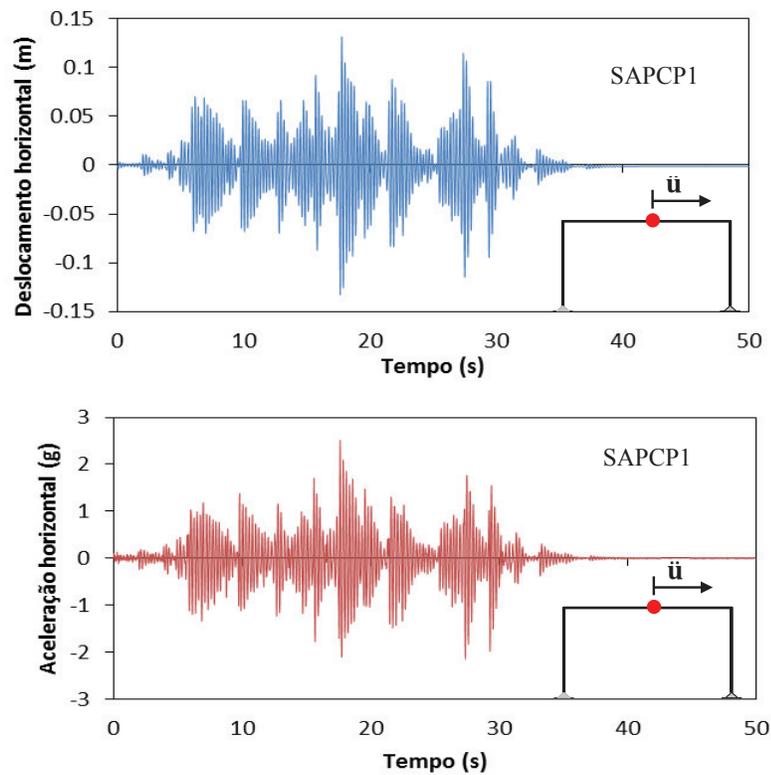


Figura 7.13 – Deslocamento e aceleração horizontal do topo de PT-1 submetido ao sismo artificial SAPCP1.

Tabela 7-3. Deslocamento e aceleração máxima no topo de PT-1

Sismo	Deslocamento Horizontal Máximo (m)	Aceleração Horizontal Máxima (g)	Amplificação em Aceleração (g/g)
	Elasto-Plástico	Elasto-Plástico	Elasto-Plástico
SAPCP1	0.1328	2.12	5.3
SAPCP2	0.1169	2.07	5.1
SAPCP3	0.1112	2.01	5.0
SAPCP4	0.1104	1.98	4.9
SAPCP5	0.1143	2.07	5.1

7.3. Galpão com duas águas:

Nesta seção é estudado um galpão com cobertura a duas águas. As dimensões e propriedades de material são adotadas com base no estudo em frequência realizado no Capítulo 6. O galpão tem pilares de 6.0 metros de altura e vão livre de 10 metros de comprimento, dimensões iguais à estrutura PT-1 e à analisada no item 6.3.1. A altura da cobertura do galpão é fixada em 3 metros (vide Figura 6.11), com base no fato desta geometria apresentar a maior relação $|A_x|_{NL}/|A_x|_L$, sendo $|A_x|_{NL}$ a amplitude de vibração horizontal não linear e $|A_x|_L$ a amplitude de vibração horizontal linear, ambas obtidas na região da primeira frequência de ressonância (modo de deformação lateral), considerando excitação de base horizontal e vertical simultânea (vide Figura 6.16). Adicionalmente, são considerados apoios com molas rotacionais elasto-plásticas, como mostrado na Figura 7.14. A estrutura estudada nesta seção é identificada com a sigla GPD-1.

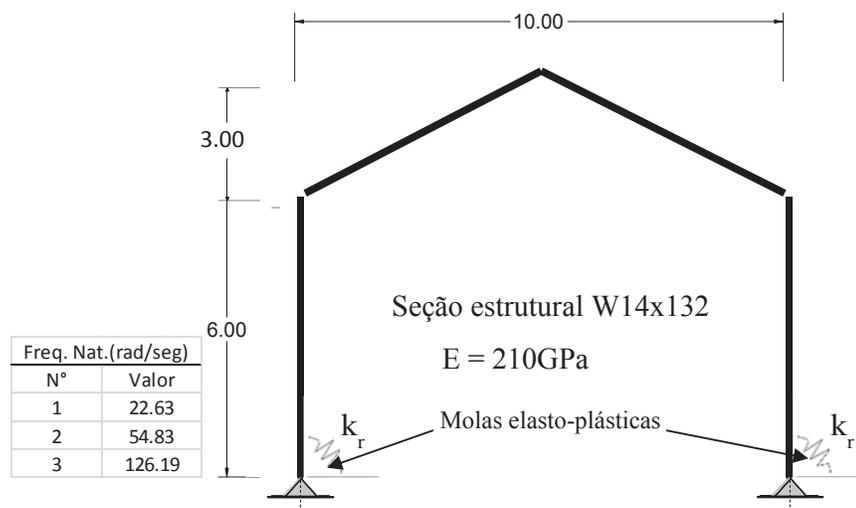


Figura 7.14 – Geometria e propriedades de galpão a duas águas GPD-1. Parâmetros da mola elasto-plástica: $k_r = 5 * 10^{10} Nm/rad$, $k^{ep} = 0.1 * k_r$, $M_p = 10^5 Nm$.

7.3.1. Resposta a sismos reais

Nesta seção é analisada a resposta da estrutura GPD-1 quando submetida a ação dos sismos reais El Centro e Kobe. Na Figura 7.15 é mostrada a variação do deslocamento horizontal do topo da estrutura quando submetido aos sismos El Centro e Kobe. Pode ser observado que o sismo Kobe registra um deslocamento máximo de 0.091m maior que do sismo El Centro, onde o deslocamento horizontal máximo está em torno de 0.0534m, efeito similar ao encontrado para o pórtico PT-1. Neste caso, a diferença entre as respostas dos sismos é maior que no caso do pórtico PT-1, sendo a resposta para Kobe 41% maior do que para o El Centro. Esta diferença é de 28% no caso do pórtico PT-1.

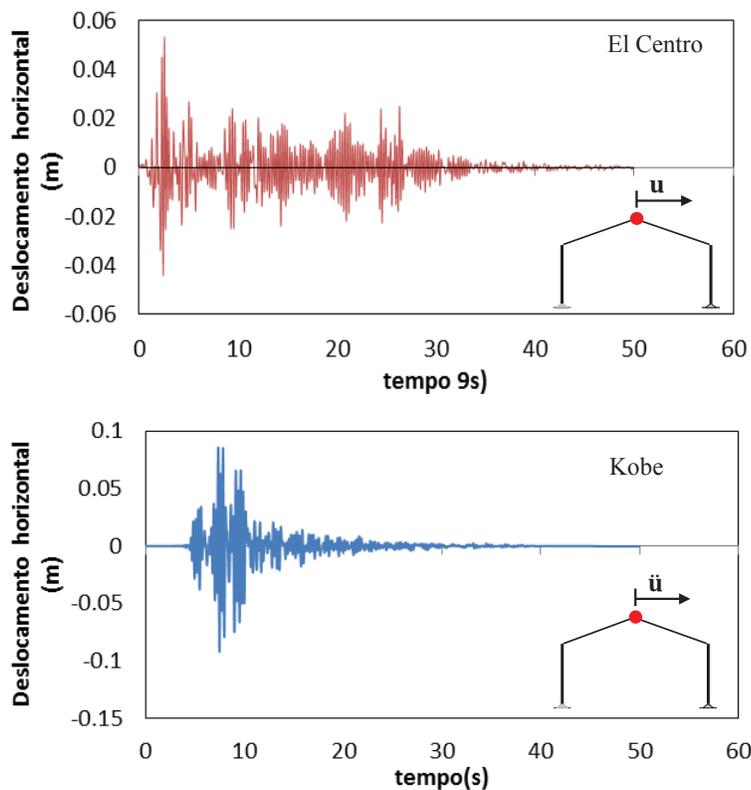


Figura 7.15 – Deslocamento horizontal do meio do vão (topo da estrutura).

Na Figura 7.16 é apresentada a relação momento-rotação no apoio direito, que registrou a maior rotação em ambos os casos. Pode-se notar que o sismo El Centro, leva a uma maior rotação permanente acumulada que o sismo Kobe. No entanto, estas rotações acumuladas permanentes não são refletidas em um

deslocamento residual importante, como pode ser notado na Figura 7.15, onde pode ser visto que o deslocamento tende a zero após o término dos sismos.

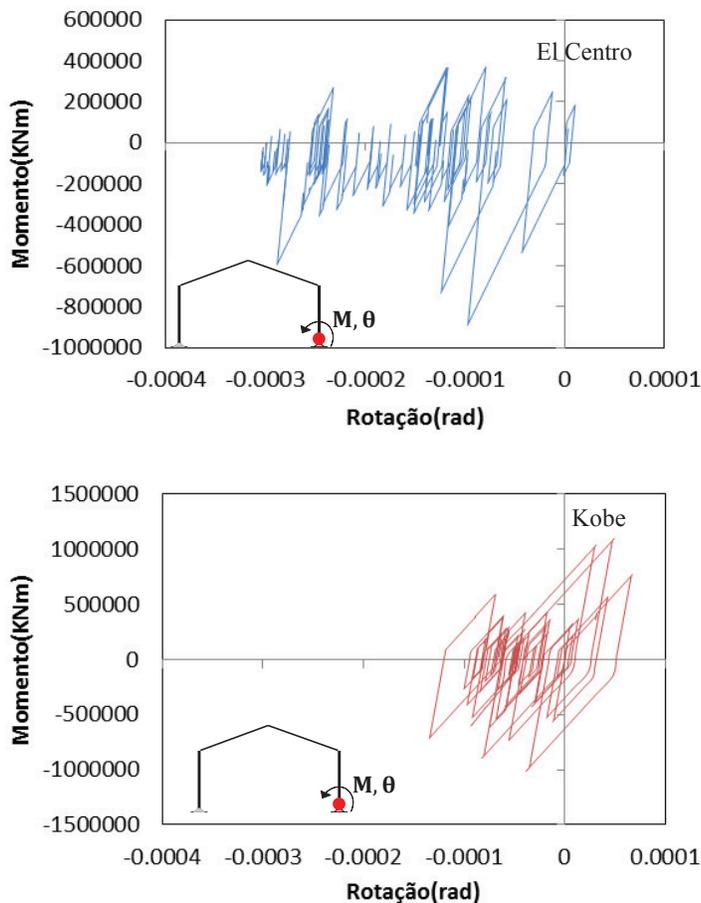


Figura 7.16 –. Relação momento-rotação no apoio elasto-plástico.

7.3.2.

Resposta a sismos artificiais com semelhança de potência

Na presente seção é analisada a resposta da estrutura submetida aos 10 sismos artificiais apresentadas na seção 7.1. Na Figura 7.17 é mostrada a variação do deslocamento horizontal do topo da estrutura, quando submetida aos sismos artificiais SAEC1 e SAKB1. Em ambos os casos são registrados menores deslocamentos máximos que nos seus respectivos sismos de origem. Registra-se um deslocamento máximo de 0.056m para SAKB1, superior ao registrado para SAEC1, que é de 0.043m.

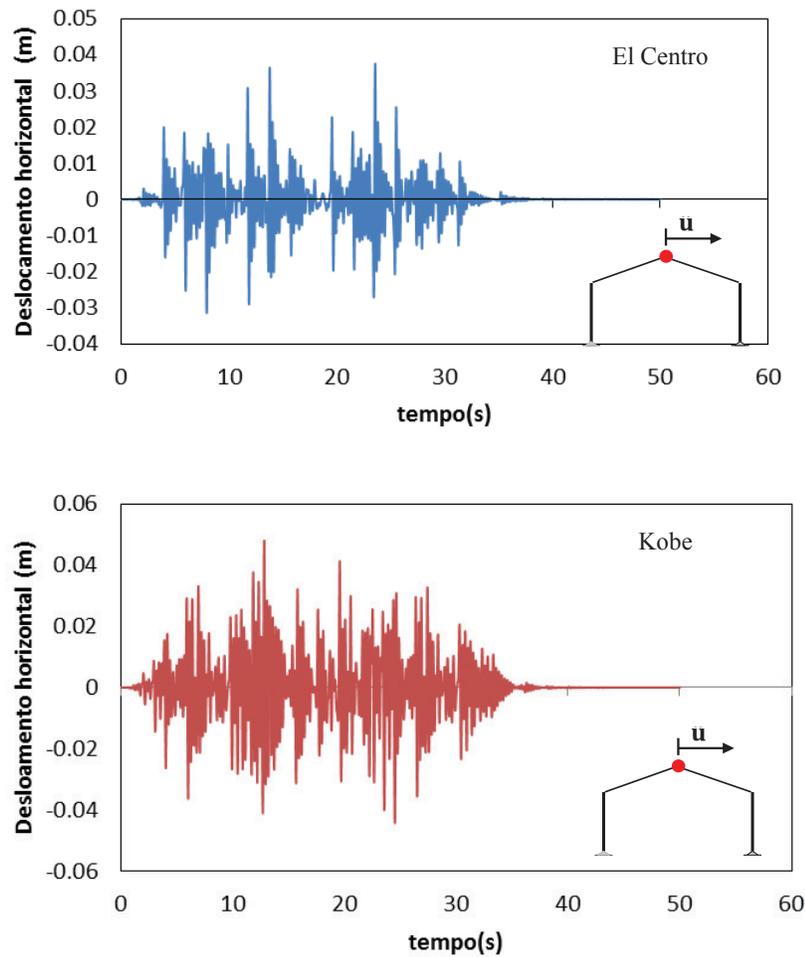


Figura 7.17 – Deslocamento horizontal no meio do vão central.

A Figura 7.18 mostra a relação momento-rotação na base. Pode ser observado que o sismo SAEC1 registra maior acumulação de rotação permanente que o sismo SAKB41. Similar aos sismos de origem, este acúmulo de rotação residual não tem efeito significativo nos deslocamentos finais.

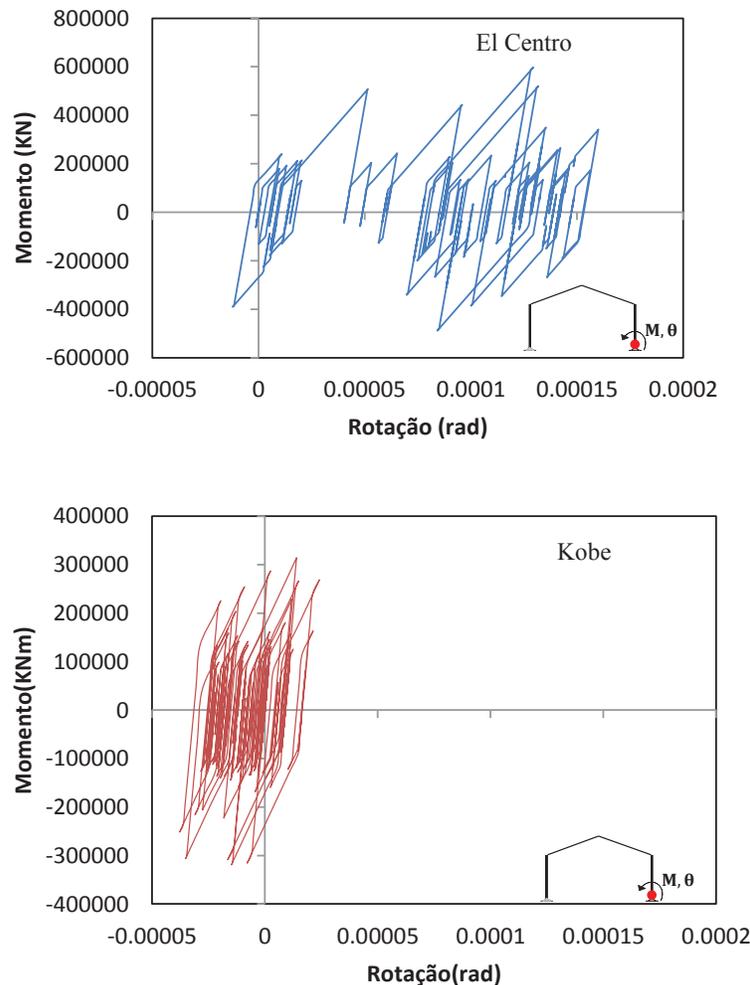


Figura 7.18 – Relação momento rotação no apoio elasto-plástico.

Na Tabela 7-4 é apresentado um resumo dos deslocamentos e acelerações máximas no topo da estrutura GPD-1, considerando o sismo El Centro e os cinco sismos artificiais gerados a partir deste. Os deslocamentos máximos relativos aos sismos artificiais não superam em magnitude o deslocamento máximo registrado com o sismo real, sendo o deslocamento máximo registrado no sismo SAEC1 de 0.0426m e no real de 0.0534m. Já no caso das acelerações máximas, as acelerações obtidas com todos os sismos artificiais são maiores que a registrada para o sismo real. O valor máximo de aceleração ocorre para o sismo SAEC1, com uma magnitude de 0.80g, duas vezes maior a registrada para o sismo real El Centro, onde a aceleração máxima é de 0.40g. A amplificação máxima de aceleração é de 2.0, sendo menor que no caso da estrutura PT-1, onde é de 3.08.

Tabela 7-4. Deslocamento e aceleração máxima no topo de GPD-1 obtidos com o sismo real e sismos artificiais a partir do sismo El Centro

Sismo	Deslocamento	Aceleração Horizontal	Amplificação em
	Horizontal Máximo (m)	Máxima (g)	Aceleração (g/g)
	Elasto-Plástico	Elasto-Plástico	Elasto-Plástico
El Centro	0.0534	0.40	1.00
SAEC1	0.0426	0.80	2.00
SAEC2	0.0371	0.38	0.95
SAEC3	0.0322	0.37	0.93
SAEC4	0.0311	0.80	2.00
SAEC5	0.0341	0.73	1.83

Na Tabela 7-5 é apresentado um resumo dos deslocamentos e acelerações máximas no topo da estrutura GPD-1 considerando o sismo Kobe e os cinco sismos artificiais gerados a partir deste. Os deslocamentos máximos dos sismos artificiais não chegam a superar em magnitude o deslocamento máximo registrado com o sismo real. Como nos sismos gerados a partir do El Centro, o maior deslocamento máximo registrado nos sismos artificiais é de 0.056m para o SAKB1, inferior aos 0.073m obtidos para o sismo real. As acelerações máximas obtidas com todos os sismos artificiais são maiores que as registrada para o sismo real. O maior valor de aceleração registrado no sismo SAEC1 e tem magnitude de 0.82g. Já a aceleração máxima registrada no sismo real é de 0.56g. Tem-se assim uma amplificação máxima de aceleração de 2.05g, e, similar ao sismo El Centro, esta é menor que a registrada na estrutura PT-1, onde é atingida uma amplificação de 3.50g. Fica evidenciada mais uma vez a influência do faseamento dos harmônicos na magnitude dos deslocamentos e acelerações máximas.

Tabela 7-5. Deslocamento e aceleração máxima no topo de GPD-1 obtidos com o sismo real e sismos artificiais a partir do sismo Kobe

Sismo	Deslocamento Horizontal Máximo (m)	Aceleração Horizontal Máxima (g)	Amplificação em Aceleração (g/g)
	Elasto-Plástico	Elasto-Plástico	Elasto-Plástico
Kobe*	0.073	0.56	1.40
SAKB1	0.056	0.82	2.05
SAKB2	0.054	0.59	1.48
SAKB3	0.053	0.59	1.48
SAKB4	0.054	0.74	1.85
SAKB5	0.048	0.80	2.00

* Normalizado a uma aceleração máxima de 0.4 g

7.3.3.

Resposta a sismos artificiais com potência concentrada nas regiões de ressonância

Nesta seção é estudada a resposta do sistema GPD-1 considerando sismos artificiais gerados a partir de um espectro que tenha picos de maior potência concentrados nas regiões das duas primeiras frequências naturais de vibração com o objetivo de avaliar a influência do conteúdo de frequências presentes no sismo.

Na Figura 7.19 é mostrado o espectro de potência com regiões de concentração de potência juntamente com a curva de ressonância da GPD-1, onde pode ser verificada a coincidência dos picos de máxima potência do espectro de potência com as duas primeiras regiões de ressonância.

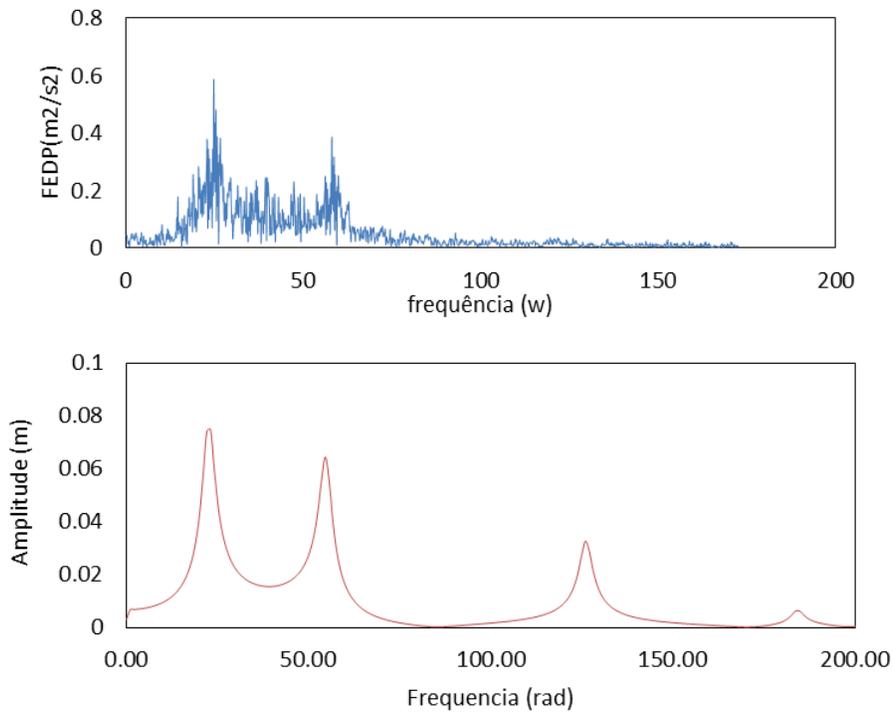


Figura 7.19 – Superior: FDEP com concentração de potência nas regiões de ressonância. Inferior: Amplitude de vibração horizontal no topo de PT-1 sob carga harmônica com aceleração horizontal e vertical.

São gerados cinco registros de aceleração artificiais usando o espectro de potência mostrado na Figura 7.20 e os cinco grupos de ângulos de fase obtidos na seção 7.1.2. Os sismos são identificados pelas siglas SAPCG1, SAPCG2, SAPCG3, SAPCG4 e SAPCG5. Como nos casos anteriores, estes cinco sismos são normalizados para terem uma aceleração máxima de 0.4g. Na Figura 7.20 é mostrado o registro de aceleração do sismo SAPCG1.

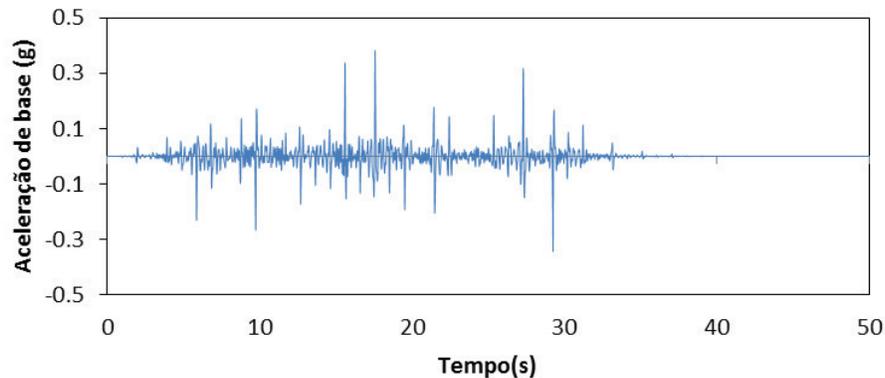


Figura 7.20 – Aceleração do sismo SAPCG1.

Na Figura 7.21 é mostrada a resposta no tempo do deslocamento e aceleração horizontal do topo da estrutura GPD-1 submetido ao sismo SAPCG1, sendo possível notar um deslocamento horizontal máximo de 0.126m e uma aceleração máxima de 1.39g. Tanto os deslocamentos horizontais quanto as acelerações horizontais registram valores máximos superiores aos obtidos quando considerados os sismos reais El Centro, Kobe e os sismos artificiais gerados a partir destes, onde o maior valor de deslocamento registrado corresponde a um valor de 0.056m no sismo artificial SAKB1.

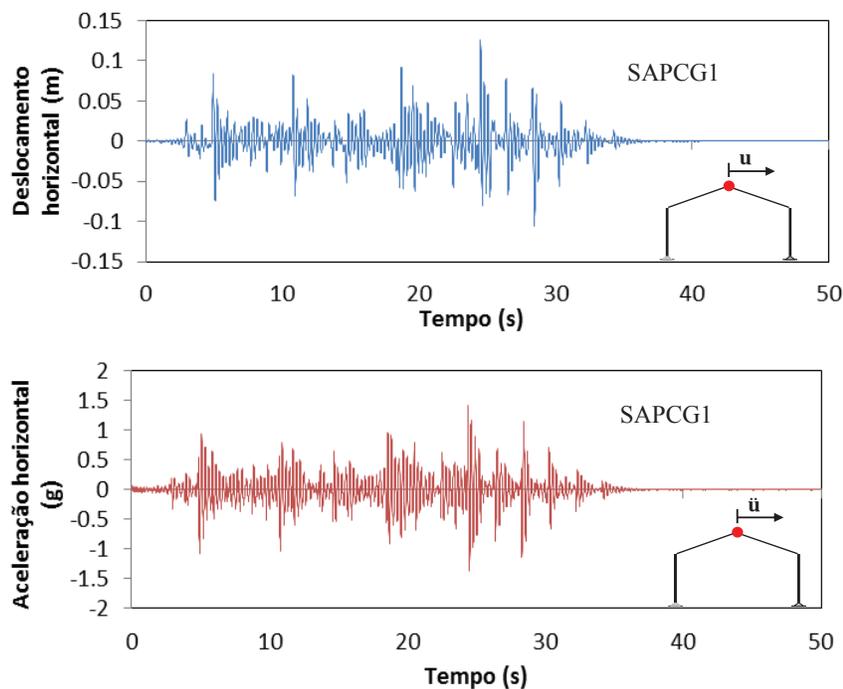


Figura 7.21 – Deslocamento e aceleração horizontal do topo de GPD-1 submetido ao sismo artificial SAPCG1.

Na Tabela 7-6 são mostrados os valores máximos de deslocamento e aceleração para este caso. Pode ser observado que o sismo SAPCG1 registra o maior valor de deslocamento máximo; já a maior aceleração é registrada para o sismo SAPCG2, com um valor de 1.88g. É importante salientar que, similar ao pórtico PT-1, há um aumento significativo de aceleração e deslocamento máximo quando se compara com os calculados para os sismos El Centro, Kobe e os sismos

artificiais gerados a partir destes, onde o maior deslocamento registrado foi de 0.056m no sismo SAKB1 e aceleração de 0.81g no mesmo sismo.

Tabela 7-6. Deslocamento e aceleração máxima no topo de GPD-1 obtidos com potências concentradas

Sismo	Deslocamento Horizontal Máximo (m)	Aceleração Horizontal Máxima (g)	Amplificação em Aceleração (g/g)
	Elasto-Plástico	Elasto-Plástico	Elasto-Plástico
SAPCG1	0.1256	1.40	3.5
SAPCG2	0.1238	1.34	3.35
SAPCG3	0.0989	1.02	2.55
SACPG4	0.1090	1.26	3.15
SAPCG5	0.1182	1.88	4.7

A partir das Tabelas 7-1, 7-2, 7-4 e 7-5 pode-se observar a importância da distribuição de frequências em um evento sísmico. Esta importância é ainda mais evidenciada observando as Tabelas 7-3 e 7-6, onde as respostas de deslocamento e aceleração em ambos os casos são maiores que as mostradas nas Tabelas 7-1, 7-2 e 7-4, 7-5, respectivamente. O procedimento proposto neste Capítulo para gerar um sismo de projeto resguarda o caráter aleatório do evento e as características dos sismos disponíveis para um dado sítio, mas leva em conta o espectro de frequências da estrutura, sendo, pois, a favor da segurança. Este processo, acompanhado de um estudo estatístico, pode ser, portanto, adotado como uma metodologia de projeto segura.

7.4. Galpão Cobertura em Arco

Nesta seção é estudada uma estrutura de pórtico galpão com cobertura em arco circular. As dimensões dos pilares e do vão livre são iguais às das estruturas PT-1 e GPD-1, como mostra a Figura 7.22. A altura da cobertura do galpão é fixada em 3.0 m, que apresenta maior relação $|A_x|_{NL}/|A_x|_L$ monitoradas na região da primeira frequência de ressonância no estudo em frequência realizado na seção 6.3.2.3 (vide Figura 6.22). Adicionalmente são considerados apoios com molas

rotacionais elasto-plásticas, como mostrado na Figura 7.22. A estrutura é identificada com a sigla GPA-1.

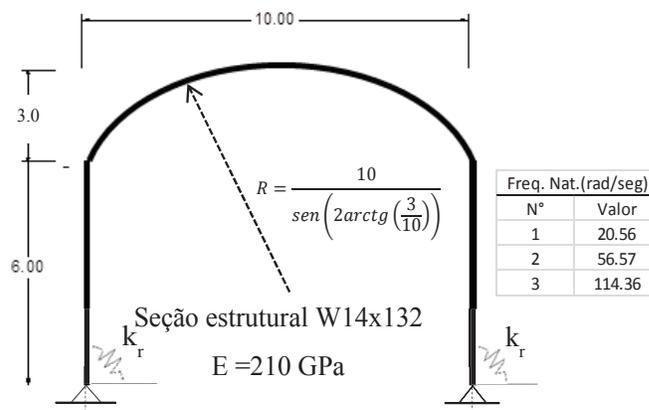


Figura 7.22 – Geometria e parâmetros de galpão a duas águas GPA-1. Parâmetros da mola elasto-plástica: $k_r = 5 * 10^{10} \text{Nm/rad}$, $k^{ep} = 0.1 * k_r$, $M_p = 10^5 \text{Nm}$.

7.4.1.

Respostas máximas em sismos reais e artificiais gerados a partir de potências dos sismos reais

Na Tabela 7-7 é apresentado o resumo dos deslocamentos e acelerações máximas no topo da estrutura GPA-1, registradas considerando o sismo Kobe e os cinco sismos artificiais gerados a partir deste.

Tabela 7-7. Deslocamento e aceleração máxima no topo de GPA-1 obtidos com sismos reais e artificiais a partir do sismo Kobe

Sismo	Deslocamento Horizontal Máximo (m)	Aceleração Horizontal Máxima (g)	Amplificação em Aceleração (g/g)
	Elasto-Plástico	Elasto-Plástico	Elasto-Plástico
Kobe*	0.087	0.88	1.58
SAKB1	0.065	0.63	1.43
SAKB2	0.065	0.57	1.28
SAKB3	0.058	0.51	1.35
SAKB4	0.061	0.54	1.28
SAKB5	0.055	0.51	1.58

* Normalizado a uma aceleração máxima de 0.4 g

Finalmente, na Tabela 7-8 é apresentado o resumo dos deslocamentos e acelerações máximas no topo da estrutura GPA-1, registradas considerando o sismo El Centro e os cinco sismos artificiais gerados a partir deste.

Tabela 7-8. Deslocamento e aceleração máxima no topo de GPA-1 obtidos com o sismo real e artificiais a partir do sismo El Centro

Sismo	Deslocamento Horizontal Máximo (m)	Aceleração Horizontal Máxima (g)	Amplificação em Aceleração (g/g)
	Elasto-Plástico	Elasto-Plástico	Elasto-Plástico
El Centro	0.0673	1.06	2.65
SAEC1	0.0581	0.57	1.43
SAEC2	0.0489	0.47	1.18
SAEC3	0.0392	0.43	1.08
SAEC4	0.0401	0.43	1.08
SAEC5	0.0489	0.44	1.10

Nas Tabelas 7-7 e 7-8 pode-se notar que o galpão em arco registra maiores deslocamentos horizontais máximos e maiores acelerações máximas que os registrados para o galpão em duas águas GPD-1, tendo ambos a mesma altura de cobertura e sendo submetidos às mesmas solicitações sísmicas, mostrando assim a influência da geometria da cobertura na resposta da estrutura.

7.4.2.

Resposta a sismos artificiais com potência concentrada nas regiões de ressonância.

Nesta seção é estudada a resposta do sistema GPA-1 considerando sismos com picos de maior potência concentrados nas regiões das duas primeiras frequências naturais de vibração. Na Figura 7.23 é mostrado o espectro de potência obtido para este caso.

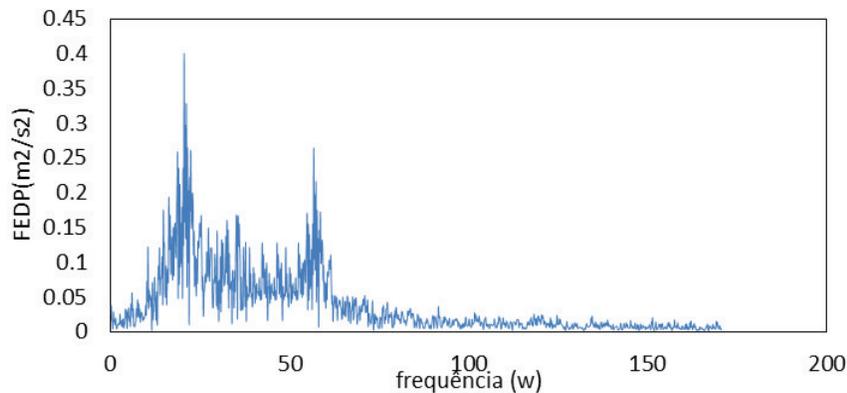


Figura 7.23 – Superior: FDEP com concentração de potência nas regiões de ressonância.

São gerados cinco registros identificados com as siglas SAPCGA1, SAPCGA2, SAPCGA3, SAPCGA4 e, SAPCGA5 adotando os cinco grupos de ângulos de fase obtidos na seção 7.1.2. Os sismos são normalizados para terem uma aceleração máxima de 0.4g. Na Tabela 7-9 são mostrados os valores máximos de deslocamento e aceleração registrados nos sismos artificiais mencionados. Pode-se notar que o sismo SAPGA1 provoca os valores máximos de deslocamento horizontal e aceleração horizontal com valores de 0.15m e 1.78g, respectivamente.

Tabela 7-9. Deslocamento e aceleração máxima no topo de GPD-1 obtidos com potências concentradas

Sismo	Deslocamento Horizontal Máximo (m)	Aceleração Horizontal Máxima (g)	Amplificação em Aceleração (g/g)
	Elasto-Plástico	Elasto-Plástico	Elasto-Plástico
SAPCGA1	0.151	1.78	4.45
SAPCGA2	0.144	1.70	4.25
SAPCGA3	0.119	1.75	4.38
SAPCGA4	0.145	1.72	4.30
SAPCGA5	0.131	1.74	4.35

Cabe salientar que esta estrutura experimenta maiores deslocamentos horizontais se comparados com as respostas obtidas para o galpão GPD-1, sendo

que as estruturas são diferenciadas apenas na configuração geométrica da cobertura.

7.4.3.

Resposta a ações sísmicas múltiplas

Eventos sísmicos sucessivos têm sido registrados com frequência. Isto leva muitas vezes ao colapso da estrutura em virtude de danos acumulados. Na presente seção é estudada a resposta do galpão GPA-1 quando submetido à ação de sismos que acontecem de forma sucessiva. O segundo evento sísmico tem início após a estabilização da resposta do primeiro evento sísmico. Adicionalmente é considerada uma redução da rigidez elasto-plástica da rotação nos apoios para aumentar o efeito de deslocamentos residuais. Portanto, nos exemplos realizados nesta seção é considerado $k^{ep} = 0.001 * k_r$.

Na Figura 7.24 é apresentada a variação do deslocamento horizontal no topo do galpão GPA-1 quando submetido à repetição dos sismos El Centro e Kobe. Pode ser observado que o sismo Kobe registra um deslocamento residual de 0.0009m, maior que o registrado para o sismo El Centro, que é 0.0002m no fim do primeiro evento sísmico. Em ambos os casos, o segundo evento sísmico registra uma diminuição do deslocamento horizontal residual após o término do evento sísmico, indicando uma acumulação de deformação plástica de sinal contrário ao da deformação acumulada no primeiro evento.

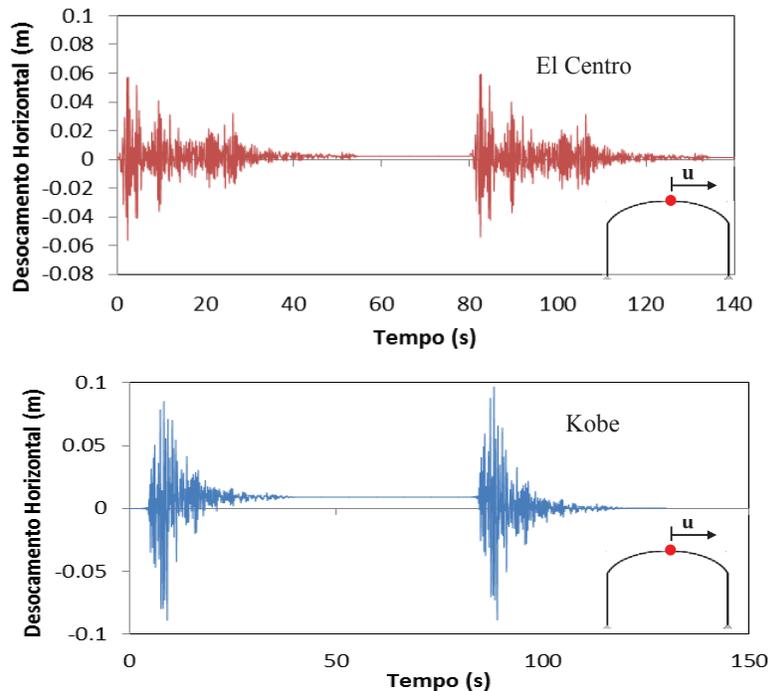


Figura 7.24 – Deslocamento horizontal no meio do no topo de GPA-1, com sismo replicado.

No caso da repetição do sismo El Centro, nota-se que o deslocamento horizontal máximo registrado no segundo evento tem um valor de 0.059m ligeiramente maior ao registrado no primeiro evento, o qual tem um valor de 0.057m. No caso da repetição do sismo Kobe, o segundo evento também registra um aumento do valor do deslocamento máximo, sendo de 0.089m no primeiro evento e de 0.097m no segundo. Já no caso das acelerações horizontais máximas, na repetição do sismo El Centro, as acelerações máximas registram valores muito próximos nos dois eventos, sendo de 0.965g a aceleração máxima do primeiro evento sísmico, e de 0.967g no segundo. No caso da repetição do sismo Kobe, há uma diminuição da aceleração máxima, sendo de 1.067g no primeiro evento, e de 0.896g no segundo.

Na Figura 7.25 são mostrados os deslocamentos horizontais no topo da estrutura GPA-1 considerando a ocorrência sucessiva dos sismos El Centro e Kobe. É considerada também alternância na ordem de ocorrência dos sismos, ou seja, para um caso, o sismo Kobe é sucedido pelo sismo El Centro, e vice-versa para o segundo caso.

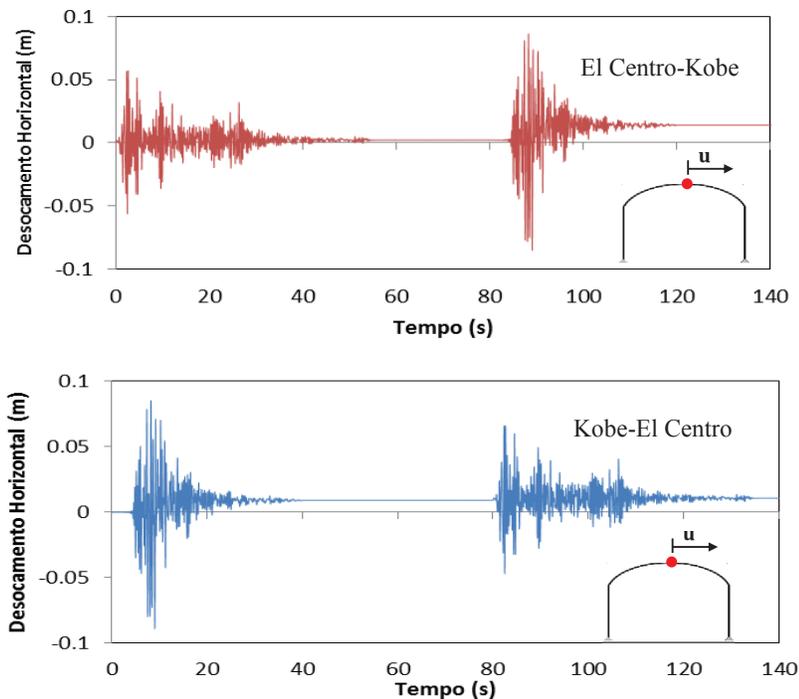


Figura 7.25 – Deslocamento horizontal no meio do no topo de GPA-1, sismos sucessivos alternados.

Em ambos os casos, a sucessão de sismos produz um aumento do deslocamento residual acumulado do primeiro para o segundo evento sísmico, sendo a ocorrência com ordem El Centro – Kobe a que registra o maior aumento; de 0.0022m no fim do primeiro evento para 0.0141m no final do segundo evento sísmico.

No caso do sismo El Centro sucedido pelo sismo Kobe, é observado que há um aumento do deslocamento horizontal máximo no segundo evento, passando de um valor de 0.057m no primeiro evento para um valor de 0.086m no segundo. No caso do sismo Kobe sucedido do sismo El Centro, nota-se que há uma diminuição do valor do deslocamento máximo de 0.089m no primeiro evento para 0.066m no segundo. A aceleração horizontal máxima no caso da sucessão de sismos El Centro – Kobe registra um importante aumento de 0.965g no primeiro evento para 1.98g no segundo. No caso da sucessão de sismos Kobe - El Centro a aceleração máxima registra uma leve diminuição de 1.07g no primeiro evento, para 0.98g no segundo.

Verifica-se que o estudo de sismos sucessivos é importante no caso de acúmulo de danos, podendo levar a um colapso progressivo da estrutura.

8 Conclusões e Sugestões

8.1. Conclusões

São resumidas neste item as conclusões e observações mais importantes obtidas através do desenvolvimento da presente tese.

Do estudo dos métodos de integração no tempo observa-se que:

- Os métodos de integração de equações diferenciais de Runge-Kutta explícitos demonstram ser, no cálculo da resposta dinâmica linear de uma estrutura para um mesmo incremento de tempo, mais rápidos que o método de Newmark, porém, apresentam sérios problemas de estabilidade levando à necessidade de usar incrementos de tempo muito pequenos, aumentando consideravelmente o esforço computacional total. No entanto, não apresentam problemas de dissipação numérica como o algoritmo de Newmark.

Do estudo sobre a inclusão de uma base flexível:

- A consideração da flexibilidade dos apoios através de elementos unidimensionais com comportamento linear modifica a resposta das estruturas devido a redução da rigidez global do sistema, evidenciado na diminuição das frequências de vibração natural e no aumento das amplitudes de vibração máxima.
- A consideração de comportamento elasto-plástico nas molas evidencia um efeito de dissipação de energia, manifestado na redução do valor dos deslocamentos e acelerações máximos na maioria dos exemplos realizados. Além disto, há uma mudança substancial da resposta no tempo e a ocorrência de deslocamentos residuais, elevando o risco de dano perante novas solicitações.

Da análise em frequência:

- A técnica do MBH-Galerkin, apresentada e implementada na presente tese, apresenta-se como uma ferramenta eficiente para a análise não linear em frequência de estruturas reticulares que consideram não linearidade geométrica, sendo, na obtenção de curvas de ressonância, mais rápidas que as técnicas de análise no tempo, e capazes de representar a resposta em frequência de forma coerente com o tipo de não linearidade geométrica, inclusive nas regiões com múltiplas posições de equilíbrio estáveis e instáveis.
- A técnica de continuação permite ultrapassar pontos limites, associados a bifurcações sela-nó, e assim obter trechos estáveis e instáveis das curvas de ressonância.
- No estudo em frequência das estruturas tipo galpão simétrico, verifica-se que, para os exemplos estudados na presente tese, acelerações horizontais e verticais excitam diferentes modos de vibração. Acelerações com ambas as componentes excitam todos os modos. A não linearidade geométrica tem um efeito evidente na região primeira e segunda região de ressonância, mostrando um comportamento com ganho de rigidez nos casos de aceleração horizontal e mista, quando a não linearidade cúbica predomina, e de perda de rigidez no caso de aceleração vertical, quando domina a não linearidade quadrática fruto da interação entre deslocamentos axiais e laterais.

Da análise sísmica de estruturas esbeltas:

- O emprego de sismos artificiais gerados a partir de FDEP de sismos reais mostra a influência da distribuição de potência e do faseamento de harmônicos na resposta das estruturas estudadas, evidenciando que uma mudança de faseamento pode aumentar ou diminuir a magnitude dos deslocamentos e acelerações.

- A consideração de uma excitação sísmica com distribuição de frequências que apresenta picos ou regiões de concentração de potência próximas às frequências naturais das estruturas estudadas aumenta consideravelmente a magnitude da resposta em deslocamentos e acelerações na estrutura. Este procedimento está a favor da segurança e seu uso, juntamente com um tratamento estatístico das respostas, pode levar a um procedimento de cálculo eficiente e seguro.
- A consideração da ação de dois sismos reais sucessivos mostrou os efeitos potencialmente nocivos que pode sofrer uma estrutura, evidenciado no exemplo da sucessão de sismos EL Centro-Kobe, onde houve um importante aumento da aceleração sísmica máxima, deslocamento máximo e deformações residuais, efeitos que podem resultar perigosos para a integridade estrutural.

8.2. Sugestões para Trabalhos Futuros

A fim de dar continuidade ao tema de pesquisa apresentado na presente tese, são apresentadas as seguintes sugestões:

- Estudar técnicas e algoritmos de integração no tempo com conservação de energia.
- Implementar modelos de simulação de comportamento de base flexível composta por solo através de elementos discretos que levem em consideração amolecimento, dano e/ou rigidez complexa.
- Aprofundar o desenvolvimento dos algoritmos para análise não linear em frequência com a finalidade de detectar bifurcações dinâmicas e seguir ramos estáveis e instáveis após estas bifurcações, usando elementos finitos.
- Realizar o estudo considerando outros tipos de amortecimentos proporcionais e não proporcionais, tais como amortecimentos históricos.

- Estudar outros modelos estruturais com maior proximidade entre as frequências de ressonância para a avaliação do efeito da interação modal.
- Estudar o efeito da presença de ligações semirrígidas presentes nos sistemas estruturais metálicos.
- Aprofundar o estudo da sucessão de eventos sísmicos analisando mais casos de combinação de ações sísmicas e considerando a possibilidade de colapso progressivo.

9

Referências Bibliográficas

ABDELNABY, A.E. **Multiple earthquake effects on degrading reinforced concrete structures**. Illinois, 2012. Ph.D. Dissertation – Graduate College/University of Illinois.

ALMEIDA, A.A.D. **Análise Probabilística de Segurança Sísmica de Sistemas e Componentes Estruturais**. Rio de Janeiro, 2002. Tese de Doutorado – Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

ALSALEH, H.; SHAHROUR, I. **Influence of plasticity on the seismic soil–micropiles– structure interaction**. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, v. 29, Elsevier Ltd., p. 574-578, 2009

ALVES, R.V. **Formulação para análise não-linear geométrica em referencial Lagrangiano total**. Rio de Janeiro, 1993. 1o Seminário de Doutorado – COPPE/UFRJ.

ALVES, R.V.b; **Formulação para análise não-linear geométrica em referencial Lagrangiano atualizado**. Rio de Janeiro, 1993. 2o Seminário de Doutorado – COPPE/UFRJ.

ANDRADE, E.Q. **Instabilidade e Vibrações de Colunas Esbeltas sobre Base Elástica**. Rio de Janeiro, 1993. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

ARISTIZÁBAL-OCHOA, J. D. **Estructura de vigas sobre suelos elásticos de rigidez variable**. Revista Internacional de Desastres Naturales, Accidentes e Infraestructura Civil, v. 3, n. 2, p. 157-174, 2003.

BATHE, K. J. **Finite Element Procedure for Solids and Structures**. New Jersey: Prentice-Hall, 1996.

BELYTSCHKO, T.; E-HSIEH, B.J. **Nonlinear transient analysis of shells and solids of revolution by convected elements**. International Journal of Numerical Methods in Engineering, vol. 7, pp. 255-271, 1983.

BRIGHAM, O. **The fast Fourier transform**. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, Inc., 252p, 1974.

BREBBIA, C.A.; E FERRANTE, A.J. **Computational Methods for the Solution of Engineering Problem**. John Wiley and Sons Ltd, 1986.

BULL, J.W. **Soil structure interaction: Numerical analysis and modeling**. USA: E & F Spon, 727p, 1994.

BUTCHER, J. C. **Numerical methods for ordinary differential equations**, 2nd ed. New York : John Wiley & Sons Ltd., p. 137-313, 2008.

CARRERA, E. **A study on arc-length type methods and their operation failures illustrated by a simple model**. Computer and Structures, vol. 50, n. 2, p. 217-229. 1994.

CARVALHO, J.V. **Análise de Problemas Tridimensionais Solo-Estrutura pelo Método dos Elementos Finitos no Domínio de Fourier**. Rio de Janeiro, 2001. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

CHAN, S.L.; E CHUI, P.P.T. **Non-linear Static and Cyclic Analysis of Steel Frames with Semi-Rigid Connections**. Oxford: Elsevier, 2000.

CHAN, S.L.; E CHUI., P.P.T. **A generalized design-based elasto-plastic analysis of steel frames by sections assemblage concept**. Journal of Engineering Structures, vol.19, n. 8, p. 628-636, 1997.

CHEN, S.H.; CHEUN, Y.K.; XING, H.X. **Nonlinear vibration of plane structures by finite element and incremental harmonic balance method.** Nonlinear Dynamics, vol. 26, p. 87-104, 2001.

CHEN, W.F.; GOTO, Y.; E LIEW, J.Y.R. **Stability Design of Semi-rigid Frames.** USA: John Wiley & Sons Inc., 468p, 1996.

CHEN, W.F.; E SOHAL, I. **Plastic Design and Second-order Analysis of Steel Frames.** Springer-Verlag, New York: John Wiley & Sons Ltd., 1995.

CHEUN, Y.K.; CHEN, S.H. **Application of the incremental harmonic balance method to cubic non-linearity systems.** Journal of Sound and Vibration, vol. 140, n. 2, pp. 273-286, 1990.

CHOPRA, A. K. **Dynamics of Structures:** Theory and applications to earthquake engineering. USA: Prentice Hall, 729p, 1995.

CHAJES, A.; E CHURCHILL, J.E. **Nonlinear frame analysis by finite element methods.** Journal of Structural Engineering, vol. 113, n. 6, p. 1221-1235, 1987.

CRISFIELD, M.A. **A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap-through.** Computer and Structures, vol. 13, p. 55-62, 1981.

CRISFIELD, M.A. **A consistent co-rotational formulation for non-linear, three-dimensional, beam-elements.** Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 81, p. 131-150, 1990.

CRISFIELD, M. A. **Non-Linear Finite Element Analysis of Solid Structures:** Vol - I. USA: John Wiley and Sons, 1991.

CRISFIELD, M.A.; JELENIC, G.; MI Y., ZHONG, H.-G.; FAN, Z. **Some aspects of the non-linear finite element method.** Finite Element Analysis Design, vol. 27, p. 19-40, 1997.

CLOUTEAU, D.; BROCB, D.; DEVÉSAC, G.; GUYONVARHC, V.; MASSINC, P. **Calculation methods of Structure–Soil–Structure Interaction (3SI)**

for embedded buildings: Application to NUPEC tests. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, vol. 32, p.129–142, 2012.

CLOUGH, R. W.; PENZIEN, J. **Dynamics of Structures**. 3rd ed. USA: Computer and Structures, Inc., 730p, 1995.

FEHLBERG, E. **Low-order classical Runge-Kutta formulas with step size control and their application to some heat transfer problems**. NASA Technical Report. Extract published in *Computing*, vol. 6, p. 61-71, 1969.

FELIPPA, C. **Nonlinear Finite Element Methods:** Notes of Course. Department of Aerospace engineering sciences - University of Colorado. Boulder, USA, 2014.

FERREIRA, J.V.; SERPA, A.L. **Application of the arc-length method in nonlinear frequency response**. *Jornal of Sound and Vibration*, vol. 284, p. 133-149, 2005.

FISHER, I. **Simulación Computacional:** Generación de números aleatórios. Cali, Apostila de curso – Departamento de Engenharia Civil, Universidad Del Valle, Colômbia, disponível online em 20/08/2011: http://eisc.univalle.edu.co/materias-/Simulacion_Computacional/SC0.pdf.

FRÝBA, L., 1972. **Vibrations of Solids and Structures Under Moving Loads**. Prague: Academy of Sciences Prague, p. 206-230, 1972.

GALVÃO, A. S. **Instabilidade Estática e Dinâmica de Pórticos Planos com Ligações Semi-rígidas**. Rio de Janeiro, 2004. Tese de Doutorado – Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

GALVÃO, A.S. **Formulações Não-lineares de Elementos Finitos para Análise de Sistemas Estruturais Metálicos Reticulados Planos**. Rio de Janeiro, 2000. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

GANJAVI, B.; HAO, H. **A parametric study on the evaluation of ductility demand distribution in multi-degree-of-freedom systems considering soil–structure interaction effects**. *Engineering Structures*, vol. 43, p. 88-104, 2012.

GOTO, Y.; E CHEN, W. **Second-order elastic analysis for frame design.** Journal of Structural Engineering, vol. 113, n. 7, p. 1500-1519, 1987.

HASHASH, Y.M.A.; HOOK, J.J.; SCHMIDT, B.; YAO J.I-CH. **Seismic design and analysis of underground structures.** Tunnelling and Underground Space Technolog, v. 16, Elsevier Ltd., p. 247-293, 2001.

HALABIAN, A.M.; HESHAM EL NAGGAR, M. **Effect of non-linear soil-structure interaction on seismic response of tall slender structures.** Soil Dynamics and Earthquake Engineering, v. 22, Elsevier Ltd., p. 639-658, 2002.

HETENYI, M. **Beams on Elastic Foundation.** The University of Michigan Press, Michigan: Ann Arbor, p. 1-33, 1946.

HURTADO, G.C.A. **Aspectos de Liquefação na Estabilidade de. Pilha de Lixiviação de Minério de Cobre sob Carregamento Sísmico.** Rio de Janeiro, 2009. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

KIM, S-M. **Stability and dynamic response of Rayleigh beam-columns on an elastic foundation under moving loads of constant amplitude and harmonic variation.** Engineering Structures, v. 27, Elsevier Ltd., p. 869-880, 2005.

LAM, P.C. SCAVUZZO, R.J. **Lateral-Torsional Structural Response From Free-Field Ground.** Motion Nuclear Engineering and Design, vol. 65, p. 269-281, 1981.

LAU, S. L.; CHEUNG, Y. K.; WU, S. Y. **A variable parameter incrementation method for dynamic instability of linear and nonlinear elastic systems.** Journal of Applied Mechanics, vol. 49, ASME, p. 849–853, 1982.

LOILOIS, A.; LOLOIS, A. **A numerical approach for estimating effect of multiple earthquakes to seismic response of structures strengthened by cable-element.** Journal of theoretical and Applied mechanics, vol. 43, n. 3, p. 21-32, 2013.

MATHEWS, J. H.; FINK, K. D. **Numerical methods using MATLAB**. Fourth EDITION. Prentice-Hall, 2004.

MINISTERIO DE VIVIENDA Y CONSTRUCCION. **Reglamento Nacional De Construcciones – RNE E030**: Norma de diseño sísmorresistente. Norma Técnica. Lima, Perú, 2007.

MIQUEL, B.; BOUAANANI, N. **Practical dynamic analysis of structures laterally vibrating in contact with water**. Computers and Structures, vol. 89, p. 2195-2210, 2011.

NETO, E. A. S.; PERIC, D.; OWEN, D. R. J. **Computational Methods for Plasticity**: Theory and applications. Singarpure: John Wiley & Sons Ltd., 791p, 2008.

NEWMARK, N.M. **A method of computation for structural dynamics**. Journal of Engineering Mechanics Division, vol. 85, p. 67-94, 1959.

NGUYEN, D. K. **Dynamic response of prestressed Timoshenko beams resting on tow-parameter foundation to moving harmonic load**. Technische Mechanik, v. 28, n. 3-4, p. 237-258, 2008.

NGUYEN, V-H.; DUHAMEL, D. **Finite element procedure for nonlinear structures in moving coordinates**. Part II: Infinite beam under moving harmonic loads. Computers and Structures, v. 86, Elsevier Ltd., p. 2056-2063, 2008.

PACOSTE, C.; ERIKSSON, A. **Element behavior in post-critical plane frame analysis**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 125, p. 319-343, 1995.

PACOSTE, C. **Co-rotational flat facet triangular elements for shell instability analyses**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 156, n. 1, p. 75-110, 1998.

PARK, K.S. and CHANG, S.P. **Generation of artificial earthquake**. In: XIV International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology. Lyon, France, 1997.

PASQUETTI, E. **Métodos Aproximados de Solução de Sistemas Dinâmicos Não-Lineares**. Rio de Janeiro, 2008. Tese de Doutorado – Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

PAULLO, M. L. F. **Análise Dinâmica de Vigas Apoiadas em Fundação Elástica sob a Ação de Cargas Móveis**. Rio de Janeiro, 2010. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

PAULLO, M. L. F.; ROEHL, D. M. **A Comparative Study of Continuation Methods in Non-linear Elasto-plastic Analysis**. In: XII international conference on computational plasticity: Fundamental and applications. Barcelona, Spain, 2013.

PAULLO, M. L. F.; ROEHL, D. M. **Comparação de Métodos de Continuação em Problemas com Análise Inelástica**. In: XXXII Congresso Ibero-Latino-Americano de Métodos Computacionais em Engenharia. Ouro Preto, Brasil, 2011.

PAZ, M. **Structural Dynamics: Theory and computations**. New York : Chapman & hall, 825p, 1997.

PELED, A.; LIU, B. **Digital signal processing: theory, design, and implementation**. New York : John Wiley & Sons Ltd., p. 143-156, 1976.

RAMM, E. **Strategies for Tracing the Non-Linear Response Near Limit-Points, Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics**, Berlin: ed. W. Wunderlich, Springer-Verlag, p. 63-89, 1981.

RAMM, E. **The Riks/Wempner approach and an extension of displacement control method in non-linear analysis**. Non-linear Computational Mechanics, ed. E. Hinton et al., Pineridge, Swansea, p. 63-86. , 1982

RIKS, E. **An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems**. International Journal of Solids and Structures, vol. 15, p. 529-551, 1979.

ROEHL, J. L. P. **Dinâmica Estrutural: Análise Não Determinística**. Rio de Janeiro, p. 46-58. 2000, Apostila CIV2121 – Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

SÁEZ, E.; LOPEZ-CABALLERO, F.; MODARESSI-F-R, A. **Effect of the inelastic dynamic soil–structure interaction on the seismic vulnerability Assessment**. Structural Safety, v. 33, Elsevier Ltd., p. 51-63, 2011.

SARNO, L.D. **Effects of multiple earthquakes on inelastic structural response**. Engineering Structures, vol. 56, p. 673-681, 2013.

SEKULOVIC, M.; E-SALATIC, R. **Nonlinear analysis of frames with flexible connections**. Computers & Structures, vol. 79, n. 11, p. 1097-1107, 2001.

SELVADURAI, A. P. S. **Elastic analysis of soil-foundation interaction**. Amsterdam: Elsevier Scientific, p. 1-77, 1979.

SILVEIRA, R.A.M.; **Análise de Elementos Estruturais Esbeltos com Restrições Unilaterais de Contato**. Rio de Janeiro, 1995. Tese de Doutorado – Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

SILVA, A.R.D.; **Sistema Computacional para Análise Avançada Estática e Dinâmica de Estruturas Metálicas**. . Ouro Preto, 2009. Tese de Doutorado – Escola de Minas, Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto.

SOUZA NETO, E.A.; PERIC, D.; OWEN, D.R.J. **Computational Methods for Plasticity – Theory and Applications**. John Wiley & Sons, 2008.

SUBBARAJ, K.; E DOKANISH, M.A. **A survey of direct time-integration methods in computational structural dynamics – II. Implicit methods**. Computer & Structures, vol. 32, n. 6, p. 1387-1401, 1989.

TIMOSHENKO, S. p.; YOUNG D. H. **Theory of Structures**. 2nd ed., USA: McGraw-Hill, INC., p. 601-608, 1965.

TORKAMANI, M.A.M.; SONMEZ, M.; CAO, J. **Second-order elastic plane-frame analysis using finite-element method**. Journal of Structural Engineering, vol. 12, n. 9, p. 1225-1235, 1997.

VIANA, E.A.; **Interação estrutura-solo para estruturas aporricadas submetidas a carregamentos dinâmicos devidos a compressores alternativos**. Rio de Janeiro, 2012. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

VILLAVERDE, R. **Fundamental Concepts of Earthquake Engineering**. USA: Taylor and Francis Group, 939p, 2009.

VLASOV, V. Z.; LEONT'EV, N. N. **Beams, plates and Shells on elastic foundations**. Jerusalem: Israel Program for Scientific Translation, p.59-65, 1966.

WILSON W.M.; MOORE, H.F. Tests to determine the rigidity of riveted joints in steel structures. Illinois, 1917. Bulletin No. 104– Engineering Experiment Station, University of Illinois.

WHITE, D.W.; LIEW, J.Y.R.; E CHEN, W.F. **Toward advanced analysis in LRFD. In Plastic Hinge Based Methods for Advanced Analysis and Design of Steel Frames An Assessment of The State-Of-The-Art**. Lehigh University, Bethlehem, PA, p. 75-173, 1983.

WOLF J. P. **Dynamic Soil-Structure Interactions**. Prentice-Hall. 466p. 1985.

WOLF J. P. **Foundation Vibration Analysis Using Simple Physical Models**. Prentice-Hall. 466p. 423. 1994

WEN, R.K.; RAHIMZADEH. **Nonlinear elastic frame analysis by finite element**. Journal of the Structural Division, vol. 109, p. 1952-1971, 1983.

WEMPNER, G.A. **Finite elements, finite rotations and small strains of flexible shells**. International Journal of Solids and Structures, vol. 5, p. 117-153, 1969.

WONG, M.B.; TIN-LOI, F. **Analysis of frames involving geometrical and material nonlinearities**. Computers & Structures, vol. 34, n. 4, p. 641-646, 1990.

XU, Y.L.; ZHANG, W.S. **Modal analysis and seismic response of steel frames with connection dampers**. *Engineering Structures*, vol. 23, p. 385–396, 2001.

YANG, Y.B.; KUO, S.B. **Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures**. Prentice Hall, 1994.