



UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO – ESCOLA DE MINAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL



ANÁLISE NUMÉRICA NÃO LINEAR DE VIGAS E LAJES DE CONCRETO PROTENDIDO

JOÃO PAULO DE SOUZA ROSA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte integrante dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, área de concentração: Construção Metálica.

Orientador: Prof. Dr. Amilton Rodrigues da Silva

Ouro Preto
Novembro de 2018

R788a

Rosa, João Paulo de Souza.

Análise numérica não linear de vigas e lajes de concreto protendido
[manuscrito] / João Paulo de Souza Rosa. - 2018.
xiii, 82f.: il.: color; grafs; tabs.

Orientador: Prof. Dr. Amilton Rodrigues da Silva.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de
Minas. Departamento de Engenharia Civil. Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Civil.

Área de Concentração: Construção Metálica.

1. Vigas protendidas. 2. Lajes protendidas. 3. Elementos de interface. 4.
Elementos planos de casca. 5. Elementos finitos. I. Silva, Amilton Rodrigues
da. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

CDU: 624.014

ANÁLISE NUMÉRICA NÃO LINEAR DE VIGAS E LAJES DE CONCRETO PROTENDIDO

AUTOR: JOÃO PAULO DE SOUZA ROSA

Esta dissertação foi apresentada em sessão pública e aprovada em 05 de outubro de 2018, pela Banca Examinadora composta pelos seguintes membros:



Prof. Amilton Rodrigues da Silva, D. Sc. – UFOP (Presidente)



Profª. Kátia Inácio da Silva, D. Sc. – UFOP



Prof. Hisashi Inoue, D. Sc. – UFSJ

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por me iluminar e me dar capacidade e forças nos momentos difíceis.

Ao meu orientador, professor Amilton que não mediu esforços para o desenvolvimento desse trabalho, pela atenção, paciência e dedicação durante toda a orientação.

À minha família, especialmente a meus pais, Rogério e Evane, e ao meu irmão Luiz Ricardo que sempre me apoiaram e me incentivaram em todas as etapas da minha vida.

À minha namorada, Daniele, por todo apoio, amor e compreensão.

Aos colegas de Ouro Preto, pelos momentos de estudo e amizade.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Aos demais professores e funcionários do PROPEC, assim como a todos que contribuíram de alguma forma para a realização deste trabalho, meu muito obrigado!

“Não se preocupe em fazer muitas coisas, mas procure realizar perfeitamente aquilo que ache ser da vontade de Deus.”

Santo Afonso Maria de Ligório

Resumo da dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Engenharia Civil

Análise numérica não linear de vigas e lajes em concreto protendido

João Paulo de Souza Rosa

Setembro/2018

Orientador: Amilton Rodrigues da Silva

A aplicação da protensão em vigas e lajes tem sido difundida cada vez mais, através do desenvolvimento de novas técnicas construtivas e necessidade de soluções práticas na área da construção. Muitos estudos foram e estão sendo realizados com o intuito de se conhecer bem o comportamento de estruturas protendidas, de forma a tirar o maior proveito, com segurança, de suas possibilidades construtivas.

O objetivo principal desse trabalho é implementar um modelo de elementos finitos para análise numérica não linear de vigas e lajes de concreto protendido. Dessa forma, foi implementado um elemento finito de interface para análise numérica não linear. Este elemento é capaz de simular tanto o deslizamento que ocorre entre a laje de concreto e a armadura ativa quanto a deformação que esta armadura sofre. As perdas de protensão imediatas e diferidas no tempo foram implementadas.

Nas análises numéricas apresentadas no presente trabalho as lajes de concreto são modeladas com elementos planos de casca e as vigas modeladas com elementos de barra. O contato entre as cordoalhas e o concreto é modelado através de elementos de interface. As não linearidades geométrica e física são consideradas na análise numérica. Os exemplos analisados validam o modelo numérico sugerido neste trabalho mostrando um ótimo resultado quando comparado ao resultado experimental.

Palavras chaves: Lajes protendidas, Elementos planos de casca, Elementos de interface, Vigas protendidas.

Abstract of Dissertation presented as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Civil Engineering.

Nonlinear Numerical analysis of prestressed concrete beams and slabs

João Paulo de Souza Rosa

September/2018

Advisor: Amilton Rodrigues da Silva

The application of the prestressed concrete in beams and slabs has been increasingly widespread, through the development of new constructive techniques and need of practical solutions in the area of the construction. Many studies were and they are being accomplished with the intention of knowing well the behavior of prestressed structures, in way to include all the advantages, with safety, of their constructive possibilities.

The main objective of this work is to implement a finite element model for nonlinear numerical analysis of prestressed concrete beams and slabs. Thus, a finite interface element was implemented for nonlinear numerical analysis. This element is able to simulate both the slip that occurs between the concrete slab and the tendon as the deformation that this tendon suffers. Immediate and delayed time losses were implemented.

In the numerical analyzes presented in the present work, the concrete slabs are modeled with flat plate elements and the beams modeled with bar elements. The contact between the tendons and the concrete is modeled through interface elements. The geometric and material nonlinearities are considered in the numerical analysis. The analyzed examples validate the numerical model suggested in this work showing an excellent result when compared to the experimental result.

Key words: Prestressed slabs, Flat shell elements, Partial connection, Interface elemento, Prestressed beams.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1: Translação dos nós: (a) posição original; (b) posição na interseção com os cabos (adaptado de El-Mezaini e Çitiptiöglu,1991).....	9
Figura 2.2: Barril de madeira sob ação de protensão circular do aro metálico (Hanai, 2005)	12
Figura 2.3: Ponte em Lucancy (http://efreyssinet-association.com , visitado em 08/09/2018).....	13
Figura 2.4: Representação esquemática de um cabo de cordoalhas aderentes em corte longitudinal (http://vswmcivil.blogspot.com/2018/03/blog-post_13.html - modificado, visitado 25/08/2018).....	14
Figura 2.5: Montagem das cordoalhas engraxadas e plastificadas em laje nervurada de edifício comercial (Fonte: próprio autor).....	15
Figura 2.6: Distribuição dos cabos de protensão em uma laje plana (Emerick, 2005).....	17
Figura 2.7: Distribuição de cabos uniforme (Milani, 2006).....	17
Figura 2.8: Traçado vertical do cabo em uma viga contínua esquemática (Emerick, 2005).....	18
Figura 3.1: Esquema de forças de atrito sob cabo curvo infinitesimal	21
Figura 3.2: Elementos a serem utilizados na interpolação	22
Figura 3.3: Variação da força na armadura após perdas de protensão por atrito e acomodação da ancoragem.....	23
Figura 3.4: Cálculo da força de protensão após perdas.....	24
Figura 3.5: Caso particular de cálculo de força de protensão após perdas	25
Figura 4.1 - Modelo de laje protendida implementada	32
Figura 4.2 - Representação dos elementos utilizados	33
Figura 4.3 - Elemento plano de casca de nove nós dividido em camadas (Dias, 2016).....	34
Figura 4.4 - Curva tensão-deformação para o concreto comprimido (CEB/FIP, 2010)	36
Figura 4.5 - Curva tensão-deformação para o concreto tracionado.....	36
Figura 4.6: Graus de liberdade do elemento de barra e tensões em um elemento infinitesimal (Silva, 2010)	41
Figura 4.7: Graus de Liberdade do elemento de interface	45
Figura 4.8: Deslizamento longitudinal	46
Figura 5.1: Detalhe do carregamento e do perfil do cabo das vigas do Grupo A de Tao e Du (1985).....	53
Figura 5.2: Detalhe da seção transversal das vigas do grupo A de Tao e Du (1985).....	53
Figura 5.3: Deflexão no meio do vão da viga A2	54
Figura 5.4: Aumento da tensão na armadura ativa da viga A2.....	55
Figura 5.5: Deflexão no meio do vão da viga A3	56
Figura 5.6: Aumento da tensão na armadura ativa da viga A3.....	56
Figura 5.7: Detalhe do carregamento e do perfil do cabo da viga de Hussien, Elafand e Abdelrahman (2012) (unidades em cm)	57
Figura 5.8: Detalhe da seção transversal no meio do vão da viga B7 de Hussien, Elafand e Abdelrahman (2012)	57
Figura 5.9: Deflexão no meio do vão	58
Figura 5.10: Aumento da tensão na armadura ativa.....	59
Figura 5.11: Detalhe do carregamento e do perfil do cabo da viga de Rabczuk, Akkermann e Eibl (2005).....	59
Figura 5.12: Deflexão no meio do vão	61
Figura 5.13: Detalhe do carregamento e do perfil do cabo da viga de Chen (2008).....	61
Figura 5.14: Deflexão no meio do vão	62
Figura 5.15: Vista em planta e frontal das lajes de Cooke, Park e Yong (1981).....	63
Figura 5.16: Discretização da laje de Cooke, Park e Yong (1981).....	64
Figura 5.17: Deflexão no meio do vão da laje 5.....	65

Figura 5.18: Aumento da tensão na armadura ativa da laje 5	65
Figura 5.19: Deflexão no meio do vão da laje 8	66
Figura 5.20: Aumento da tensão na armadura ativa da laje 8	67
Figura 5.21: Vista em planta da laje de Roca e Marí (1993b)	67
Figura 5.22: Vista frontal da laje de Roca e Marí (1993b)	68
Figura 5.23: Discretização da laje de Roca e Marí (1993b)	68
Figura 5.24: Deflexão no centro da laje.....	69

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1: Parâmetros das vigas de Tao e Du (1985).....	53
Tabela 5.2: Cargas últimas das vigas de Tao e Du (1985)	54
Tabela 5.3: Carga última da viga de Hussien, Elafand e Abdelrahman (2012)	58
Tabela 5.4: Carga última da viga de Rabczuk, Akkermann e Eibl (2005).....	60
Tabela 5.5: Parâmetro da viga de Chen (2008)	61
Tabela 5.6: Carga última da viga de Chen (2008)	62
Tabela 5.7: Características das lajes de Cooke, Park e Yong (1981)	63
Tabela 5.8: Carga última das lajes de Cooke, Park e Yong (1981).....	64
Tabela 5.9: Carga última da laje de Roca e Marí (1993b).....	69

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	1
1.2	JUSTIFICATIVA	2
1.3	OBJETIVOS.....	3
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	5
2.1	ELEMENTOS FINITOS PARA ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS DE CONCRETO PROTENDIDO	5
2.2	PROTENSÃO	11
2.2.1	Breve histórico do concreto protendido.....	11
2.2.2	Lajes planas protendidas	16
3	PERDAS DE PROTENSÃO	20
3.1	PERDAS IMEDIATAS	20
3.1.1	Perdas por atrito	20
3.1.2	Perdas por acomodação da ancoragem	22
3.2	PERDAS DIFERIDAS DO CONCRETO.....	25
3.2.1	Idade fictícia do concreto	26
3.2.2	Espessura fictícia da peça	26
3.2.3	Hipóteses básicas para análise da fluência	27
3.2.4	Valor da deformação por fluência do concreto	27
3.2.5	Hipóteses básicas para análise da retração	29
3.2.6	Valor da deformação por retração do concreto	29
3.2.7	Implementação dentro do Programa Desenvolvido.....	30
3.3	DEFORMAÇÕES NA ARMADURA.....	31
4	IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL.....	32
4.1	ELEMENTO PLANO DE CASCA	33
4.2	ELEMENTO DE BARRA	41
4.3	ELEMENTO DE INTERFACE	44
5	EXEMPLOS E RESULTADOS	52
5.1	VIGAS DE TAO E DU (1985)	52
5.2	VIGA COM PROTENSÃO INTERNA DE HUSSIEN, ELAFAND E ABDELRAHMAN (2012).....	56
5.3	VIGA COM PROTENSÃO SUPERIOR E INFERIOR DE RABCZUK, AKKERMANN E EIBL (2005)	59
5.4	VIGA COM PROTENSÃO INTERNA DE CHEN (2008)	61
5.5	LAJE DE COOKE, PARK E YONG (1981)	63
5.6	LAJE DE ROCA E MARÍ (1993b).....	67

6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	70
6.1	COMENTÁRIOS GERAIS	70
6.2	CONCLUSÕES	70
6.3	TRABALHOS FUTUROS	71
7	REFERÊNCIAS.....	73

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

As estruturas de concreto armado e protendido possuem grande importância na engenharia estrutural, devido a isso vários estudos tanto no âmbito acadêmico quanto profissional foram publicados acerca dessas. O principal foco dessas publicações é o complexo comportamento do concreto estrutural, que quando submetido a solicitações possui resposta não linear. Essa não linearidade é causada, entre outros fatores, pela fissuração e diferença entre as resistências à tração e à compressão do concreto; pela plastificação do aço e do concreto; e pelos fenômenos relacionados ao tempo, como a fluência e a retração do concreto e a relaxação do aço. O conhecimento do comportamento mecânico e da distribuição de tensões nessas peças quando submetidas aos mais diversos tipos de carregamento é fundamental para realizar um dimensionamento seguro e otimizado de modo a reduzir custos.

A utilização do concreto protendido pode ser uma boa solução dependendo do projeto. Algumas das vantagens oferecidas pelo seu uso é a redução da incidência de fissuras, bem como a redução das tensões de tração provocadas pela flexão e pelos esforços cortantes permitindo projetar seções mais esbeltas, quando comparado com o concreto armado. O que só é possível devido a particularidade do concreto em trabalhar bem a compressão e mal a tração. Entre as vantagens econômicas, destaca-se a redução das quantidades necessárias de concreto e aço, devido ao emprego eficiente de materiais de maior resistência, possibilidade de vencer vãos maiores que o concreto armado convencional e, ainda, para o mesmo vão, pode-se reduzir a altura necessária da peça.

Nos últimos anos, lajes apoiadas diretamente nos pilares com ou sem alargamento do contato laje-pilar (lajes lisas ou cogumelo) vêm sendo muito empregadas na construção civil, pois permitem um melhor aproveitamento dos espaços e geram uma economia em termos de material de forma e tempo de execução. O uso correto desse tipo de laje vem aumentando devido às modernas técnicas de análise estrutural, que tornam possível a correta determinação dos esforços, que são o ponto de partida para o dimensionamento das estruturas.

Uma vez que as lajes protendidas vêm sendo amplamente utilizadas e possuem um comportamento altamente não linear, faz-se necessário a implementação de rotinas computacionais para a análise numérica. Dentre os métodos disponíveis para análise numérica estrutural o Método dos Elementos Finitos (MEF) é o mais difundido. Esse método permite a

análise de estruturas muito complexas de uma forma mais realista, simulando facilmente diferentes disposições geométricas, tipos de carregamentos e condições de contorno através de um recurso computacional. O processo é feito a partir da discretização de uma estrutura em elementos finitos, cujos comportamentos são conhecidos.

Este trabalho consiste na análise numérica de estruturas de concreto com armadura passiva e ativa considerando as não linearidades física e geométrica do problema. Para isso, utiliza-se o programa FEMOOP (Finite Element Method Object Oriented Program) para desenvolver um modelo numérico, via MEF, capaz de simular o comportamento de vigas e lajes planas protendidas. É dada ênfase a esses elementos estruturais porque eles são submetidos predominantemente a esforços de flexão, que é a situação na qual a protensão promove ganho significativo. Para a análise, um elemento plano de casca de nove nós e cinco graus de liberdade por nó é utilizado para simular a laje de concreto armado. Sendo os graus de liberdade de translação na direção z , de rotação em torno dos eixos x e y (típicos dos elementos de placa) e os graus de liberdade de translação nas direções x e y . Elementos de barra de três nós e com os mesmos 5 graus de liberdade por nó do elemento de casca são utilizados para discretizar as vigas de concreto armado. Elementos de interface de quatro nós são utilizados para modelar o contato entre o concreto e as cordoalhas. Esse elemento tem a função de, a partir das informações dos elementos que ele conecta, avaliar um possível deslocamento relativo longitudinal na interface de contato. A armadura ativa é discretizada utilizando o próprio elemento de interface. No presente trabalho será considerada a possibilidade de deslizamento livre entre cordoalhas e bainhas e deslizamento impedido (quando é injetado nata de cimento na bainha).

1.2 JUSTIFICATIVA

A utilização de concreto protendido na construção de edifícios é dificultada devido a alguns fatores determinados pela solução do projeto. Dentre eles, pode-se citar a dificuldade adicional que a armadura ativa insere no dimensionamento da estrutura. Sendo essa a principal motivação do desenvolvimento de um modelo numérico em elementos finitos capazes de determinar a capacidade última e de serviço de vigas e lajes em concreto protendido proposto neste trabalho.

A protensão consiste na introdução de um esforço axial adicional que impõe ao elemento estrutural de concreto armado uma flexão inversa à flexão imposta pelo carregamento. Assim

sendo, o concreto protendido é aplicável em elementos com predominância de esforços de flexão. Nesses casos, o uso do concreto protendido apresenta vantagens como: definição de seções mais reduzidas, diminuindo assim o peso próprio de parte da estrutura; vencer maiores vãos; melhorar comportamento em relação aos estados limites de serviço, ou seja, menores flechas, redução ou até eliminação das fissuras, maior durabilidade do elemento estrutural.

1.3 OBJETIVOS

O objetivo principal deste trabalho é desenvolver um modelo numérico utilizando o Método dos Elementos Finitos para análise numérica não linear de vigas e lajes de concreto protendido. Na simulação numérica desse problema são utilizados elementos plano de casca para a laje de concreto armado, elementos de barra para a viga de concreto armado, e elementos de interface para discretizar a armadura ativa, conectar essa armadura ativa aos elementos de placa ou viga, e simular uma conexão livre ou total na interface de contato entre a armadura ativa e os elementos de placa ou viga.

Para alcançar o objetivo proposto foi implementado um elemento de interface capaz de simular o comportamento estrutural do aço de protensão submetido a esforços axiais e avaliar um possível deslizamento entre o cabo de protensão e a bainha, no caso de protensão não aderente. Esse elemento de interface é utilizado em conjunto com os elementos planos de casca ou elemento de barra capazes de simular o comportamento estrutural de lajes e vigas de concreto armado. A dificuldade na implementação desses elementos se deve a análise não linear do material, principalmente no caso do concreto, que devido à sua baixa resistência à tração fatura gerando um comportamento ortotrópico após essas fissurações. Para essa análise será usado o modelo de fissuração apresentado por Huang, Burgess e Plank (2003a). Os elementos planos de casca e de barra para análise não linear de lajes e vigas de concreto armado foram implementados em trabalhos anteriores (Silva, 2010), sendo nesse trabalho introduzidos os efeitos de retração e fluência no concreto e relaxamento da armadura ativa.

A ação conjunta da estrutura de concreto e da armadura ativa depende do tipo de cordoalha a ser utilizada. Para elementos de protensão não aderentes, existe um deslizamento entre o concreto e aço, fazendo com que não haja compatibilidade entre as deformações dos dois materiais. Quando da utilização de elementos aderentes, isso não é verdade. Como já dito a rigidez no contato entre a armadura ativa e o concreto é modelada pelo elemento de interface implementado neste trabalho o qual foi baseado no elemento de Silva (2010). Diferente do

elemento implementado em Silva (2010), o elemento de interface nesse trabalho apresenta variação da posição do contato ao longo do comprimento do elemento. Isso se fez necessário devido a inclinação do eixo da armadura ativa em relação ao plano da superfície média da laje de concreto.

Como deseja-se obter elementos finitos capazes de fornecer a carga última de lajes de concreto armado protendidas, as não linearidades físicas dos materiais concreto e armadura devem ser consideradas na formulação. Já a não linearidade geométrica deve ser considerada devido a introdução de cargas axiais por meio da protensão. Mesmo em lajes sem protensão, Huang, Burgess e Plank (2003a) observou a necessidade da consideração da não linearidade geométrica para obtenção da carga última de lajes em concreto armado.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Na análise estrutural de lajes em concreto armado, seja ela protendida ou não, é considerada a teoria de placa de Kirchhoff ou Reissner-Mindlin. Na primeira, despreza-se na definição da energia de deformação do elemento de placa a parcela referente à energia de deformação devido ao cortante, enquanto que na segunda essa parcela é considerada. Assim sendo, a teoria de Reissner-Mindlin deve necessariamente ser considerada quando o esforço cortante for significativo o que acontece geralmente com placas espessas. Já em placas delgadas a consideração da teoria de Reissner-Mindlin pode levar a erros significativos devido a problemas numéricos relacionados às funções de interpolação no modelo numérico aproximado. Ambas as teorias levam a um modelo matemático definido por equações diferenciais parciais de quarta ordem, as quais são difíceis de serem analisadas de forma analítica, exceto para alguns casos particulares, como, por exemplo, placas circulares com simetria de revolução, isso considerando análise linear.

Para solucionar esse problema de enorme complexidade das soluções analíticas são empregados métodos numéricos. O Método dos Elementos Finitos, uma das principais abordagens para a análise de problemas estruturais, divide um contínuo em elementos discretos, cujo comportamento individual é conhecido, formando uma malha de elementos, a qual fornece uma solução aproximada das solicitações em qualquer ponto da estrutura.

2.1 ELEMENTOS FINITOS PARA ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS DE CONCRETO PROTENDIDO

Há várias possíveis aplicações para o Método dos Elementos Finitos (MEF). Para o caso de modelagem de uma laje pode-se variar o tipo de elemento a ser utilizado, pode ser utilizado elementos sólidos (em uma análise tridimensional), elementos de placa (para uma análise bidimensional), ou até mesmo elementos de pórtico espacial ou grelha (para uma análise unidimensional). A análise tridimensional seria a que mais aproximaria do comportamento real do elemento estrutural, no entanto, ela requer um esforço computacional elevado e nos casos práticos de lajes com dimensões significativas o tempo de análise seria excessivo. É importante lembrar que quanto mais refinada for a malha, mais exatos e confiáveis serão os resultados obtidos. Porém, este maior número de elementos exige um maior tempo de cálculo e maior capacidade computacional, tornando o projeto mais caro e muitas vezes inviável. Como a espessura das lajes é pequena comparada com as outras dimensões, a aproximação por uma

análise bidimensional fornece bons resultados. Por isso, a análise de placa é a mais utilizada para análise estrutural de lajes.

Várias formulações de elementos finitos foram desenvolvidas para analisar placas ou cascas de concreto armado considerando a não linearidade do material. Em geral, as formulações são baseadas em três modelos: (i) o modelo de rigidez efetiva; (ii) o modelo discreto e (iii) o modelo de elementos finitos considerando o elemento de placa dividido em várias camadas.

De acordo com Silva (2010) apud Huang, Burgess e Plank. (2003b), no modelo de rigidez efetiva, a degradação das propriedades mecânicas do material e a fissuração do concreto são avaliadas através da utilização do cálculo da rigidez à flexão ortotrópica média. Este conceito de rigidez efetiva baseia-se na rigidez à flexão de vigas, sendo estendido para aplicação em placas nos trabalhos de Scanlon e Murray (1982), Polak (1996) e Jofriet e McNeice (1971). A principal desvantagem deste modelo é o fato de que a fissuração do concreto não pode ser considerada de maneira progressiva ao longo da seção transversal da placa de concreto (Jiang e Mirza, 1997).

Em Jiang e Mirza (1997) e Phuvoravan e Sotelino (2005) é feita uma aproximação do modelo de elementos finitos discretos por uma modelagem separada do concreto e das barras de aço de reforço por dois diferentes tipos de elementos. No primeiro trabalho foi modelado uma laje de concreto com um elemento de placa com quatro nós que combina oito graus de liberdade de um elemento de tensões planas para modelagem da ação no plano, e doze graus de liberdade de um elemento de flexão de placa para modelagem da ação fora do plano, enquanto que as barras de reforço são modeladas por elementos do tipo viga-coluna.

O modelo de análise não linear baseado na divisão da placa de concreto em várias camadas vem sendo muito utilizado na simulação de placas de concreto armado, para verificar a resistência última e na avaliação da fissuração sob ação de flexão e cortante (Loo e Guan, 1997). Segundo Martinelli (2003), neste modelo, o elemento de placa é formado por várias camadas que consideram que as propriedades mecânicas possam ser avaliadas de forma independente para cada material (concreto ou aço) de cada camada. As barras da armadura passiva são transformadas em uma camada equivalente de aço com propriedades mecânicas consideradas apenas na direção das barras. A protensão é considerada modificando as propriedades de uma camada do elemento. Nesse tipo de análise geralmente é desprezado o

efeito de cisalhamento ao longo da espessura de cada camada, considerando-a em um estado plano de tensões. É definido para cada camada um novo sistema de referência dado pelo espaço vetorial formado por uma base de vetores unitários nas direções das tensões principais, sendo a lei constitutiva do material definido neste novo sistema.

Na dissertação de Gomes (1990), é feita a utilização deste tipo de modificação a nível de elemento para considerar armaduras protendidas ou não, através da criação de camadas de elementos com propriedades modificadas.

Zhang e Bradford (2007) implementaram um modelo de camadas para análise não linear de placas/cascas considerando um modelo de fissuração semelhante ao apresentado por Huang, Burgess e Plank (1999). Foi considerada a teoria de Mindlin/Reissner na implementação do elemento de placa e utilizaram uma função de viga de Timoshenko para obter um elemento finito retangular com camadas livre de travamento por cisalhamento (*shear locking*).

Jiang (1985) desenvolveu um modelo em elementos finitos que considerada o efeito de deslizamento na ligação e o efeito de pino. Para isso utilizaram-se elementos de interface que unem os elementos de aço aos elementos de concreto que são capazes de transferir tensões internas do concreto para o aço.

Figueiras e Póvoas (1994) desenvolveram um modelo numérico utilizando elementos finitos isoparamétricos de placas para concreto. As armaduras de protensão foram modeladas de forma automática, de acordo com a malha da estrutura, através de elementos curvos unidimensionais. A formulação da armadura é do tipo embutida, modificada para eliminar qualquer restrição do perfil dos cabos em relação à malha da estrutura. A geometria da cordoalha é definida com precisão de forma automática, permitindo a quantificação precisa das ações estruturais de protensão. Para determinar as deformações na armadura protendida não aderente, utilizou-se uma abordagem não local, em que é respeitada a compatibilidade de deslocamentos entre os cabos e a estrutura. O modelo considera as não linearidades física e geométrica.

Barbieri, Gastal e Campos Filho (2006) e Barbieri (2003) elaboraram modelos numéricos a partir do elemento finito do tipo híbrido para pórticos planos. Quando se utiliza esse tipo de elemento é possível usar elementos longos, de forma que apenas um elemento finito possa representar um vão de viga ou pilar, reduzindo assim o esforço computacional. Na formulação, a função de interpolação representa a equação para as solicitações ao longo do

elemento, e as variáveis interpoladas são as forças. Este método é considerado exato, tanto para as forças quanto para as curvaturas, uma vez que a função resulta das condições de equilíbrio, não necessitando do uso de hipóteses arbitrárias. De acordo com Carol e Murcia (1989) essas funções de interpolação não se baseiam em expressões arbitrárias, mas sim nas condições de equilíbrio do elemento, por isso são consideradas teoricamente exatas.

Os pórticos planos analisados por Barbieri, Gastal e Campos Filho (2006) e Barbieri (2003) foram modelados com elementos finitos de dois nós e três graus de liberdade por nó. As propriedades de um elemento são definidas em um número discreto de pontos de integração ao longo do eixo do elemento. Todas as características do elemento são definidas nos pontos de integração. Relações constitutivas já consolidadas na literatura são utilizadas para os materiais. A cadeia de Maxwell de Bazant e Wu (1974) é usada para representar o comportamento reológico do concreto e do aço de protensão, respeitando as características do envelhecimento do material. O comportamento do concreto à compressão independente da ação do tempo é modelado pela equação de Saenz (Kabaila, Saenz e Tulin (1964)) em seu intervalo ascendente e seguida por um amolecimento linear até a ruptura.

Prates *et al.* (1995) obtiveram um modelo computacional, baseado no Método dos Elementos Finitos, para o estudo de estruturas de concreto armado e protendido sob condições de estado plano de tensões. Consideraram-se situações de carregamento de curto e longo prazo, também foram consideradas fluência e retração no concreto e relaxamento do aço. Modelos constitutivos elasto-viscoplásticos foram utilizados para descrever o comportamento dos materiais. O modelo inclui protensão em situação de pré e pós-tensão, utilizando tanto armadura aderente quanto armadura não aderente.

Lazzari, Campos Filho e Barbieri (2013) fizeram uma análise estrutural através de um modelo numérico que utiliza elementos finitos do tipo híbrido para pórticos planos, considerando a não linearidade geométrica, carregamentos cíclicos e construção composta. Nas rotinas computacionais implementadas foram consideradas as situações de protensão completa, limitada e parcial e verificados conforme cada caso, os estados limites de descompressão, de formação e de abertura das fissuras, além dos estados limites últimos finais e no ato da protensão.

Wu, Otani e Shiohara (2001) propuseram um modelo numérico utilizando MEF, capaz de representar a interação entre cordoalha e o concreto protendido. Este modelo é capaz de

simular o deslizamento da cordoalha dentro da bainha de forma a calcular a transferência da força de protensão e dimensionar estruturas com cordoalhas não engraxadas de forma mais eficiente. É proposto um modelo para representar o atrito e ligação na interface da cordoalha e do concreto. Ao usar esses modelos, é estabelecido um procedimento numérico para análises não lineares de materiais e geométricos de estruturas de concreto protendido, incluindo efeitos dependentes do tempo, como a retração e fluência do concreto e o relaxamento do aço de protensão. O procedimento pode prever as respostas de estruturas de concreto planas pré-tensionadas ou pós-tensionadas, tais como deformação elástica e plástica e fissuras.

El-Mezaini e Çitiptiöglu (1991) apresentam um modelo numérico em elementos finitos para a análise linear de elementos de placa utilizando uma abordagem discreta para as armaduras ativas ou passivas, com diferentes graus de aderência. As armaduras foram modeladas de maneira independente da malha de concreto através da utilização de elementos isoparamétricos com nós móveis. A malha de concreto é estabelecida ignorando-se a disposição da armadura. Com a definição do perfil do cabo, os pontos de interseção com os lados dos elementos de concreto são identificados, e os nós laterais centrais transladados. O processo de translação dos nós pode ser observado na Figura 2.1.

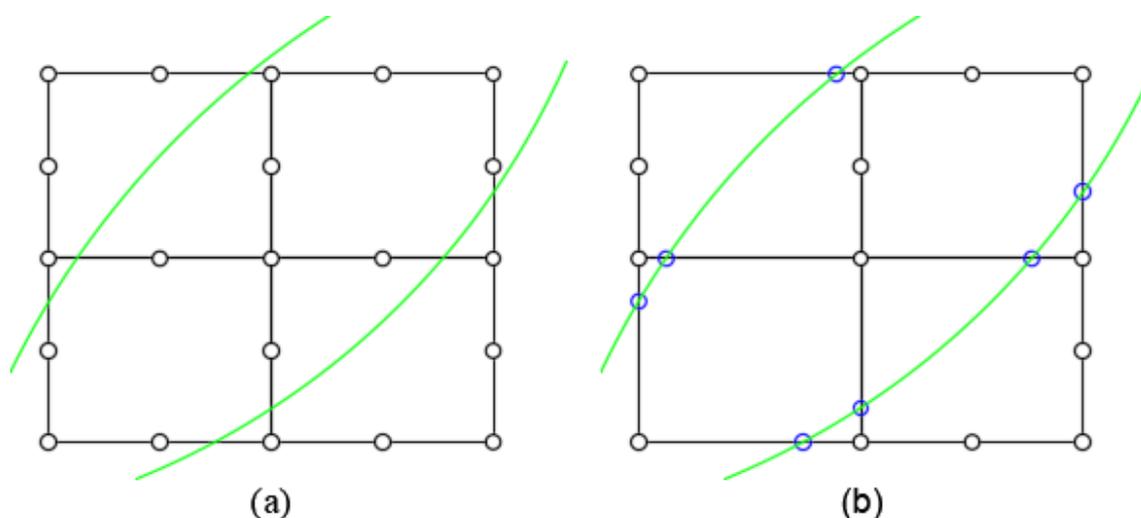


Figura 2.1: Translação dos nós: (a) posição original; (b) posição na interseção com os cabos (adaptado de El-Mezaini e Çitiptiöglu,1991)

Os autores utilizaram uma abordagem na qual se fez possível modelar qualquer grau de aderência. No caso de aderência perfeita, considera-se total acoplamento entre os nós de concreto e aço, com a coincidência dos graus de liberdade e a contribuição dos elementos de aço somada diretamente na matriz de rigidez global. No caso de armaduras não aderentes, as

matrizes de rigidez dos elementos de concreto e aço são calculadas separadamente. Na matriz de rigidez global, a contribuição dos elementos de aço na direção perpendicular ao perfil é somada aos graus de liberdade de concreto, enquanto na direção do perfil os graus de liberdade não acoplados formam novas equações. Para a aderência parcial, elementos unidimensionais especiais de mola são utilizados, unindo os nós de concreto e aço na direção do perfil. Com as molas, pode-se empregar modelos lineares ou não lineares de aderência, ou representar o efeito do atrito.

Alkhairi e Naaman (1993) apresentaram um modelo numérico de análise não linear para a determinação da tensão na armadura não aderente a partir da configuração deformada dos elementos protendidos, abrangendo todas as etapas de comportamento dos materiais. Os perfis de protensão e carregamentos devem ser simétricos, sendo permitidas armaduras passivas aderentes de tração e compressão, e armaduras protendidas aderentes e não aderentes. A influência da esbeltez à flexão é considerada através de um modelo de treliça.

Zhang, Fu e Che (2011) a fim de obterem a máxima tensão em cordoalhas engraxadas a partir de princípios mecânicos, em vez de usar a fórmula de ajuste de dados experimentais, desenvolveram um método avançado de análise não linear para calcular a tensão. O modelo de análise é estabelecido usando a teoria da placa de espessura média de Reissner-Mindlin permitindo a influência da deformação de cisalhamento transversal. O modelo constitutivo do incremento ortotrópico do concreto é estendido para resolver o problema da placa de espessura média. A formulação numérica do cálculo do incremento da tensão em uma cordoalha engraxada é estabelecida usando a relação de deslocamento espacial. Um programa de computador especificamente para prever a resposta não linear de uma estrutura de laje curva de concreto protendido e calcular a tensão final nessas cordoalhas foi desenvolvido pelos autores.

Com base no trabalho Bailey (1995), Huang, Burgess e Plank (1999) desenvolveram um elemento de casca não linear físico subdividido em camadas para representação do concreto e armaduras de aço. Antes da fissuração ou esmagamento, o concreto é considerado isotrópico, homogêneo e elástico linear. Um modelo de fissuração distribuída é adotado, no qual a fissuração é identificada quando as tensões principais atingem uma superfície de falha. Após a fissuração, o concreto é tratado como um material ortotrópico com eixos principais normais e paralelos à direção da fissura. O concreto paralelo à fissura é considerado capaz de resistir à tração e compressão com base em uma relação tensão-deformação uniaxial. Após o esmagamento, assume-se que o concreto perde toda sua resistência e rigidez. Huang, Burgess

e Plank (2003a) introduziram a não linearidade geométrica no modelo, possibilitando uma melhor representação do comportamento de membrana. Uma formulação lagrangeana total foi adotada, assumindo pequenas deformações. O elemento de casca com nove nós implementado tem por base as hipóteses de von Karmán (grandes deslocamentos e rotações moderadas).

Roca e Mari (1993a e 1993b) elaboraram um modelo numérico a partir de um elemento isoparamétrico com 9 nós e 5 graus de liberdade por nó para discretizar uma laje e conseguir fazer a análise geométrica e material não linear. Este elemento de casca é considerado como um sistema de várias camadas, no qual cada camada é suposta estar sob um estado biaxial de tensões. As tensões e o estado do material variam independentemente em cada camada para explicar as variações que ocorrem no processo de carregamento. A força da armadura passiva é tratada como um conjunto de camadas adicionais de comportamento uniaxial caracterizado por uma espessura equivalente. É utilizado um diagrama bilinear para modelar o comportamento desta armadura. Para fazer as análises não linear, foi utilizado métodos consagrados na literatura. Por exemplo, para modelar o comportamento a compressão do concreto foi utilizado um modelo biaxial de Darwing e Pecknold (1977).

2.2 PROTENSÃO

2.2.1 Breve histórico do concreto protendido

A ideia de protensão vem sendo utilizada desde antigamente. No Egito Antigo, os egípcios introduziam um estado prévio de tensão nas peças por meio de processos de deformações térmicas para realizar o encurtamento de lâminas de ferro pré-aquecidas para confeccionar embarcações (Gomes, 2009).

Outro exemplo do emprego de protensão é a confecção de barris de madeira. Como pode ser observado na Figura 2.2, os aros metálicos que possuem certo diâmetro são forçados, por um processo mecânico, a ocuparem uma seção transversal do barril de diâmetro superior ao seu. Assim, os aros são submetidos a esforços de tração e tendem a voltar à sua configuração inicial, gerando esforços radiais de compressão que forçam os gomos de madeira a manterem-se juntos. Através da imposição prévia de um estado de tensões é possível fazer com que as partes do barril se solidarizem e passem também a suportar a pressão hidrostática do líquido do interior do barril (Hanai, 2005).

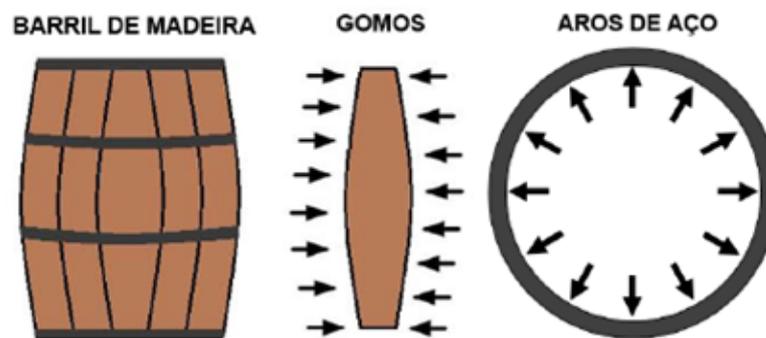


Figura 2.2: Barril de madeira sob ação de protensão circular do aro metálico (Hanai, 2005)

De acordo com Pfeil (1984), o conceito de protensão pode ser entendido como: “um artifício que consiste em introduzir numa estrutura um estado prévio de tensões capaz de melhorar sua resistência ou seu comportamento, sob diversas condições de carga”. A norma NBR 6118 (2014) define os elementos de concreto protendido como: “Aqueles nos quais parte das armaduras é previamente alongada por equipamentos especiais de protensão com a finalidade de, em condições de serviço, impedir ou limitar a fissuração e os deslocamentos da estrutura e propiciar o melhor aproveitamento de aços de alta resistência no estado limite último (ELU)”.

Segundo Veríssimo e César (1998), o concreto protendido foi aplicado pela primeira vez pelo engenheiro norte americano P. Jackson, em 1886, que utilizou o conceito de protensão em uma peça de concreto, ao pré-tracionar sua armadura. Ele desenvolveu e patenteou um método que utilizava um tirante de união para construir vigas e arcos com blocos individuais.

No final do século XIX, existiram várias tentativas para elaborar métodos de protensão, contudo, sem sucesso. Tais insucessos ocorreram devido aos fenômenos de fluência e retração do concreto que ainda eram desconhecidos e causavam a perda da protensão (Agostini, 1983).

Ainda segundo Veríssimo e César (1998), por volta de 1912, Koenen e Mörsch perceberam que a retração e fluência do concreto eram responsáveis pela perda de protensão em diversos casos ensaiados.

Em 1928, foi publicado o primeiro trabalho consistente sobre protensão pelo engenheiro francês Engène Freyssinet. Ele foi o responsável por introduzir aço de alta resistência para executar a protensão, e, por isso, ele é conhecido como “o pai’ do concreto protendido. Além disso, ele desenvolveu um estudo sobre os fenômenos da fluência e da retração no concreto, alcançando bons resultados acerca do comportamento do concreto protendido, fundamentando,

deste modo, o uso dos materiais de alta resistência para a manutenção da protensão ao longo do tempo (Mello, 2005).

A partir daí o desenvolvimento desse material evoluiu no mundo todo rapidamente. De acordo com Belletti e Gasperi (2010), o uso de estruturas protendidas vinha crescendo ao longo dos anos, especialmente nos EUA, Rússia e Alemanha, o que demonstra que a protensão pode representar tanto uma função estrutural importante, quanto uma vantagem econômica ao ser comparada com estruturas tradicionais (não protendidas).

A primeira obra realizada com utilização de concreto protendido foi projetada por Freyssinet, em 1941. Uma ponte rodoviária com um vão de 55 metros (Figura 2.3) sobre o rio Marne em Lucancy, no norte da França, que foi finalizada em 1945 (Gomes, 2009).



Figura 2.3: Ponte em Lucancy (<http://efreyssinet-association.com>, visitado em 08/09/2018)

Segundo Barbosa (2008), nos Estados Unidos o concreto protendido destacou-se na construção de estruturas com protensão circular, como em reservatórios cilíndricos. No Brasil, a primeira obra que utilizou o concreto protendido foi a Ponte do Galeão, em 1948, no Rio de Janeiro, ligando a Ilha do Governador até a Ilha do Fundão, com 380 metros de comprimento. Para esta construção, os equipamentos, materiais e sistemas de protensão foram importados da França (Cauduro, 1997). Em 1952 foi iniciada, no Brasil, a fabricação do aço de protensão pela Companhia Siderúrgica Belgo-Mineira (Bastos, 2014).

Nos dias atuais, há dois sistemas, baseados no momento em que ocorre a aplicação da força de protensão: o sistema com pré-tração, onde a tensão aplicada nos cabos é feita antes da concretagem do elemento estrutural, e o sistema com pós-tração, onde a força de protensão é aplicada após o concreto ter atingido uma resistência mínima que deve ser especificada pelo projeto.

Segundo a NBR 6118 (2014) os sistemas de protensão são classificados como: (i) protensão com aderência inicial; (ii) protensão com aderência posterior e (iii) protensão sem aderência. O primeiro sistema é muito usado para a fabricação de peças pré-moldadas de concreto, ocorre quando a armadura ativa é pré-tracionada e o seu pré-alongamento é feito por meio de apoios independentes do elemento estrutural.

A protensão com aderência é aplicada em diversos campos da construção civil, como em obras de pontes, grandes reservatórios de água, e coberturas de grandes vãos. Para a produção de peças por esse sistema, durante a montagem das fôrmas e armaduras, são instaladas também bainhas metálicas pelas quais os cabos de protensão irão passar. Após a concretagem e o concreto atingir certa resistência, os cabos de protensão que passam pela bainha são tracionados por meio de macacos hidráulicos. Então, é efetuada a ancoragem dos mesmos, utilizando-se dispositivos especiais. Para garantir a aderência entre os cabos, a bainha e todo o elemento estrutural de concreto é efetuada a injeção de nata de cimento no interior das bainhas de modo a preenchê-las completamente (Figura 2.4).

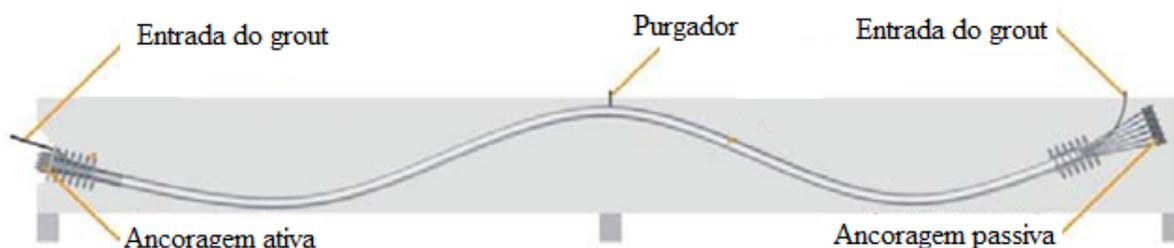


Figura 2.4: Representação esquemática de um cabo de cordoalhas aderentes em corte longitudinal (http://vswmcivil.blogspot.com/2018/03/blog-post_13.html - modificado, visitado 25/08/2018)

No sistema não aderente, as cordoalhas são envoltas por uma camada de graxa e bainhas de polietileno de alta densidade (Figura 2.5). A ligação entre as cordoalhas e o elemento estrutural ocorre apenas nas ancoragens. Esta protensão é feita com equipamentos leves, portáteis, de fácil manipulação e com operação rápida. Os cabos engraxados são leves e flexíveis, permitindo a colocação dos mesmos de forma simples e precisa mesmo com a

existência de curvas em sua disposição. A cordoalha é envolvida por uma graxa que permite o seu livre deslocamento, reduz perdas iniciais da força de protensão e protege quimicamente a armadura. Esse tipo de protensão é muito usado em edificações residenciais, comerciais, em fundações e em pisos industriais, onde as cordoalhas podem ser desviadas para a passagem de instalações, sendo permitidas grandes curvaturas dos cabos também no plano horizontal.



Figura 2.5: Montagem das cordoalhas engraxadas e plastificadas em laje nervurada de edifício comercial
(Fonte: próprio autor)

Por fim, segundo Veríssimo e César (1997), há várias vantagens em utilizar a protensão em estruturas de concreto, como por exemplo:

- Permite projetar seções mais esbeltas que no concreto armado convencional, sobretudo se o comportamento em serviço é um fator predominante, pois toda a seção de concreto pode trabalhar à compressão;
- Permite controlar a deformação elástica e limitá-la a valores menores que os que seriam obtidos para estruturas similares em aço ou concreto armado;
- Uma vez que diminui, ou até anula, as tensões de tração, principais responsáveis pela fissuração, proporciona melhores condições de durabilidade;
- A operação de protensão funciona como uma verdadeira prova de carga, pois as tensões introduzidas nessa fase são muito maiores que as correspondentes à situação da peça em serviço.

Por outro lado, algumas desvantagens podem ser relacionadas com o uso do concreto protendido:

- Exige melhor controle de execução do concreto de maior resistência;
- Exige cuidados especiais de proteção contra corrosão dos aços de alta resistência;
- A colocação dos cabos de protensão deve ter alta precisão para garantir as posições admitidas nos cálculos;
- Necessidade de equipamento e pessoal especializados, para controle de alongamentos dos cabos e dos esforços aplicados.

2.2.2 Lajes planas protendidas

As lajes lisas são lajes maciças apoiadas diretamente nos pilares, utilizando ou não o engrossamento na região de contato entre os pilares e a laje, quando é chamada de laje cogumelo. Apesar de poderem ser projetadas sem protensão elas geralmente utilizam esse recurso para poder vencer maiores vãos. A falha desse tipo de laje se dá pelo cisalhamento próximo à ligação laje-pilar (efeito de punção). Ao utilizar vigas-faixa protendidas ou engrossamento da laje, a resistência à punção pode ser melhorada. Segundo Emerick (2005), ao usar lajes planas protendidas o vão entre pilares pode variar entre 6 a 8 metros sem grandes problemas estruturais. Com a não utilização de vigas, os pilares não têm necessidade de estarem alinhados, nem de ficarem na parte externa do edifício, dando uma maior flexibilidade no lançamento, com vantagens na obtenção de varandas e fachadas mais simples para serem acabadas.

2.2.2.1 Distribuição dos cabos em planta

Numa laje lisa ou cogumelo, os esforços estão concentrados na região das faixas dos apoios, desta maneira é recomendável que haja uma maior concentração de cabos nessas regiões (Figura 2.6). Segundo Emerick (2005), próximos aos apoios deve ter uma concentração de 65% a 75% dos cabos, enquanto que na faixa central essa concentração é de 35% a 25% dos cabos.

Ao usar os cabos concentrados em certa região, como mostrado na Figura 2.6, ao invés de uma distribuição uniforme, obtém-se algumas vantagens, como: Maior aproximação com a distribuição de momentos na laje; Aumento da rigidez da peça à punção; Aumento da rigidez na ligação laje-pilar. Já a distribuição dos cabos igualmente nas duas direções simplifica

bastante a análise, pois em lajes simétricas o processamento pode ser feito numa única direção (Figura 2.7).

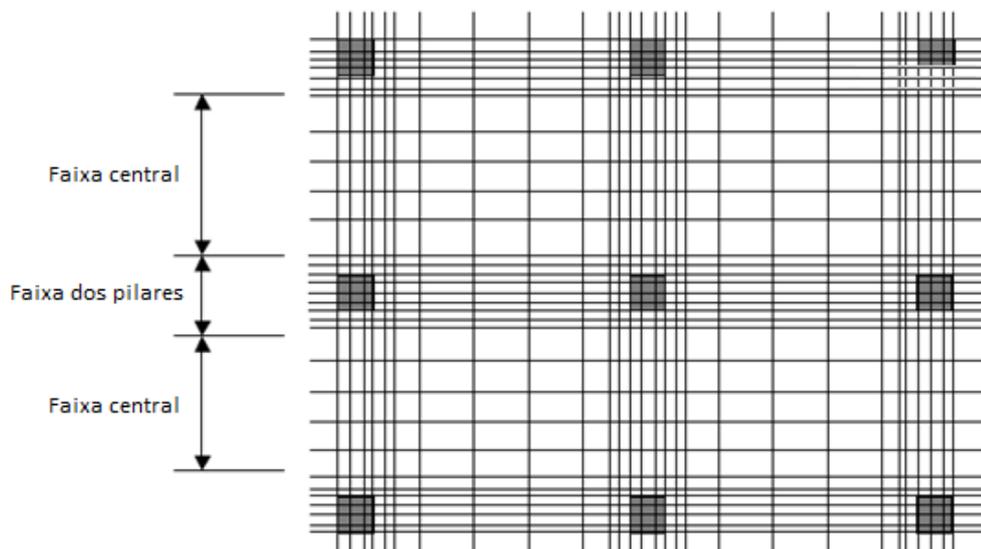


Figura 2.6: Distribuição dos cabos de protensão em uma laje plana (Emerick, 2005)

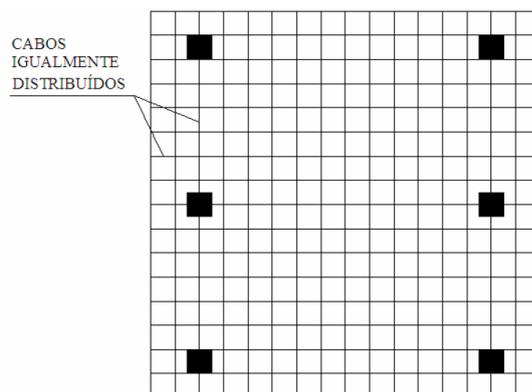


Figura 2.7: Distribuição de cabos uniforme (Milani, 2006)

2.2.2.2 Traçado vertical dos cabos

O traçado vertical dos cabos geralmente é parabólico, principalmente quando uma carga externa distribuída é equilibrada. De acordo com Emerick (2005), levando em consideração aspectos econômicos e de execução, é recorrente para lajes fazer com que os cabos possuam a máxima excentricidade, tanto na parte superior quanto na parte inferior da estrutura, desde que se atenda as condições impostas pela NBR 6118 (2014) de cobrimento mínimo. É ideal que a geometria dos cabos varie de acordo com os esforços externos, fazendo com que o perfil dos cabos acompanhe o diagrama de momentos fletores produzidos por este carregamento. A variação da curvatura ocorre no ponto de inflexão (Figura 2.8), que é uma parte do vão (αL), podendo o valor de α variar de 5% a 15%.

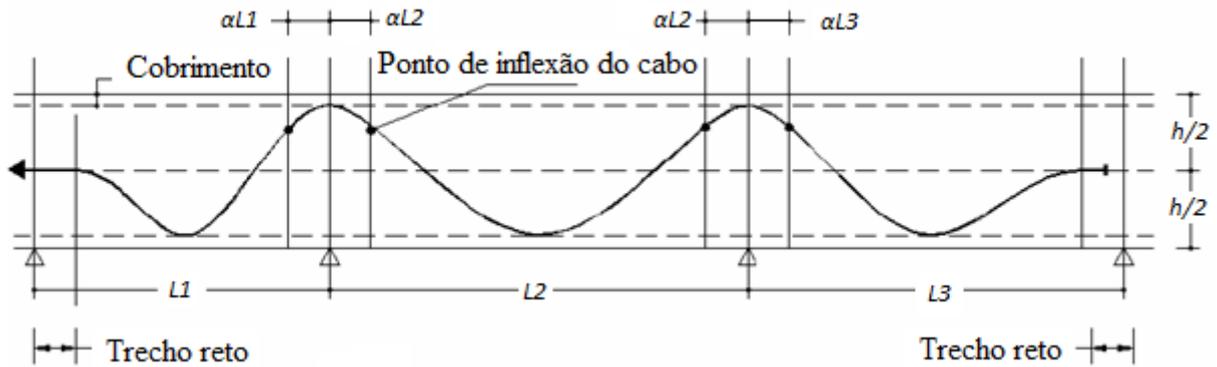


Figura 2.8: Traçado vertical do cabo em uma viga contínua esquemática (Emerick, 2005)

2.2.2.3 Perdas de protensão

As perdas de protensão são as perdas verificadas nos esforços aplicados aos cabos de protensão. Elas são classificadas em perdas imediatas e perdas ao longo do tempo. As perdas imediatas ocorrem durante a operação de protensão e ancoragem dos cabos e dividem-se em perdas por atrito, perdas por cravação, e perdas por deformação elástica.

Em geral, os cabos de protensão utilizados nas estruturas de concreto protendido têm em seu perfil longitudinal e em alguns casos, em seu perfil transversal, trajetórias curvas. Quando de seu estiramento durante a protensão, eles atiram contra a parede das bainhas metálicas em que estão inseridos provocando perdas na tensão inicial de protensão (Pfeil, 1980).

De acordo com a ABNT NBR 6118 (2014), as perdas por atrito nos elementos estruturais com pós-tração podem ser determinadas pela Equação 2.1, em que: $P_0(x)$ é a tensão atuante no cabo a uma distância x ; P_i é a tensão inicial aplicada na extremidade do cabo; μ é o coeficiente de atrito aparente (devido às variações angulares do cabo); k é o coeficiente de perdas por metro provocadas por curvas não intencionais do cabo, α é o somatório dos ângulos de inflexão do cabo. Para cordoalhas engraxadas temos, segundo fabricante (Cia. Siderúrgica Belgo Mineira): $\mu = 0,07 / \text{rad}$ e $k = 0,0035 \text{ rad/ m}$.

$$P_0(x) = P_i e^{-\mu(\sum \alpha + kx)} \quad (2.1)$$

As perdas por cravação da ancoragem ocorrem devido ao movimento de acomodação das cunhas quando da transferência do esforço do macaco para as placas de ancoragem. O valor da perda por cravação é fornecido pelo fabricante das ancoragens.

As perdas por deformação elástica do concreto ocorrem à medida que os cabos vão sendo protendidos e provocando encurtamentos elásticos na laje, causando perdas de tensão nos cabos já protendidos.

As perdas ao longo do tempo são perdas provocadas pelo encurtamento do concreto com o tempo e por quedas de tensão nos aços de alta resistência sob tensão elevada. Essas perdas são divididas em perdas por fluência e retração do concreto e relaxação do aço, as quais são definidas como apresentado a seguir:

(i) Perdas por fluência do concreto: o fenômeno da fluência corresponde ao crescimento assintótico ao longo do tempo, das deformações de um bloco de concreto comprimido sob tensão uniforme constante. De acordo com Rüsç (1981), a fluência do concreto deve ser atribuída à migração de água causada pela carga externa para as camadas de água absorvida da estrutura de gel, bem como o efeito das tensões capilares, ou seja, ao se aplicar a carga no concreto, existe uma distribuição da mesma pelo esqueleto do sólido e pela água dos poros;

(ii) Perdas por retração do concreto: trata-se aqui da chamada retração hidráulica, essencialmente ligada à perda de água, que ocorre principalmente nos primeiros anos de vida da obra. Segundo Kalintzis (2000) esta deformação está associada à perda de umidade para o meio ambiente o que a torna uma das principais causas de fissuração e faz com que assuma papel importante, pois sua ocorrência pode afetar a durabilidade do concreto;

(iii) Perdas por relaxação do aço: o fenômeno de relaxação corresponde à redução assintótica, ao longo do tempo, das tensões em um cabo de aço ao qual foi imposto um alongamento uniforme e permanente. O fenômeno de relaxação do aço de protensão é a perda de tensão da armadura ativa quando a mesma está submetida a elevadas tensões e, ancorada com comprimento constante (Pfeil, 1980). Segundo Cholfé e Bonilha (2013), os fatores mais importantes que influenciam no valor da relaxação do aço são suas características metalúrgicas, a tensão à qual ele está submetido e a temperatura ambiente.

Para a avaliação das perdas diferidas nos cabos deve-se considerar os efeitos da fluência e da retração na peça como um todo, obtendo-se os deslocamentos sofridos pelos pontos das ancoragens.

3 PERDAS DE PROTENSÃO

Neste capítulo são tratadas as perdas de protensão que ocorrem em estruturas de concreto protendido e como elas foram avaliadas na formulação desenvolvida neste trabalho. Primeiramente, estão descritas as perdas imediatas e, em seguida, as perdas ao longo do tempo.

3.1 PERDAS IMEDIATAS

Como o próprio nome diz, são as perdas que ocorrem no momento de aplicação das forças de protensão. Essas perdas dividem-se em perdas por atrito, encurtamento elástico do concreto e acomodação da ancoragem no concreto.

3.1.1 Perdas por atrito

Sob o ponto de vista construtivo, a protensão do cabo pode ser feita antes da concretagem e cura do concreto (peças pré-tracionadas) e após a concretagem e cura do concreto (peças pós-tracionadas).

As peças pré-tracionadas são construídas, geralmente, utilizando cabos retos, por processos industrializados. Como o estiramento do cabo é feito de modo livre, não há nenhuma perda da força de protensão durante a protensão do cabo.

Nas estruturas protendidas pós-tracionadas, a armadura de protensão é disposta em bainhas que são instaladas nas fôrmas da peça, antes da concretagem, por meio de espaçadores horizontais e verticais, que determinarão a posição do cabo.

Durante a execução da protensão, os cabos deslocam-se relativamente à bainha enquanto estão sendo esticados e, por consequência, ficam em contato com a superfície da bainha. Deste modo surgem resistências ao deslocamento longitudinal do cabo, de modo que o esforço aplicado na extremidade sofra uma redução em cada ponto.

A perda da força de protensão de um ponto da cordoalha para outro ponto pode ser determinado a partir do equilíbrio de um segmento de cordoalha.

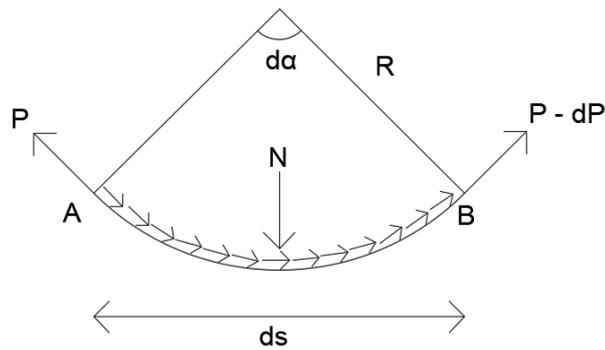


Figura 3.1: Esquema de forças de atrito sob cabo curvo infinitesimal

A equação de equilíbrio de forças para o segmento da Figura 3.1 pode ser expressa pela equação diferencial:

$$\frac{dP}{ds} = \pm \mu \chi P(s) \quad (3.1)$$

Na equação 3.1, μ é o coeficiente de atrito, χ é a curvatura do segmento de cordoalha, e P é a força de protensão na cordoalha. O sinal do segundo membro depende do sentido do movimento relativo entre a cordoalha e a bainha. A solução para essa equação diferencial relaciona a força de protensão entre dois pontos A e B da cordoalha, como apresentado na equação 3.2.

$$P(B) = P(A) \exp\left(\pm \mu \int_A^B \chi ds\right) \quad (3.2)$$

A curvatura de um determinado ponto da cordoalha é determinada de acordo com a equação 3.3, onde y é a equação que define o perfil longitudinal do cabo. Neste trabalho admite-se a possibilidade de uma curva analítica senoidal para y , ou aproximações por trechos parabólicos a partir de três nós que definem o perfil longitudinal do cabo.

$$\chi = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.3)$$

Para o perfil longitudinal do cabo de protensão dado por uma função senoidal, são fornecidos como dados de entrada os coeficientes a e b da função dada na equação 3.4.

$$y = a \sin(bx) \quad (3.4)$$

No caso de um cabo com perfil longitudinal qualquer, faz-se uma aproximação por uma sequência de parábolas a partir das coordenadas, fora do plano da laje ou do eixo da viga, dos nós dos elementos de interface que representam a posição do cabo de protensão. Para se determinar a curvatura do ponto médio do elemento i do cabo de protensão, mostrado na Figura 3.2, utilizam-se os nós i , $i+1$ e $i+2$. Em posse das coordenadas destes três nós, um sistema linear é resolvido para encontrar os coeficientes de uma função do segundo grau que passa por estes três nós. Ao se calcular a equação da curvatura para o último elemento do cabo de protensão, são utilizados os dois nós desse último elemento e um nó do penúltimo elemento.

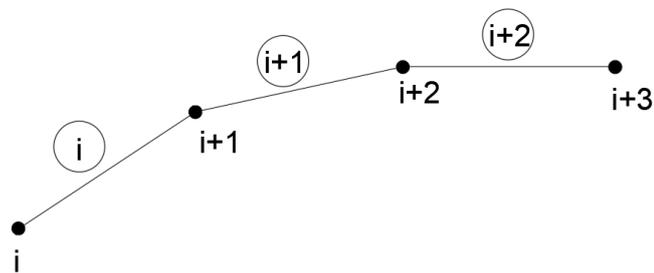


Figura 3.2: Elementos a serem utilizados na interpolação

Então, a força de protensão em um determinado ponto do cabo de protensão é calculada descontando-se, da força inicialmente aplicada no cabo, a perda de atrito que ocorre entre a ancoragem e este ponto.

3.1.2 Perdas por acomodação da ancoragem

Nas peças pré-tracionadas, o esforço de protensão é transmitido diretamente ao concreto, não havendo perdas por atrito nem por acomodação da ancoragem. Nas peças pós-tracionadas, ao final da etapa de protensão, o esforço aplicado pelo macaco hidráulico precisa ser transferido para o cabo de protensão e ancorado. Essa transferência acontece normalmente através de um dispositivo formado por cunhas de aço, que fazem a ancoragem do cabo em placas projetadas para essa finalidade.

Nesse processo de encunhamento, ocorre uma acomodação dos cabos nas cunhas, quando da penetração das cunhas nos furos, com redução do alongamento do cabo de protensão da ordem de 6 a 12 mm. Isto implica numa redução da força de protensão do cabo, constituindo o que se chama de perda de protensão por acomodação da ancoragem.

Se não existisse o atrito entre o cabo e a bainha, essa redução do alongamento e, conseqüentemente, do esforço de protensão seriam diluídos ao longo de todo o cabo. Entretanto, devido ao atrito que ocorre no sentido inverso àquele da protensão, esse esforço é dissipado apenas num trecho próximo à ancoragem.

Dessa forma o esforço de protensão junto à ancoragem, bem como o comprimento no qual ocorre a perda de protensão por acomodação da ancoragem precisam ser determinados. Existem, na bibliografia, algumas formas de determinar essas variáveis. Do ponto de vista de implementação computacional, uma abordagem simples pode ser dada através da analogia do problema de cálculo da área do diagrama da perda da força de atrito, $P(s)$, pelo comprimento da cordoalha, s , como mostrado na Figura 3.3.

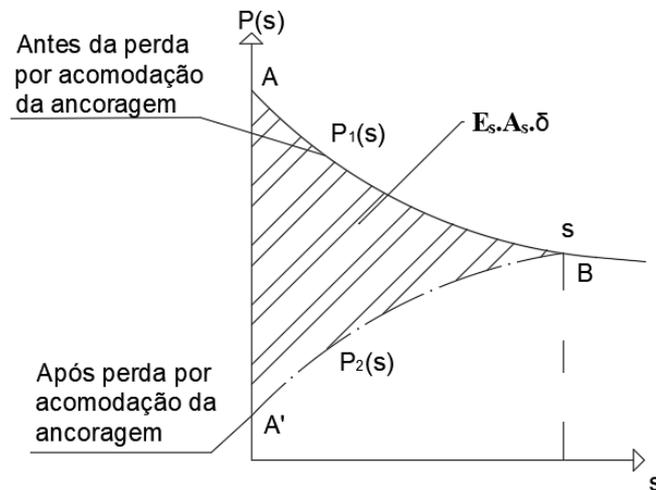


Figura 3.3: Variação da força na armadura após perdas de protensão por atrito e acomodação da ancoragem

$$\delta = \int_0^s \Delta \varepsilon(s) ds \quad (3.5)$$

$$\varepsilon(s) = \frac{P(s)}{A_s E_s} \quad (3.6)$$

$$A_s E_s \delta = \int_0^s (P_1(s) - P_2(s)) ds \quad (3.7)$$

Nas Equações 3.5 a 3.7: δ é a distância da penetração da cunha na ancoragem, A_s é a área da cordoalha de aço, $\varepsilon(s)$ é a deformação específica, E_s é o módulo de elasticidade do aço

e $\int_0^s (P_1(s) - P_2(s)) ds$ é igual à área hachurada mostrada na Figura 3.3.

A solução do problema consiste em encontrar o comprimento s necessário para que a área hachurada seja igual ao primeiro membro da equação 3.7. Para isto, esta equação é resolvida percorrendo todos os nós de uma cordoalha até que a igualdade seja verdadeira. Para resolver este problema, é arbitrado o comprimento inicial s como a distância entre o ponto de ancoragem e o segundo nó do primeiro elemento de barra. Então, a integral é resolvida e comparada com o primeiro termo da equação 3.7. Caso o valor da integral seja menor, o novo comprimento s é a distância da ancoragem até o segundo nó do próximo elemento do cabo de protensão. Esse processo é repetido até que: (i) o valor da integral seja maior ou igual ao primeiro termo da equação 3.7; ou (ii) todo o cabo seja percorrido sem obter uma posição s em que o valor da integral seja maior ou igual ao primeiro termo da equação 3.7.

Para o caso (i) discutido no parágrafo anterior, após encontrar o valor de s na iteração i , é feita mais uma iteração sendo o comprimento s a média dos comprimentos da iteração $i-1$ e i . Caso o valor da integral neste caso seja maior que o primeiro termo da equação, considera-se que a perda por cravação irá até o comprimento s da iteração $i-1$. Caso contrário, o comprimento s será o da iteração i . Após encontrado o comprimento s , é calculada a nova força de protensão considerando a perda por cravação para cada elemento dentro desse comprimento. A Figura 3.4 ilustra como é feito o processo para encontrar este comprimento s e a equação 3.8 é usada para calcular essa nova força de protensão no elemento dentro da região de perda por cravação.

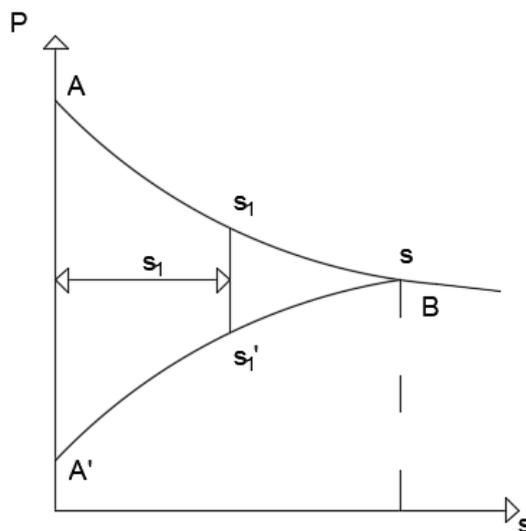


Figura 3.4: Cálculo da força de protensão após perdas

$$P(s_1') = P(s_1) - 2[P(s_1) - P(s)] \quad (3.8)$$

Para o caso (ii) discutido anteriormente, é calculada a área hachurada, A_1 , da Figura 3.5 dada abaixo. Observa-se a partir dessa figura que a perda por cravação é significativa comparada com a perda por atrito, e por isso ela se estende ao longo de todo o cabo de protensão. Ou seja, todos os elementos do cabo terão suas forças de protensão influenciadas pela perda por cravação.

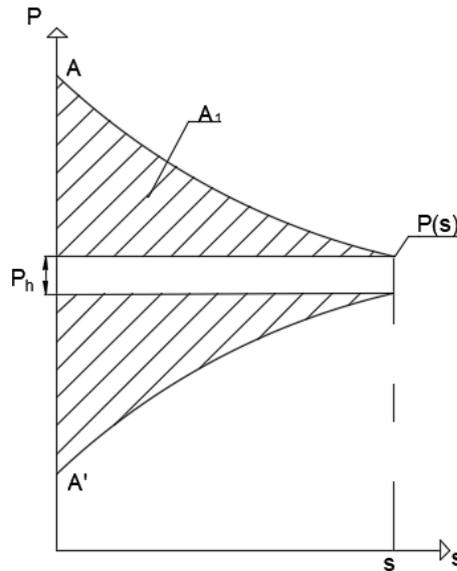


Figura 3.5: Caso particular de cálculo de força de protensão após perdas

$$A_1 = 2 \left(\int_0^s P(s) ds - P(s)s \right) \quad (3.9)$$

$$P_h = \frac{E_s A_s \delta - A_1}{s} \quad (3.10)$$

Para o caso (ii), a equação 3.11 é utilizada para calcular a força de protensão em todos os elementos do cabo de protensão. Onde P_h é obtido conforme equação 3.10 e A_1 de acordo com a equação 3.9.

$$P(s_1') = P(s_1) - 2(P(s_1) - P(s)) - P_h \quad (3.11)$$

3.2 PERDAS DIFERIDAS DO CONCRETO

Nesta subseção serão estudadas as propriedades reológicas de fluência e retração do concreto que, são de suma importância para a aferição das tensões em serviço atuantes nas estruturas protendidas. Para se chegar às suas formulações finais, serão introduzidos conceitos

normativos de algumas variáveis que influenciam seus resultados. Tais formulações são válidas para concretos estruturais que atendem aos requisitos da norma brasileira NBR 8953 (2015).

3.2.1 Idade fictícia do concreto

Chama-se de idade fictícia do concreto, uma correlação matemática que visa ajustar as propriedades reológicas do concreto para os casos em que seu endurecimento ocorre em temperaturas diferentes de 20°C e, tem influência nos efeitos das deformações causadas por retração e fluência do concreto. Tal formulação não se aplica, porém, a concretos submetidos a cura a vapor. De acordo com Pereira (1987), devido ao fato de ocorrer variação de temperatura durante a execução da obra é recomendado um cálculo levando em conta 20°C de variação sempre a favor da segurança. Define-se então que a idade corrigida do concreto, segundo a NBR 6118 (2014) é:

$$t = \alpha \sum \frac{T_i + 10}{30} \Delta t_{ef,i} \quad (3.12)$$

Em que t é a idade fictícia do concreto, em dias; α é o coeficiente dependente da velocidade de endurecimento do cimento; T_i é a temperatura média diária do ambiente, em graus Celsius; e $\Delta t_{ef,i}$ é o período, em dias, durante o qual a temperatura média diária do ambiente T_i pode ser admitida constante.

3.2.2 Espessura fictícia da peça

Chama-se de espessura fictícia da peça, a espessura de uma parede, com as duas faces em contato com a atmosfera, que sofre o mesmo efeito das deformações por retração e fluência do concreto que a peça estudada, multiplicada por um coeficiente que reflete a influência da umidade relativa do ar sobre os citados efeitos (Pfeil,1983). Sua formulação matemática é proposta pela norma brasileira NBR 6118 (2014) como sendo:

$$h_{fic} = \gamma \frac{2A_c}{u_{ar}} \quad (3.13)$$

Em que h_{fic} é a espessura fictícia da peça de concreto; γ é o coeficiente dependente da umidade relativa do ar, dado pela equação 3.14; U é umidade relativa do ar, em porcentagem; e u_{ar} é o perímetro externo da seção transversal da peça em contato com o ar.

$$\gamma_U = 1 + \exp(-7,8 + 0,1U) \quad (3.14)$$

3.2.3 Hipóteses básicas para análise da fluência

Para o cálculo das deformações por fluência no concreto, quando das tensões em serviço, admitem-se as seguintes hipóteses conforme a norma brasileira NBR 6118 (2014):

- a) A deformação por fluência do concreto, ε_{cc} , varia linearmente com a tensão aplicada;
- b) Para acréscimos de tensão aplicados em instantes distintos, os respectivos efeitos de fluência se superpõem;
- c) A deformação rápida produz deformações constantes ao longo do tempo; os valores de coeficiente, φ_a , são função da relação entre a resistência do concreto no momento da aplicação da carga e a sua resistência final;
- d) O coeficiente de deformação lenta reversível, φ_d , depende apenas da duração do carregamento; o seu valor final e o seu desenvolvimento ao longo do tempo são independentes da idade do concreto no momento da aplicação da carga;
- e) O coeficiente de deformação lenta irreversível, φ_f , depende da umidade relativa do ambiente, consistência do concreto no lançamento, espessura fictícia da peça, idade fictícia do concreto no instante t_0 da aplicação da carga e da idade fictícia do concreto no instante considerado t .
- f) Para o mesmo concreto, as curvas de deformação lenta irreversível, em função do tempo, correspondentes às diferentes idades do concreto no momento do carregamento, são obtidas, umas em relação às outras, por deslocamento paralelo ao eixo das deformações.

3.2.4 Valor da deformação por fluência do concreto

A deformação devido à fluência do concreto é proporcional à deformação imediata devido aos carregamentos permanentes como apresentada na equação 3.15 (NBR 6118, 2014). Para associar essa proporcionalidade às variáveis de umidade relativa do ar, fator água-cimento na mistura do concreto, entre outras, são utilizadas as equações 3.16 a 3.27 no cálculo desse fator de proporcionalidade.

$$\varepsilon_{cc}(t, t_0) = \frac{\sigma_c}{E_{c28}} \varphi(t, t_0) \quad (3.15)$$

$$E_{c28} = 5600 \sqrt{f_{ck}} \quad (3.16)$$

$$\varphi(t, t_0) = \varphi_a + \varphi_{f\infty} [\beta_f(t) - \beta_f(t_0)] + \varphi_{d\infty} \beta_d \quad (3.17)$$

$$\varphi_a = 0,8 \left[1 - \frac{f_c(t_0)}{f_c(t_\infty)} \right] \quad (3.18)$$

$$\varphi_{f\infty} = \varphi_{1c} \varphi_{2c} \quad (3.19)$$

$$\varphi_{1c} = 4,45 - 0,035U \quad (3.20)$$

$$\varphi_{2c} = \frac{42 + h_{fic}}{20 + h_{fic}} \quad (3.21)$$

$$\beta_d(t) = \frac{t - t_0 + 20}{t - t_0 + 70} \quad (3.22)$$

$$\beta_f(t) = \frac{t^2 + At + B}{t^2 + Ct + D} \quad (3.23)$$

$$A = 42h_{fic}^3 - 350h_{fic}^2 + 588h_{fic} + 113 \quad (3.24)$$

$$B = 768h_{fic}^3 - 3060h_{fic}^2 + 3234h_{fic} - 23 \quad (3.25)$$

$$C = -200h_{fic}^3 + 13h_{fic}^2 + 1090h_{fic} + 183 \quad (3.26)$$

$$D = 7579h_{fic}^3 - 31916h_{fic}^2 + 35343h_{fic} + 1931 \quad (3.27)$$

Nas equações 3.15 a 3.27, $\varepsilon_{cc}(t, t_0)$ é a deformação devido à fluência do concreto; σ_c é a tensão atuante na peça; E_{c28} é o módulo de elasticidade tangente inicial do concreto aos 28 dias; $\varphi(t, t_0)$ é o coeficiente de fluência; φ_a é o coeficiente de deformação rápida irreversível; $\varphi_{f\infty}$ é o coeficiente de deformação lenta irreversível em função da espessura fictícia da peça e umidade relativa do ar; $\beta_f(t)$ ou $\beta_f(t_0)$ é o coeficiente de deformação lenta irreversível em função da espessura fictícia da peça e idade do concreto; t é idade fictícia do concreto no instante considerado, em dias; t_0 é idade fictícia do concreto ao ser feito o carregamento, em dias; $\varphi_{d\infty}$ é o coeficiente de deformação lenta reversível, considerado igual a 0,4; β_d é o coeficiente de deformação lenta reversível em função do tempo $(t - t_0)$ decorrido após o carregamento;

$f_c(t_0)/f_c(t_\infty)$ é a função do crescimento da resistência do concreto com a idade; φ_{1c} é a parcela do coeficiente de deformação lenta irreversível que depende da umidade relativa do ar e da consistência do concreto. Equação válida para abatimentos entre 5 cm e 9 cm. Para valores de abatimento entre 0 cm e 4 cm, com $U \leq 90\%$, considerar 25% menor do que o calculado pela equação. Para valores de abatimento entre 10 cm e 15 cm, com $U \leq 90\%$, considerar 25% maior do que o calculado pela equação; φ_{2c} é a parcela do coeficiente de deformação lenta irreversível que depende da espessura fictícia da peça; A, B, C e D são coeficientes da função β_f .

3.2.5 Hipóteses básicas para análise da retração

Para o cálculo das deformações por retração no concreto, admitem-se as seguintes hipóteses presentes da norma brasileira NBR 6118 (2014): a deformação por retração do concreto depende somente da umidade relativa do ambiente, da consistência do concreto no instante de seu lançamento, da espessura fictícia da peça e da idade fictícia do concreto.

3.2.6 Valor da deformação por retração do concreto

A deformação devido à retração do concreto entre os instantes t e t_0 é uma fração da deformação máxima por retração que poderia ocorrer no concreto como apresentada pela Equação 3.28 (NBR 6118, 2014). Para determinar o quão próxima dessa deformação máxima é a deformação no concreto para determinadas condições, utilizam-se as equações 3.29 a 3.37 para levar em consideração as variáveis que influenciam nesse fenômeno, como, por exemplo, umidade relativa do ar, trabalhabilidade do concreto, entre outras.

$$\varepsilon_{cs}(t, t_0) = \varepsilon_{cs\infty} [\beta_s(t) - \beta_s(t_0)] \quad (3.28)$$

$$\varepsilon_{cs\infty} = \varepsilon_{1s} \varepsilon_{2s} \quad (3.29)$$

$$10^4 \varepsilon_{1s} = -8,09 + \frac{U}{15} - \frac{U^2}{2284} - \frac{U^3}{133765} + \frac{U^4}{7608150} \quad (3.30)$$

$$\varepsilon_{2s} = \frac{33 + 2h_{fic}}{20,8 + 3h_{fic}} \quad (3.31)$$

$$\beta_s = \frac{\left(\frac{t}{100}\right)^3 + A\left(\frac{t}{100}\right)^2 + B\left(\frac{t}{100}\right)}{\left(\frac{t}{100}\right)^3 + C\left(\frac{t}{100}\right)^2 + D\left(\frac{t}{100}\right) + E} \quad (3.32)$$

$$A = 40 \quad (3.33)$$

$$B = 116h_{fic}^3 - 282h_{fic}^2 + 220h_{fic} - 4,8 \quad (3.34)$$

$$C = 2,5h_{fic}^3 - 8,8h_{fic} + 40,7 \quad (3.35)$$

$$D = -75h_{fic}^3 + 585h_{fic}^2 + 496h_{fic} - 6,8 \quad (3.36)$$

$$E = -169h_{fic}^4 + 88h_{fic}^3 + 584h_{fic}^2 - 39h_{fic} + 0,8 \quad (3.37)$$

Nas equações 3.31 a 3.40, $\varepsilon_{cs}(t, t_0)$ é a deformação devido a retração do concreto; $\varepsilon_{cs\infty}$ é o valor final da retração; ε_{ls} é o coeficiente dependente da umidade relativa do ambiente e da consistência do concreto. Equação válida para abatimentos entre 5 cm e 9 cm. Para valores de abatimento entre 0 cm e 4 cm, com $U \leq 90\%$, considerar 25% menor do que o calculado pela equação. Para valores de abatimento entre 10 cm e 15 cm, com $U \leq 90\%$, considerar 25% maior do que o calculado pela equação; ε_{2s} é o coeficiente dependente da espessura fictícia da peça; $\beta_s(t)$ ou $\beta_s(t_0)$ é o coeficiente relativo à retração em função da espessura fictícia da peça e idade do concreto; e A, B, C, D e E são os coeficientes da função β_s .

3.2.7 Implementação dentro do Programa Desenvolvido

As deformações devido à fluência e retração tratadas nos itens anteriores foram inseridas nas implementações adicionais realizadas nos elementos para análise não linear de placa e vigas implementados em trabalhos anteriores dentro do FEMOOP.

Para o cálculo das deformações são utilizadas todas as equações descritas nos itens anteriores. Para isso, o usuário deve fornecer todos os dados necessários para a análise dessas equações, os quais são: coeficiente dependente da velocidade de endurecimento do cimento; idade do concreto ao ser feito o carregamento; temperatura média diária do ambiente; o período durante o qual a temperatura média diária do ambiente é admitida constante; umidade relativa do ar; e o perímetro e área da peça.

Após o cálculo das deformações essas são atribuídas a todos os elementos de placa e viga de concreto da estrutura analisada. Essa deformação entra como uma deformação inicial que é somada com as deformações devido aos carregamentos. Ela também gera um carregamento adicional no sistema quando esse é hiperestático, ou seja, não permite essas deformações ocorrerem livremente.

3.3 DEFORMAÇÕES NA ARMADURA

Quando a armadura é solicitada de forma que não exista impedimento à livre deformação do concreto, a deformação da armadura corresponde a:

$$\varepsilon_s(t) = \frac{\sigma_s(t_0)}{E_s} + \frac{\sigma_s(t_0)}{E_s} \chi(t, t_0) \quad (3.41)$$

Em que $\frac{\sigma_s(t_0)}{E_s}$ é a deformação imediata, por ocasião do carregamento; $\frac{\sigma_s(t_0)}{E_s} \chi(t, t_0)$ é a deformação por fluência, ocorrida no intervalo de tempo (t, t_0) e considerada sempre que $\sigma_s(t_0) > 0,5f_{ptk}$.

Quando a livre deformação por fluência é impedida e exista variação de tensão ao longo de um intervalo, induzida por ações externas ou agentes de diferentes propriedades, a deformação no aço pode ser obtida por:

$$\varepsilon_s(t) = \frac{\sigma_s(t_0)}{E_s} + \frac{\sigma_s(t_0)}{E_s} \chi(t, t_0) + \frac{\Delta\sigma_s(t, t_0)}{E_s} [1 + \chi(t, t_0)] \quad (3.42)$$

Em que $\Delta\sigma_s(t, t_0)$ é a variação total de tensão na armadura, no intervalo (t, t_0) .

4 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Os elementos finitos que estão apresentados no presente trabalho foram implementados computacionalmente por Silva (2010) na plataforma de elementos finitos chamada FEMOOP desenvolvida por Guimarães (1992). Esse programa foi desenvolvido na linguagem de programação C++ utilizando o conceito de programação orientada a objetos (POO), o que torna possível trabalhar com classes, permitindo assim, a criação de novos elementos sem o conhecimento total da estrutura do programa.

É apresentada na Figura 4.1 a discretização de uma laje de concreto protendida em elementos finitos planos de casca e elementos de interface. Nessa figura a laje tem apoios simples nas extremidades perpendiculares à direção dos cabos de protensão e é livre no restante de seu contorno. Dessa forma, a laje tende a flexionar apenas no plano xz da figura.

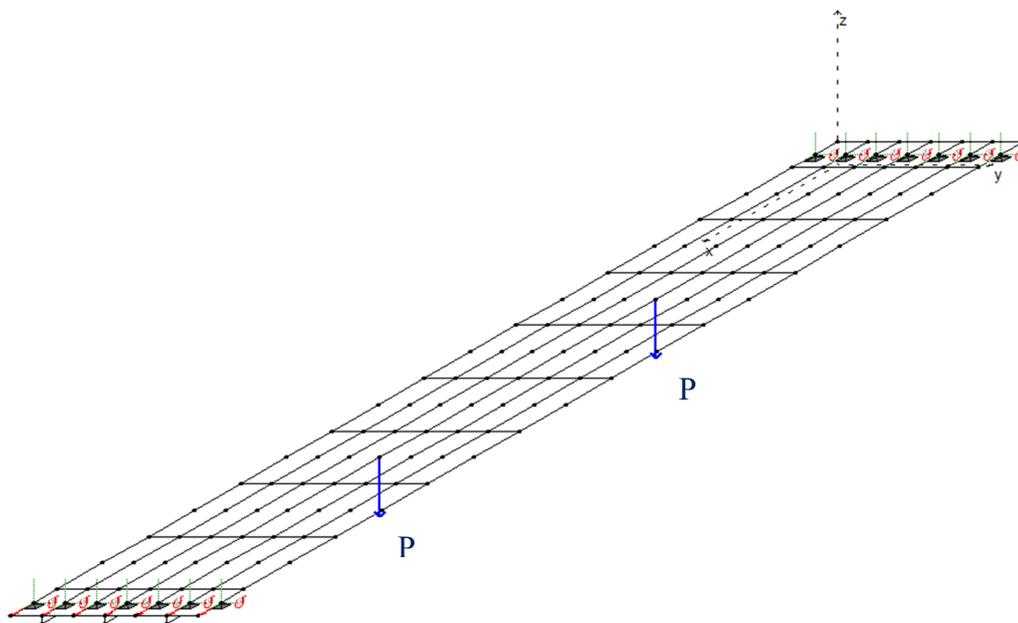


Figura 4.1 - Modelo de laje protendida implementada

É detalhada na Figura 4.2 a utilização dos elementos finitos descritos no parágrafo anterior na simulação numérica de uma laje protendida. Observa-se a partir dessa figura que os elementos finitos planos de casca são utilizados para modelar a laje de concreto. Para modelar a interface cordoalha-concreto é utilizado um elemento de interface. Como o elemento de interface tem, além da função de simular um possível deslizamento entre o cabo de protensão e a laje de concreto, a função de posicionar o cabo em relação ao plano médio da placa de concreto, existe, portanto, um elemento de interface sempre associado a um elemento de cabo. Logo, pode-se utilizar o elemento de interface para simular a deformação axial do elemento de

cabo, dispensando a utilização de um elemento de treliça para essa função. A rigidez da conexão entre os elementos depende do tipo de cordoalha a ser utilizada e, também, do ponto onde as cordoalhas estão ancoradas.

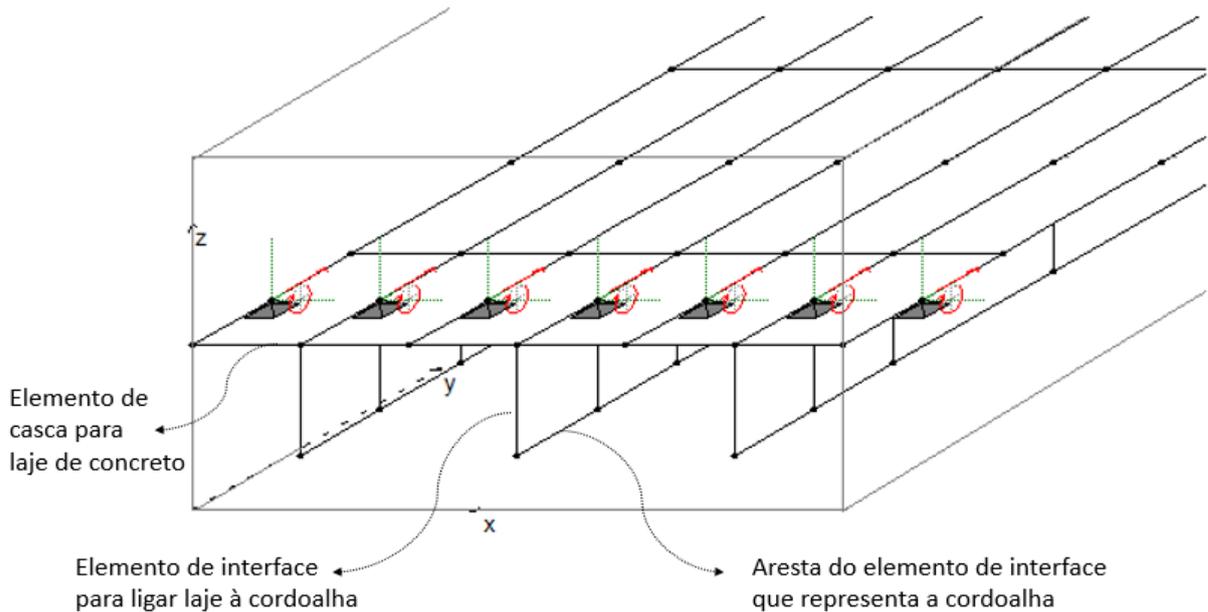


Figura 4.2 - Representação dos elementos utilizados

Nos itens seguintes são apresentadas as formulações dos elementos utilizados na simulação numérica de lajes e vigas protendidas, os quais são: elemento plano de casca, elemento de barra, e elemento de interface. O elemento plano de casca foi implementado por Silva (2010) sendo posteriormente utilizado e modificado por Dias (2016) e Silva (2018). O elemento de barra foi implementado por Silva (2010). Ambos os elementos sofreram pequenas alterações nesse trabalho para permitir a possibilidade de análise do efeito de retração e fluência nos elementos de barra e placa de concreto. Já o elemento de interface é baseado no elemento de interface de Silva (2010), porém teve sua formulação e implementação como um novo elemento no FEMOOP durante o desenvolvimento desse trabalho. Dessa forma, o elemento de interface é apresentado nesse trabalho de forma mais detalhada do que os elementos planos de casca e barra.

4.1 ELEMENTO PLANO DE CASCA

O elemento finito plano de casca implementado para a análise não linear de lajes em concreto armado possui nove nós e cinco graus de liberdade por nó a nível local, sendo os graus de liberdade de translação na direção z , de rotação em torno dos eixos x e y (típicos dos elementos de placa) e os graus de liberdade de translação nas direções x e y , como mostrado na

Figura 4.3. Devido à independência entre os graus de liberdade de deslocamentos transversais com os de rotação a formulação descrita nesse item considera a deformação por cortante, sendo, portanto, aplicável a placas espessas. No caso de placas delgadas deve-se ter atenção em erros numéricos na análise de placa com efeito de cortante muito pequeno, efeito esse descrito na literatura por travamento por cisalhamento. Para evitar isso, pode-se refinar a malha de análise e utilizar uma integração reduzida na análise da parcela referente à deformação por cortante.

Assim como no trabalho de Huang, Burgess e Plank (2003a), a não linearidade física é considerada dividindo a seção em várias camadas e considerando para cada uma dessas as características descritas a seguir:

- Os elementos são compostos por camadas de aço ou de concreto. O deslizamento entre as camadas é impedido.
- Cada camada pode possuir propriedades mecânicas diferentes e relações tensão-deformação independentes.
- As barras de reforço são consideradas como uma camada equivalente de aço com rigidez apenas na direção da barra. A camada de aço deve ter a mesma área que a área total das barras de reforço. A conexão entre as camadas de aço e de concreto é considerada perfeita.
- As camadas de concreto estão em estado plano de tensões e o concreto é considerado ortotrópico após a fissuração.

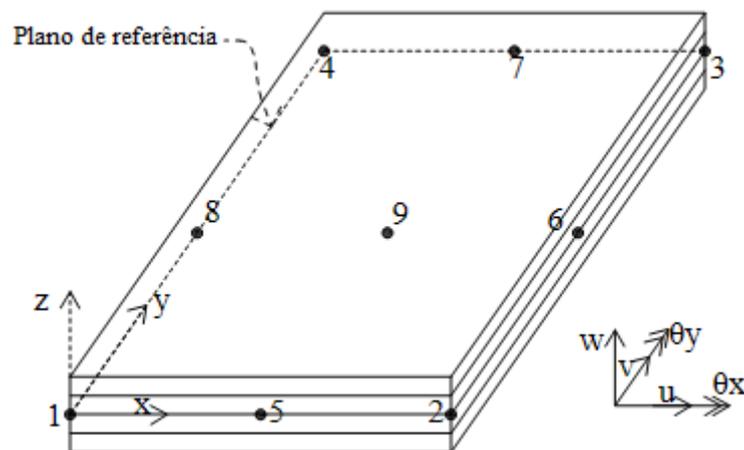


Figura 4.3 - Elemento plano de casca de nove nós dividido em camadas (Dias, 2016)

De acordo com as hipóteses cinemáticas da teoria de placas de Reissner-Mindlin seções inicialmente planas e ortogonais na configuração indeformada, permanecem planas após deformações, porém não mais ortogonais. As equações dos deslocamentos para o elemento são:

$$u(x,y,z) = u^0(x,y) + z\theta_y(x,y), \quad (4.1)$$

$$v(x,y,z) = v^0(x,y) - z\theta_x(x,y), \text{ e} \quad (4.2)$$

$$w(x,y,z) = w^0(x,y). \quad (4.3)$$

Em que: u^0 , v^0 e w^0 representam as translações do plano de referência do elemento plano de casca nas direções x , y e z ; θ_x e θ_y são as rotações das seções em relação aos eixos x e y ; e z é a posição da fibra em relação à superfície média ao longo da espessura do elemento plano de casca onde se deseja avaliar os deslocamentos. Para facilitar a notação, o sobrescrito zero será omitido nas equações seguintes.

Aplicando as Equações 4.1 a 4.3 a relação deformação-deslocamento de Green-Lagrange ($\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j})$) e desprezando a variação de w com z , obtêm-se as equações das deformações dadas pelas Equações 4.4 a 4.8. Às equações referentes à deformação linear específicas foram somadas as deformações iniciais referentes à deformação por retração e fluência (ε_0) do concreto.

$$\varepsilon_x = u_{,x} + z\theta_{y,x} + \frac{1}{2}(w_{,x})^2 + \varepsilon_0 \quad (4.4)$$

$$\varepsilon_y = v_{,y} - z\theta_{x,y} + \frac{1}{2}(w_{,y})^2 + \varepsilon_0 \quad (4.5)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}(u_{,y} + z\theta_{y,y} + v_{,x} - z\theta_{x,x} + w_{,x}w_{,y}) \quad (4.6)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}(\theta_y + w_{,x}) \quad (4.7)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}(-\theta_x + w_{,y}) \quad (4.8)$$

Uma não linearidade física é observada nas equações 4.4 e 4.5. Outra não linearidade do problema é definida pelas curvas tensão-deformação do concreto sob esforços de compressão e tração. Para o concreto sob compressão é utilizada a curva definida pelo Comitê Europeu de Concreto (CEB, 2010), mostrada na Figura 4.4. Essa curva é muito próxima à curva definida pela NBR 6118 (2014), diferenciando na parte após o início do esmagamento do concreto, onde no modelo do CEB é considerado um amolecimento do concreto, enquanto que no modelo da NBR 6118 a tensão se mantém constante para um aumento de deformação até perda total da capacidade resistente do material.

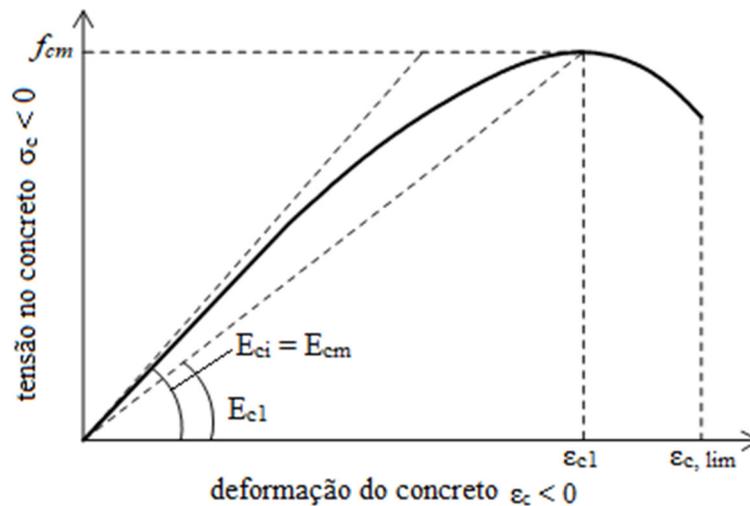


Figura 4.4 - Curva tensão-deformação para o concreto comprimido (CEB/FIP, 2010)

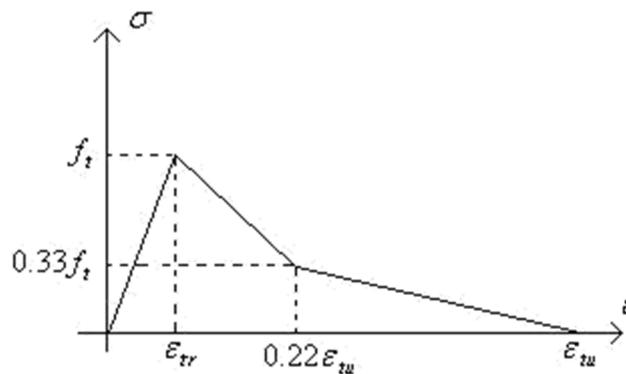


Figura 4.5 - Curva tensão-deformação para o concreto tracionado

Para o concreto na tração adotou-se a curva tensão-deformação da Figura 4.5 sugerida por Rots, Kusters, Blaauwendraad (1984) e usada também por Huang, Burgess e Plank (2003b) na avaliação de seus exemplos. Neste trabalho foi adotado $\epsilon_{tu} = 10\epsilon_{tr}$ e para a resistência a tração do concreto foi usada a relação $f_t = 0,3321 \sqrt{f_c}$ fornecida pela American Society of Civil Engineers - ASCE (1982), onde f_c é a resistência a compressão do concreto em MPa.

Para a análise não linear física e geométrica é utilizado nesse trabalho um método incremental com controle de deslocamento. Para evitar ter que dar passos muito pequenos que podem levar a erros devidos a truncamentos e arredondamentos durante o processo, é utilizada uma matriz de rigidez média a cada passo. Ou seja, com a matriz de rigidez do início do passo calculam-se os deslocamentos para o próximo passo, com esses determina-se a matriz de rigidez do passo seguinte, definindo a matriz de rigidez média como sendo a média entre essas duas matrizes. Com a matriz de rigidez média obtêm-se os novos deslocamentos para o passo analisado. Devido a esse método incremental, é considerado a cada passo material linear com

módulo de elasticidade dado pela tangente à curva tensão-deformação. Dessa forma a relação tensão-deformação pode ser obtida usando a lei de Hooke para o problema analisado. A seguir é discutida a matriz constitutiva da lei de Hooke para as situações do concreto após fissuração e esmagamento e dentro desses dois limites.

O concreto apresenta comportamento ortotrópico após a fissuração ou esmagamento, ou seja, apresenta características diferentes para cada direção principal. Considerando as camadas em estado plano de tensões, as direções principais são calculadas, sendo indicadas nesse trabalho pelos subscritos 1 e 2, em que a direção 1 é a de maior deformação principal. Se as deformações principais (ε_1 e ε_2) estiverem dentro da região de falha, o concreto é considerado ortotrópico com a relação tensão-deformação desacoplada para as direções principais, dessa forma a matriz constitutiva do material é dada por:

$$\mathbf{D}_{12} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & E_2 & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{2}(G_1 + G_2) & 0 & 0 \\ & & & G_1 & 0 \\ \text{Sim.} & & & & G_2 \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

Em que, E_1 e E_2 são dados pelas tangentes à curva tensão-deformação do concreto nos pontos $\varepsilon = \varepsilon_\alpha$ e $G_\alpha = 0,5E_\alpha / (1 + \nu)$ para $\alpha = 1,2$. A matriz de rigidez na direção dos eixos ortogonais x e y pode ser obtida a partir de \mathbf{D}_{12} e o ângulo ϕ de rotação dos eixos principais em relação a esses.

$$\mathbf{D}_{xy} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 \\ & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 \\ & & D_{33} & 0 & 0 \\ & & & D_{44} & D_{45} \\ \text{Sim.} & & & & D_{55} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

$$D_{11} = E_1 \cos^4 \phi + E_2 \text{sen}^4 \phi + \frac{1}{2} (G_1 + G_2) \text{sen}^2 (2\phi), \quad (4.11)$$

$$D_{12} = \frac{1}{4} \text{sen}^2 (2\phi) (E_1 + E_2 - 4(G_1 + G_2)), \quad (4.12)$$

$$D_{13} = \frac{1}{2} \text{sen}^2 \phi (E_1 \cos^2 \phi - E_2 \text{sen}^2 \phi - (G_1 + G_2) \cos(2\phi)), \quad (4.13)$$

$$D_{22} = E_1 \text{sen}^4 \phi + E_2 \cos^4 \phi + \frac{1}{2} (G_1 + G_2) \text{sen}^2 (2\phi), \quad (4.14)$$

$$D_{23} = \frac{1}{2} \text{sen}^2 \phi (E_1 \text{sen}^2 \phi - E_2 \cos^2 \phi + (G_1 + G_2) \cos(2\phi)), \quad (4.15)$$

$$D_{33} = \frac{1}{4} \operatorname{sen}^2(2\phi)(E_1 + E_2) + \frac{1}{2}(G_1 + G_2) \cos^2(2\phi), \quad (4.16)$$

$$D_{44} = G_1 \cos^2 \phi + G_2 \operatorname{sen}^2 \phi, \quad (4.17)$$

$$D_{45} = \frac{1}{2}(G_1 - G_2) \operatorname{sen}(2\phi), \quad (4.18)$$

$$D_{44} = G_1 \operatorname{sen}^2 \phi + G_2 \cos^2 \phi. \quad (4.19)$$

Para o caso particular de material isotrópico, observado quando as deformações principais estiverem fora da região de falha do concreto, tem-se $E_1 = E_2 = E$, $G_1 = G_2 = G$ e a matriz \mathbf{D}_{xy} da Equação 4.10 reduz a forma dada a seguir.

$$\mathbf{D}_{xy} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Aplicando um campo de deformações virtual compatível ao elemento plano de casca tem-se, pelo princípio dos trabalhos virtuais, $\delta W_{\text{int}} = \iiint_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV$. Em que, δ é o operador variacional, σ_{ij} é o estado tensional real em um ponto qualquer no elemento plano de casca, e $\delta \varepsilon_{ij}$ é o estado de deformação virtual obtido a partir do campo de deslocamento virtual imposto ao elemento. Desenvolvendo essa expressão tem-se:

$$\delta W_{\text{int}} = \iint_A [(\delta u_{,x} + w_{,x} \delta w_{,x}) N_x + \delta \theta_{y,x} M_y + (\delta v_{,y} + w_{,y} \delta w_{,y}) N_y - \delta \theta_{x,y} M_x + (\delta u_{,y} + \delta v_{,x} + w_{,y} \delta w_{,x} + w_{,x} \delta w_{,y}) N_{xy} + (\delta \theta_{y,y} - \delta \theta_{x,x}) M_{xy} + (\delta \theta_y + \delta w_{,x}) Q_{xz} + (\delta w_{,y} - \delta \theta_x) Q_{yz}] dA. \quad (4.21)$$

Em que, N_x , N_y , N_{xy} , Q_{xz} , Q_{yz} , M_y , M_x e M_{xy} são os esforços internos nas faces do elemento finito de placa. Para detalhes de como obter esses esforços consultar Dias (2016).

Admitindo que os deslocamentos e rotações da equação 4.21 têm variações quadráticas ao longo do elemento plano de casca, esses podem ser escritos em termos dos deslocamentos

nodais (\mathbf{q}) e funções de forma representadas pelo vetor Φ de nove termos. Neste trabalho o elemento plano de casca tem nove nós e as rotações são interpoladas independentemente das translações, dessa forma são utilizadas funções de forma dadas por polinômios quadráticos em x e y .

O trabalho virtual externo é dado por $\delta W_{ext} = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{f}_{ext}$. Em que \mathbf{f}_{ext} é o vetor de forças externas nas direções dos graus de liberdade do elemento plano de casca. Da condição de que o trabalho virtual interno deve ser igual ao trabalho virtual externo ($\delta W_{ext} = \delta W_{int}$), chega-se a expressão 4.22 para o vetor de forças interna do elemento plano de casca. Para a resolução do problema não linear de equilíbrio $\mathbf{f}_{int} - \mathbf{f}_{ext} = \mathbf{0}$, é utilizado o método de Newton-Raphson, logo a matriz de rigidez tangente deve ser obtida. Sendo \mathbf{f}_{ext} constante em relação aos deslocamentos nodais, a matriz de rigidez tangente, dada pela equação 4.23, é obtida derivando o vetor de força interna em relações aos deslocamentos nodais.

$$\mathbf{f}_{int} = \iint_A \begin{bmatrix} N_x \Phi_{,x} + N_{xy} \Phi_{,y} \\ N_{xy} \Phi_{,x} + N_y \Phi_{,y} \\ Q_{xz} \Phi_{,x} + Q_{yz} \Phi_{,y} + w_{,x} N_x \Phi_{,x} + w_{,y} N_y \Phi_{,y} + N_{xy} (w_{,y} \Phi_{,x} + w_{,x} \Phi_{,y}) \\ - M_{xy} \Phi_{,x} - M_x \Phi_{,y} - Q_{yz} \Phi \\ M_y \Phi_{,x} + M_{xy} \Phi_{,y} + Q_{xz} \Phi \end{bmatrix} dA \quad (4.22)$$

$$\mathbf{K} = \iint_A \begin{bmatrix} \Phi_{,x} \left(\frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \Phi_{,y} \left(\frac{\partial N_{xy}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi_{,x} \left(\frac{\partial N_{xy}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \Phi_{,y} \left(\frac{\partial N_y}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi_{,x} \left(\frac{\partial Q_{xz}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \Phi_{,y} \left(\frac{\partial Q_{yz}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \Phi_{,x} \Psi_1 + \Phi_{,y} \Psi_2 \\ - \Phi_{,x} \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T - \Phi_{,y} \left(\frac{\partial M_x}{\partial \mathbf{q}} \right)^T - \Phi \left(\frac{\partial Q_{yz}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi_{,x} \left(\frac{\partial M_y}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \Phi_{,y} \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \Phi \left(\frac{\partial Q_{xz}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \end{bmatrix} dA \quad (4.23)$$

Na expressão 4.23, Ψ_1 e Ψ_2 são vetores com 45 termos como mostrado nas expressões a seguir:

$$\Psi_1 = \left(\frac{\partial w_{,x}}{\partial \mathbf{q}} N_x + \frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} w_{,x} \right)^T + \left(\frac{\partial w_{,y}}{\partial \mathbf{q}} N_{xy} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial \mathbf{q}} w_{,y} \right)^T \quad (4.24)$$

$$\Psi_2 = \left(\frac{\partial w_{,y}}{\partial \mathbf{q}} N_y + \frac{\partial N_y}{\partial \mathbf{q}} w_{,y} \right)^T + \left(\frac{\partial w_{,x}}{\partial \mathbf{q}} N_{xy} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial \mathbf{q}} w_{,x} \right)^T \quad (4.25)$$

Na expressão 4.23, a derivada do esforço axial atuante na seção em relação aos deslocamentos nodais é dada pela equação 4.26 na qual o somatório representa as nx camadas de armadura de área A_{xi} transformada em camadas de aço de espessura S_{xi} na direção x do elemento plano de casca.

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} &= \int_h \frac{\partial \sigma_x}{\partial \mathbf{q}} dz + \sum_{i=1}^{nx} \frac{A_{xi}}{S_{xi}} \left(\frac{\partial \sigma_x^s(z_i)}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \sigma_x^c(z_i)}{\partial \mathbf{q}} \right) \\ \frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} &= \int_h \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_x} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_y} \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial \gamma_{xy}} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial \mathbf{q}} \right) dz + \sum_{i=1}^{nx} \frac{A_{xi}}{S_{xi}} (E_s - E_c) \frac{\partial \varepsilon_x(z_i)}{\partial \mathbf{q}} \end{aligned} \quad (4.26)$$

A partir da relação constitutiva do material definida anteriormente obtém-se $\sigma_x = D_{11}\varepsilon_x + D_{12}\varepsilon_y + D_{13}\gamma_{xy}$. Derivando as expressões aproximadas das deformações ε_x , ε_y e γ_{xy} em relação aos deslocamentos nodais chega-se à expressão a seguir para a derivada do esforço axial em relação aos deslocamentos nodais, sendo, $\beta_{xi} = \frac{A_{xi}}{S_{xi}} (E_s - E_c)$.

$$\frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} = \left[\begin{array}{c} \Phi_{,x} \int_{-h/2}^{h/2} D_{11} dz + \Phi_{,y} \int_{-h/2}^{h/2} D_{13} dz \\ \Phi_{,y} \int_{-h/2}^{h/2} D_{12} dz + \Phi_{,x} \int_{-h/2}^{h/2} D_{13} dz \\ w_{,x} \Phi_{,x} \int_{-h/2}^{h/2} D_{11} dz + w_{,y} \Phi_{,y} \int_{-h/2}^{h/2} D_{12} dz + (w_{,y} \Phi_{,x} + w_{,x} \Phi_{,y}) \int_{-h/2}^{h/2} D_{13} dz \\ - \Phi_{,y} \int_{-h/2}^{h/2} D_{12} z dz - \Phi_{,x} \int_{-h/2}^{h/2} D_{13} z dz \\ \Phi_{,x} \int_{-h/2}^{h/2} D_{11} z dz + \Phi_{,y} \int_{-h/2}^{h/2} D_{13} z dz \end{array} \right] + \sum_{i=1}^{nx} \beta_{xi} \left[\begin{array}{c} \Phi_{,x} \\ \mathbf{0} \\ w_{,x} \Phi_{,x} \\ \mathbf{0} \\ z_i \Phi_{,x} \end{array} \right] \quad (4.27)$$

De forma análoga à descrita para o esforço axial, pode-se chegar às expressões para as derivadas em relação aos deslocamentos nodais dos outros esforços atuantes na seção. Para maiores detalhes sobre a formulação numérica desse elemento, consultar a referência Dias (2016).

4.2 ELEMENTO DE BARRA

Para análise numérica não linear de vigas de concreto protendido é utilizado neste trabalho o elemento de barra mostrado na Figura 4.6. Esse elemento de barra foi implementado por Silva (2010) para análise de pisos mistos e utilizado por Silva (2018) na simulação de nervuras de lajes mistas. Neste trabalho é incluída na sua formulação a possibilidade de simulação dos efeitos de fluência e retração do concreto.

A formulação numérica do elemento de barra é apresentada a seguir de forma resumida, para maiores detalhes consultar a referência Silva (2010). Na Figura 4.6 são apresentados os graus de liberdade do elemento de barra e as tensões que surgem em um elemento infinitesimal no volume da barra. Observa-se dessa figura que os graus de liberdade do elemento de barra são os mesmos adotados para o elemento plano de casca.

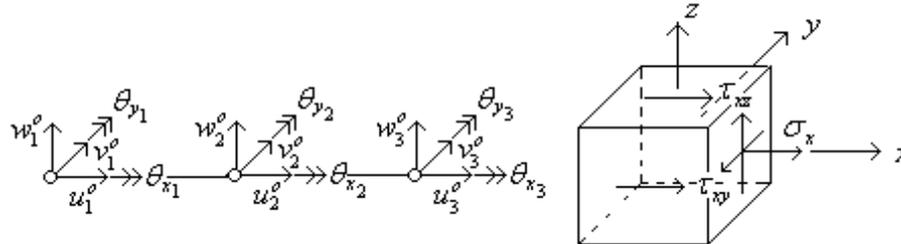


Figura 4.6: Graus de liberdade do elemento de barra e tensões em um elemento infinitesimal (Silva, 2010)

Considerando as hipóteses cinemáticas da teoria de viga de Timoshenko e a aproximação de que um esforço de torção não provoca deslocamentos fora do plano de torção, definem-se as equações de deslocamento como mostradas nas Equações 4.28 a 4.30. Para análise de vigas protendidas sujeitas à flexão simples mais carga axial os graus de liberdade de translação em y e torção não são necessários. No entanto, optou-se por considerá-los na formulação com a intensão do acoplamento desse elemento com elementos planos de placa em trabalhos futuros.

$$u(x, y, z) = u^o(x) + z\theta_y(x) \quad (4.28)$$

$$v(x, y, z) = v^o(x) - z\theta_x(x) \quad (4.29)$$

$$w(x,y,z) = w^o(x) + y\theta_x(x) \quad (4.30)$$

Aplicando às Equações 4.28 a 4.39 a relação deformação-deslocamento de Green-Lagrange $\left(\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}) \right)$ e desprezando a variação de w com z , obtêm-se as equações das deformações dadas a seguir. Às equações referentes à deformação linear específicas foram somadas as deformações iniciais referentes à deformação por retração e fluência (ε_0) do concreto. Nessas equações e nas seguintes desse item foram omitidos o sobrescrito 0 que representa a posição do eixo de referência do elemento de barra.

$$\varepsilon_x = u_{,x} + z\theta_{y,x} + \frac{1}{2}(w_{,x})^2 + \varepsilon_0 \quad (4.31)$$

$$\varepsilon_y = v_{,y} - z\theta_{x,y} + \frac{1}{2}(w_{,y})^2 + \varepsilon_0 \quad (4.32)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}(v_{,x} - z\theta_{x,x}) \quad (4.33)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}(\theta_y + w_{,x}) \quad (4.34)$$

Assim como no elemento plano de casca do item anterior, é aplicado o princípio dos trabalhos virtuais para a definição do vetor de forças internas e da matriz de rigidez do elemento de barra da Figura 4.6. Na equação 4.35 é apresentado o trabalho virtual interno.

$$\delta W_{\text{int}} = \int_V (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{xz} \delta \varepsilon_{xz} + \tau_{xy} \delta \varepsilon_{xy}) dV . \quad (4.35)$$

As deformações e seus variacionais são obtidos a partir das equações dos deslocamentos 4.31 a 4.34. Fazendo isso chega-se à equação 4.33 para o trabalho virtual interno, em que $N_x = \int_A \sigma_x dA$, $N_{xy} = \int_A \tau_{xy} dA$, $N_{xz} = \int_A \tau_{xz} dA$, $M_x = \int_A \sigma_x z dA$ e $T_x = \int_A (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dA$, são os esforços internos na seção transversal do elemento de barra.

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{int}} = \int_L \left[\int_A \sigma_x dA (\delta u_{,x} + w_{,x} \delta w_{,x}) + \int_A \tau_{xy} dA \delta v_{,x} + \int_A \tau_{xz} dA (w_{,x} + \delta \theta_y) + \right. \\ \left. + \int_A \sigma_x z dA \delta \theta_{y,x} + \int_A (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dA \delta \theta_{x,x} \right] dx . \quad (4.36) \end{aligned}$$

Aproximando as equações dos deslocamentos por funções de formas associadas aos deslocamentos nodais, chega-se à Equação 4.38 para a formulação fraca do trabalho virtual

interno. Nessa equação, Φ é um vetor que representa as funções de forma dadas por polinômios quadráticos para os deslocamentos axiais, transversais e rotações, $\mathbf{q} = [u_i \ v_i \ w_i \ \theta_{x_i} \ \theta_{y_i}]^T$ com i variando de 1 até 9 representa os graus de liberdade do elemento de barra, e $\mathbf{0}$ é um vetor nulo com nove elementos.

$$\delta W_{\text{int}} = \delta \mathbf{q}^T \int_L \left[N_x \left(\frac{\partial u_{,x}}{\partial \mathbf{q}} + w_{,x} \frac{\partial w_{,x}}{\partial \mathbf{q}} \right) + N_{xy} \frac{\partial v_{,x}}{\partial \mathbf{q}} + N_{xz} \left(\frac{\partial w_{,x}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \theta_y}{\partial \mathbf{q}} \right) + M_x \frac{\partial \theta_{y,x}}{\partial \mathbf{q}} + T_x \frac{\partial \theta_{x,x}}{\partial \mathbf{q}} \right] dx \quad (4.37)$$

O trabalho virtual externo é obtido por $\delta \mathcal{W}_{\text{ext}} = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{f}_{\text{ext}}$, em que \mathbf{f}_{ext} é o vetor de forças externas nodais. Da condição de $\delta \mathcal{W}_{\text{int}} = \delta \mathcal{W}_{\text{ext}}$, chega-se a Equação 4.38 para o vetor de força interna. De forma análoga ao elemento plano de casca dado no item anterior chega-se a matriz de rigidez tangente dada na Equação 4.39.

$$\mathbf{f}_{\text{int}} = \int_L \left\{ \begin{array}{c} N_x \Phi_{,x} \\ N_{xy} \Phi_{,x} \\ \frac{5}{6} N_{xz} \Phi_{,x} + N_x \Phi_{,x} w_{,x} \\ T_x \Phi_{,x} \\ M_x \Phi_{,x} + \frac{5}{6} N_{xz} \Phi \end{array} \right\} dx \quad (4.38)$$

$$\mathbf{K} = \int_L \left[\begin{array}{c} \Phi_{,x} \left(\frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi_{,x} \left(\frac{\partial N_{xy}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi_{,x} \left(\frac{\partial N_{xz}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \Phi_{,x} w_{,x} \left(\frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + N_x \Phi_{,x} \left(\frac{\partial w_{,x}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi_{,x} \left(\frac{\partial T_x}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi_{,x} \left(\frac{\partial M_x}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \Phi \left(\frac{\partial N_{xy}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \end{array} \right] dx \quad (4.39)$$

As derivadas dos esforços internos em relação aos deslocamentos nodais que aparecem na matriz de rigidez tangente são dadas por:

$$\frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \Phi_{,x} \int_A E_T dA \\ \mathbf{0} \\ w_{,x} \Phi_{,x} \int_A E_T dA \\ \mathbf{0} \\ \Phi_{,x} \int_A E_T z dA \end{Bmatrix}, \frac{\partial M_x}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \Phi_{,x} \int_A E_T z dA \\ \mathbf{0} \\ w_{,x} \Phi_{,x} \int_A E_T z dA \\ \mathbf{0} \\ \Phi_{,x} \int_A E_T z^2 dA \end{Bmatrix}, \frac{\partial N_{xy}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \Phi_{,x} \int_A G dA \\ \mathbf{0} \\ -\Phi_{,x} \int_A G z dA \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}, \quad (4.40)$$

$$\frac{\partial T_x}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ -\Phi_{,x} \int_A G z dA \\ \Phi_{,x} \int_A G y dA \\ \Phi_{,x} \int_A G (y^2 + z^2) dA \\ \Phi \int_A G dA \end{Bmatrix} \text{ e } \frac{\partial N_{xz}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \Phi_{,x} \int_A G dA \\ \Phi_{,x} \int_A G y dA \\ \Phi \int_A G dA \end{Bmatrix} \quad (4.41)$$

As expressões dos esforços atuantes na seção transversal, N_x , N_{xy} , N_{xz} , M_x e T_x , bem como, das rigidezes $\int_A E dA$, $\int_A E z dA$, $\int_A E z^2 dA$, $\int_A G dA$, $\int_A G z dA$, $\int_A G z^2 dA$, $\int_A G y dA$ e $\int_A G y^2 dA$, são obtidas de forma analítica transformando a integral de área em uma integral de linha ao longo do contorno da seção transversal que tem forma geral dada por um polígono fechado qualquer.

4.3 ELEMENTO DE INTERFACE

Nesta seção é apresentada a formulação do elemento de interface responsável por conectar o cabo de protensão ao elemento de concreto, seja ele o elemento plano de casca ou o elemento de barra. Dessa forma, os nós inferiores do elemento de interface mostrado na Figura 4.7 simulam o cabo de protensão, e nós superiores a posição do plano ou eixo de referência do elemento de concreto. O elemento de interface simula um possível deslocamento relativo entre o cabo de protensão e o elemento de concreto e a rigidez do cabo de protensão. Na Figura 4.7 é ilustrado o elemento de interface de quatro nós e 10 graus de liberdade a nível local, mostrando a sequência dos graus de liberdade para a formação do vetor dos deslocamentos nodais.

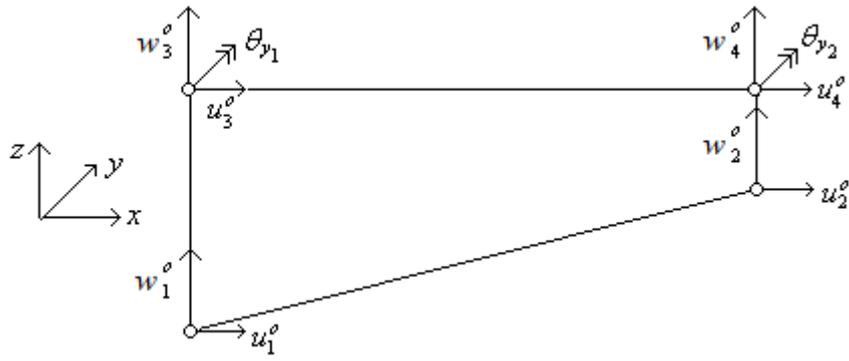


Figura 4.7: Graus de Liberdade do elemento de interface

Embora sua espessura física real seja nula, a distância vertical $d(x)$ entre os nós inferiores e superiores do elemento de interface depende das posições da superfície de referência do elemento plano de casca (ou eixo da barra) e do eixo da armadura ativa. Como os deslocamentos relativos ocorrem ao longo do eixo da armadura ativa eles são obtidos de acordo com as equações a seguir.

$$s_l(x) = u_2^0(x) - u_1^0(x) - d(x)\theta_y(x) \quad (4.42)$$

$$s_t = w_2(x) - w_1(x) \quad (4.43)$$

Nas equações anteriores, s_l é o deslocamento relativo na direção x (deslizamento), s_t é o deslocamento relativo na direção z (descolamento), $u_2^0(x)$ é o deslocamento no plano ou eixo de referência do elemento de concreto na direção x local do elemento de interface, $\theta_y(x)$ é a rotação da seção no elemento de concreto em torno do eixo y local do elemento de interface, $u_1^0(x)$ é o deslocamento da armadura ativa na direção x local do elemento de interface, $w_1(x)$ e $w_2(x)$ são os deslocamentos na direção z da armadura ativa e do elemento de concreto, respectivamente. Na Figura 4.8 é ilustrado o possível deslizamento dado pela Equação 4.42. Já o deslocamento relativo na direção z é desconsiderado, para isso é admitido uma rigidez muito grande nessa direção no elemento de interface.

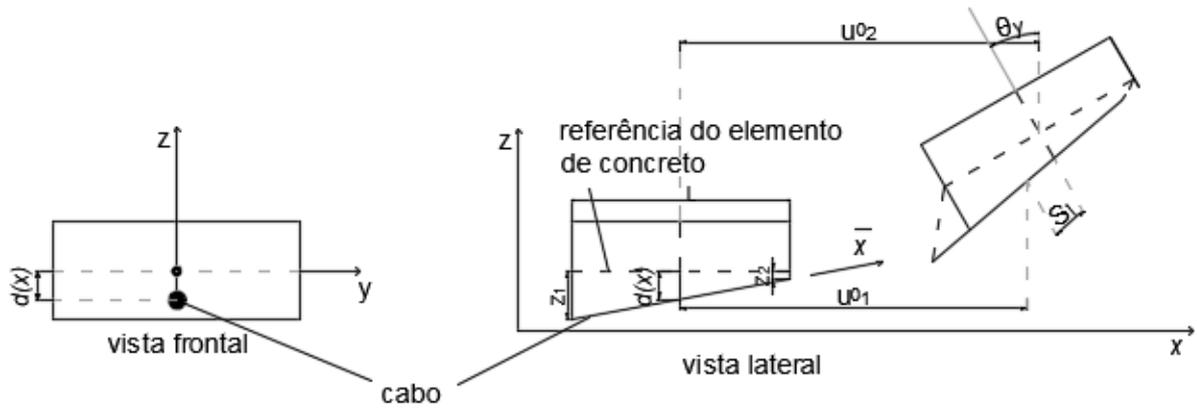


Figura 4.8: Deslizamento longitudinal

Considerando E_{Sb} e E_{Nb} as rigidezes em relação aos deslocamentos relativos longitudinal e transversal, respectivamente, entre a armadura ativa e o elemento de concreto, e S_b e N_b as forças por unidade de comprimento que surgem nas direções desses deslocamentos relativos, tem-se:

$$S_b = E_{S_b} s_l, \text{ e} \quad (4.44)$$

$$N_b = E_{N_b} s_t. \quad (4.45)$$

A armadura ativa está submetida apenas a tensão e deformação na direção do seu eixo.

Sendo $\bar{u}(x)$ o deslocamento da armadura ativa na direção do seu eixo e $\bar{\varepsilon}_0$ a deformação inicial imposta pela protensão chega-se a equação 4.46 para a deformação na armadura ativa considerando a não linearidade geométrica. Nas equações a seguir o sobrescrito 0 que indica plano ou eixo de referência no elemento de concreto e cabo de protensão é omitido para simplificação da notação.

$$\bar{\varepsilon} = \bar{u}' + \frac{1}{2} \bar{u}'^2 + \bar{\varepsilon}_0 \quad (4.46)$$

Aplicando um campo de deformação virtual compatível a um elemento de interface deformável da Figura 4.8 chega-se a equação 4.47 para o trabalho virtual interno. Observa-se dessa equação as parcelas referentes à interface de contato entre cabo de protensão e elemento de concreto, e a parcela referente ao cabo de protensão.

$$\delta W_{\text{int}} = \int_L (S_b \delta s_l + N_b \delta s_t) dx + \int_L \int_A \bar{\sigma} \delta \bar{\varepsilon} dA d\bar{x} \quad (4.47)$$

Os variacionais dos deslocamentos relativos do elemento de interface e da deformação axial na armadura ativa são dados por:

$$\delta s_t = \delta u_2 - \delta u_1 - d \delta \theta_y, \quad (4.48)$$

$$\delta s_t = \delta w_2 - \delta w_1, \text{ e} \quad (4.49)$$

$$\delta \bar{\varepsilon} = (1 + \bar{u}') \delta \bar{u}'. \quad (4.50)$$

Substituindo esses variacionais na Equação 4.47 do trabalho virtual chega-se a Equação 4.51. Nessa equação, $\bar{N} = \int_A \bar{\sigma} dA$ é a força axial na armadura ativa. Definindo θ como o ângulo de inclinação da armadura ativa em relação ao plano ou eixo de referência do elemento de concreto chega-se a $x = \bar{x} \cos \theta$, onde $\text{tg } \theta = (z_1 - z_2) / L$ (Figura 4.8).

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{int}} = \int_L [S_b (\delta u_2 - \delta u_1 - d \delta \theta_y) + N_b (\delta w_2 - \delta w_1) + \\ + \bar{N} (1 + \cos^2 \theta u_1' + \frac{1}{2} \text{sen} 2\theta w_1') (\cos \theta \delta u_1' + \text{sen} \theta \delta w_1')] dx \end{aligned} \quad (4.51)$$

Na aproximação por elementos finitos baseado em deslocamentos, as equações dos deslocamentos são aproximadas por funções de forma associadas aos deslocamentos nodais (\mathbf{q}). Para o elemento em questão foram adotadas funções de forma dadas por polinômios lineares representadas nas Equações 4.52 a 4.54 pelo vetor $\Phi^T = \left[\frac{1}{2}(1 - \xi) \quad \frac{1}{2}(1 + \xi) \right]$, onde ξ é uma coordenada paramétrica ao longo do eixo x dada por: $x(\xi) = \frac{L}{2} \xi + \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, sendo x_1 e x_2 coordenadas em x dos nós 1 e 2 do elemento de interface.

$$u_\alpha = \Phi^T \mathbf{q}_{u_\alpha} \quad (4.52)$$

$$w_\alpha = \Phi^T \mathbf{q}_{w_\alpha} \quad (4.53)$$

$$\theta_y = \Phi^T \mathbf{q}_{\theta_y} \quad (4.54)$$

Nas expressões 4.52 a 4.54, o índice α faz referência aos lados inferior e superior do elemento de interface e, de acordo com a Figura 4.7, tem-se: $\mathbf{q}_{u_1} = [u_1 \quad u_2]^T$, $\mathbf{q}_{u_2} = [u_3 \quad u_4]^T$,

$\mathbf{q}_{w_1} = [w_1 \ w_2]^T$, $\mathbf{q}_{w_2} = [w_3 \ w_4]^T$ e $\mathbf{q}_{\theta_y} = [\theta_{y1} \ \theta_{y2}]^T$. Dessa forma, o vetor dos deslocamentos nodais é dado por $\mathbf{q} = [\mathbf{q}_{u1}^T \ \mathbf{q}_{u2}^T \ \mathbf{q}_{w1}^T \ \mathbf{q}_{w2}^T \ \mathbf{q}_{\theta_y}^T]^T$.

Sendo os deslocamentos funções dos deslocamentos nodais então seus variacionais são dados por:

$$\delta u_\alpha = \delta \mathbf{q}^T \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial \mathbf{q}} \right), \quad (4.55)$$

$$\delta w_\alpha = \delta \mathbf{q}^T \left(\frac{\partial w_\alpha}{\partial \mathbf{q}} \right), \text{ e} \quad (4.56)$$

$$\delta \theta_y = \delta \mathbf{q}^T \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial \mathbf{q}} \right). \quad (4.57)$$

Substituindo as Equações 4.55 a 4.57 em 4.51 chega-se a expressão 4.58 para o trabalho virtual do elemento de interface que conecta o cabo de protensão ao elemento de concreto e simula a deformação do cabo de protensão. Nessa equação utilizou-se a simplificação $N^* = \bar{N}(1 + \cos^2 \theta u_1' + \frac{1}{2} \text{sen} 2\theta w_1')$.

$$\delta \mathcal{W}_{\text{int}} = \delta \mathbf{q}^T \int_L [S_b \left(\frac{\partial u_2}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{q}} - d \frac{\partial \theta_y}{\partial \mathbf{q}} \right) + N_b \left(\frac{\partial w_2}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial w_1}{\partial \mathbf{q}} \right) + N^* \left(\cos \theta \frac{\partial u_1'}{\partial \mathbf{q}} + \text{sen} \theta \frac{\partial w_1'}{\partial \mathbf{q}} \right)] dx \quad (4.58)$$

O trabalho virtual externo é obtido por $\delta \mathcal{W}_{\text{ext}} = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{f}_{\text{ext}}$, em que \mathbf{f}_{ext} é o vetor de forças externas nodais. Geralmente as forças externas são transmitidas para os elementos de interface através dos elementos a ele associado. Da condição de $\delta \mathcal{W}_{\text{int}} = \delta \mathcal{W}_{\text{ext}}$, tem-se:

$$\delta \mathbf{q}^T \int_L [S_b \left(\frac{\partial u_2}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{q}} - d \frac{\partial \theta_y}{\partial \mathbf{q}} \right) + N_b \left(\frac{\partial w_2}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial w_1}{\partial \mathbf{q}} \right) + N^* \left(\cos \theta \frac{\partial u_1'}{\partial \mathbf{q}} + \text{sen} \theta \frac{\partial w_1'}{\partial \mathbf{q}} \right)] dx = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{f}_{\text{ext}} \quad (4.59)$$

A expressão 4.59 deve ser válida para qualquer campo de deformação virtual compatível, portanto, ela pode ser escrita na forma $\mathbf{f}_{\text{int}} - \mathbf{f}_{\text{ext}} = \mathbf{0}$, onde \mathbf{f}_{int} é o vetor de forças internas dado pela expressão a seguir.

$$\mathbf{f}_{\text{int}} = \int_L [S_b \left(\frac{\partial u_2}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{q}} - d \frac{\partial \theta_y}{\partial \mathbf{q}} \right) + N_b \left(\frac{\partial w_2}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial w_1}{\partial \mathbf{q}} \right) + N^* (\cos \theta \frac{\partial u_1'}{\partial \mathbf{q}} + \text{sen} \theta \frac{\partial w_1'}{\partial \mathbf{q}})] dx \quad (4.60)$$

Substituindo na expressão 4.60 as derivadas das equações dos deslocamentos, expressões 4.52 a 4.54, em relação aos deslocamentos nodais \mathbf{q} , tem-se:

$$\mathbf{f}_{\text{int}} = \int_L \begin{Bmatrix} \cos \theta N^* \Phi' - S_b \Phi \\ S_b \Phi \\ \text{sen} \theta N^* \Phi' - N_b \Phi \\ N_b \Phi - d S_b \Phi \end{Bmatrix} dx \quad (4.61)$$

Para a resolução do problema não linear de equilíbrio $\mathbf{f}_{\text{int}} - \mathbf{f}_{\text{ext}} = \mathbf{0}$, é utilizado o método de Newton-Raphson, logo a matriz de rigidez tangente deve ser obtida. Sendo \mathbf{f}_{ext} constante em relação aos deslocamentos nodais, a matriz de rigidez tangente dada pela equação 4.62 é obtida derivando o vetor de força interna em relação aos deslocamentos nodais.

$$\mathbf{K} = \int_L \begin{bmatrix} \cos \theta \Phi' \left(\frac{\partial N^*}{\partial \mathbf{q}} \right)^T - \Phi \left(\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi \left(\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \text{sen} \theta \Phi' \left(\frac{\partial N^*}{\partial \mathbf{q}} \right)^T - \Phi \left(\frac{\partial N_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi \left(\frac{\partial N_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ -d \Phi \left(\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \end{bmatrix} dx \quad (4.62)$$

Na matriz de rigidez as derivadas das forças por unidade de comprimento atuante na interface de contato entre o cabo de protensão e o elemento de concreto em relação aos deslocamentos nodais são dadas por:

$$\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial (E_{S_b} s_l)}{\partial \mathbf{q}} = E_{S_b} \frac{\partial s_l}{\partial \mathbf{q}}, \text{ e} \quad (4.63)$$

$$\frac{\partial N_b}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial (E_{N_b} s_t)}{\partial \mathbf{q}} = E_{N_b} \frac{\partial s_t}{\partial \mathbf{q}}. \quad (4.64)$$

Em que, $E_{S_b} = \frac{\partial S_b}{\partial s_t}$ é a rigidez da interface de contato em relação ao deslizamento da armadura ativa, sendo adotada nula no caso de protensão não aderente e um valor muito alto (10^9) no caso contrário. $E_{N_b} = \frac{\partial N_b}{\partial s_t}$ é a rigidez da interface de contato em relação ao descolamento da armadura ativa, sendo adotado um valor muito alto (10^9). Já as derivadas dos deslocamentos relativos em relação aos deslocamentos nodais são dadas pelas equações 4.65 e 4.66, onde $\mathbf{0}$ é um vetor nulo de dois termos.

$$\frac{\partial s_t}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial u_2}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{q}} - d \frac{\partial \theta_y}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -\Phi^T & \Phi^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -d\Phi^T \end{bmatrix}^T, \text{ e} \quad (4.65)$$

$$\frac{\partial s_t}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial w_2}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial w_1}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\Phi^T & \Phi^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}^T. \quad (4.66)$$

Substituindo as expressões 4.65 e 4.66 em 4.63 e 4.64, tem-se:

$$\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} -E_{S_b} \Phi \\ E_{S_b} \Phi \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -dE_{S_b} \Phi \end{Bmatrix}, \text{ e} \quad (4.67)$$

$$\frac{\partial N_b}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -E_{N_b} \Phi \\ E_{N_b} \Phi \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}. \quad (4.68)$$

A derivada da força normal nos cabos de protensão em relação aos deslocamentos nodais é dada por:

$$\frac{\partial \bar{N}}{\partial \mathbf{q}} = \int_A \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \mathbf{q}} dA = \int_A \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}} \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial \mathbf{q}} dA = \int_A E_T (1 + \bar{u}') \frac{\partial \bar{u}'}{\partial \mathbf{q}} dA. \quad (4.69)$$

O módulo de elasticidade (E_T) do aço do cabo de protensão é obtido pela derivada da curva tensão deformação do aço de protensão. Considerando que ele seja constante ao longo da área do cabo, tem-se:

$$\frac{\partial \bar{N}}{\partial \mathbf{q}} = (1 + \cos^2 \theta u_1' + \frac{1}{2} \text{sen} 2\theta w_1') \begin{Bmatrix} \cos \theta E_T A \Phi \\ \mathbf{0} \\ \text{sen} \theta E_T A \Phi \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}. \quad (4.70)$$

Na matriz de rigidez a derivada de N^* em relação aos deslocamentos nodais é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N^*}{\partial \mathbf{q}} &= \frac{\partial \bar{N}}{\partial \mathbf{q}} (1 + \cos^2 \theta u_1' + \frac{1}{2} \text{sen} 2\theta w_1') + \bar{N} (\cos^2 \theta \frac{\partial u_1'}{\partial \mathbf{q}} + \frac{1}{2} \text{sen} 2\theta \frac{\partial w_1'}{\partial \mathbf{q}}) \\ \frac{\partial N^*}{\partial \mathbf{q}} &= (1 + \cos^2 \theta u_1' + \frac{1}{2} \text{sen} 2\theta w_1')^2 \begin{Bmatrix} \cos \theta E_T A \Phi \\ \mathbf{0} \\ \text{sen} \theta E_T A \Phi \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} + \bar{N} \begin{Bmatrix} \cos^2 \theta \Phi' \\ \mathbf{0} \\ \frac{1}{2} \text{sen} 2\theta \Phi' \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.71)$$

5 EXEMPLOS E RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados os resultados numéricos obtidos a partir dos elementos finitos apresentados no Capítulo 4 deste trabalho. Para a validação desses elementos são utilizados resultados numéricos e experimentais encontrados na literatura. Para a análise de todos os exemplos foi considerado a não linearidade física. Em alguns exemplos os modelos linear e não linear geométrico foi utilizado, para isso denominou estes modelos como Linear e Não Linear, respectivamente. Já para exemplos em que não se faz menção ao tipo de modelo utilizado, a não linearidade geométrica é considerada.

Dessa forma, foram desenvolvidos 6 exemplos que envolvem a análise numérica não linear de vigas e lajes protendidas considerando: cabos de protensão retos e curvos; presença ou não de armadura passiva; cabos de protensão distribuídos em uma ou nas duas direções da laje; cabos pós-tensionados ou pré-tensionados.

5.1 VIGAS DE TAO E DU (1985)

Neste item, os resultados experimentais de protótipos de vigas de concreto com protensão interna não aderente de Tao e Du (1985) são utilizados para avaliação do modelo numérico proposto. Os autores analisaram experimentalmente várias vigas bi-apoiadas de 4,20m de vão sob ação de flexão pura e simples, como pode ser visto na Figura 5.1. Dentre essas, as vigas A2 e A3 do grupo A são analisadas numericamente nesse exemplo.

As seções das vigas são todas retangulares, com 16 cm de largura e 28 cm de altura (Figura 5.2). A altura útil da armadura passiva positiva é igual a 25 cm, não sendo utilizada armadura passiva negativa. O traçado do cabo de protensão é reto e a altura útil da armadura de protensão é igual a 22 cm. O cabo de protensão de diâmetro de 5mm, módulo de elasticidade de 205000 MPa, tensão de escoamento de 1465 MPa, e tensão de ruptura de 1790 MPa, foi engraxado e pós-tensionado.

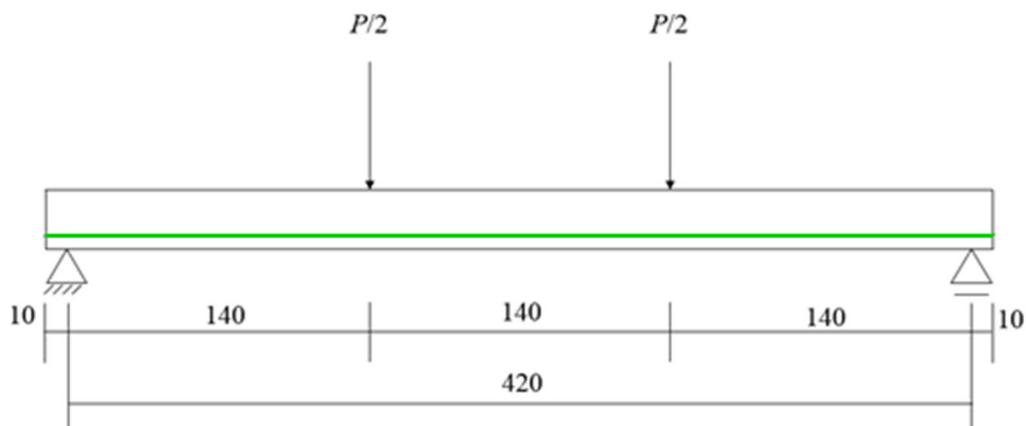


Figura 5.1: Detalhe do carregamento e do perfil do cabo das vigas do Grupo A de Tao e Du (1985)

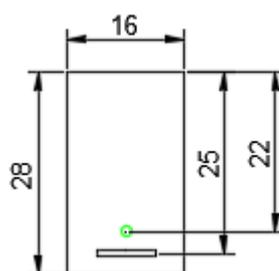


Figura 5.2: Detalhe da seção transversal das vigas do grupo A de Tao e Du (1985)

A viga foi modelada utilizando-se 10 elementos de barra e 20 elementos de interface. O número de elementos de interface é o dobro dos elementos de barra devido ao elemento de barra ter três nós, enquanto o elemento de interface tem quatro nós, sendo dois para conectar o elemento de concreto e dois para o cabo de protensão, como descrito no capítulo 4. Os dados do material concreto foram obtidos através de ensaios realizados por Tao e Du (1985). Para a caracterização dos materiais foram utilizadas as curvas tensão-deformação apresentadas no item 4.1, sendo que para o concreto foi adotado resistência à compressão $f_c = 30,6$ MPa e coeficiente de Poisson $\nu = 0,2$. Para armadura passiva é considerado módulo de elasticidade $E_s = 210000$ MPa, tensão de escoamento $f_y = 430$ MPa e coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. Alguns desses e outros parâmetros são apresentados na Tabela 5.1.

Tabela 5.1: Parâmetros das vigas de Tao e Du (1985)

Viga	f_c (MPa)	f_y (MPa)	A_s (cm ²)	A_p (cm ²)	σ_{pe} (MPa)
A2	30,6	430	1,57	0,98	904
A3	30,6	430	2,36	1,568	820

Nas Figuras 5.3 e 5.5 são apresentados o comportamento da deflexão no meio do vão da viga em relação à carga aplicada para as vigas A2 e A3, respectivamente. Nota-se que tanto na análise não linear geométrica quanto na linear geométrica o comportamento obtido para a fase linear foi semelhante ao comportamento experimental. Com o início do comportamento não linear, há um distanciamento entre o comportamento experimental e o encontrado com os modelos numéricos. Essa diferença se deve à complexidade da simulação numérica do concreto após fissuração e da grande quantidade de fatores que influenciam no comportamento de estruturas protendidas. No entanto, em termos de carga última, como pode ser observado pela Tabela 5.2, para a viga A2 as respostas numéricas apresentam valores próximos ao resultado experimental. No caso da viga A3, a carga última foi um pouco menor do que o resultado encontrado por Tao e Du (1985).

Tabela 5.2: Cargas últimas das vigas de Tao e Du (1985)

Carga última (kN)			
Viga	Experimental	Não Linear	Linear
A2	54.1	57.8	57.4
A3	81.6	73.6	73.3

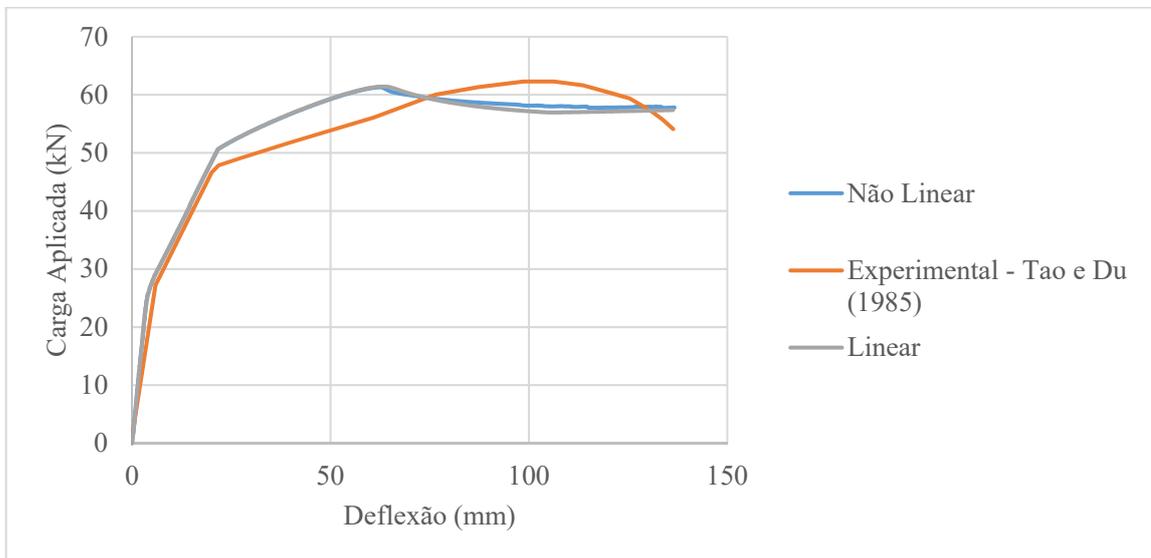


Figura 5.3: Deflexão no meio do vão da viga A2

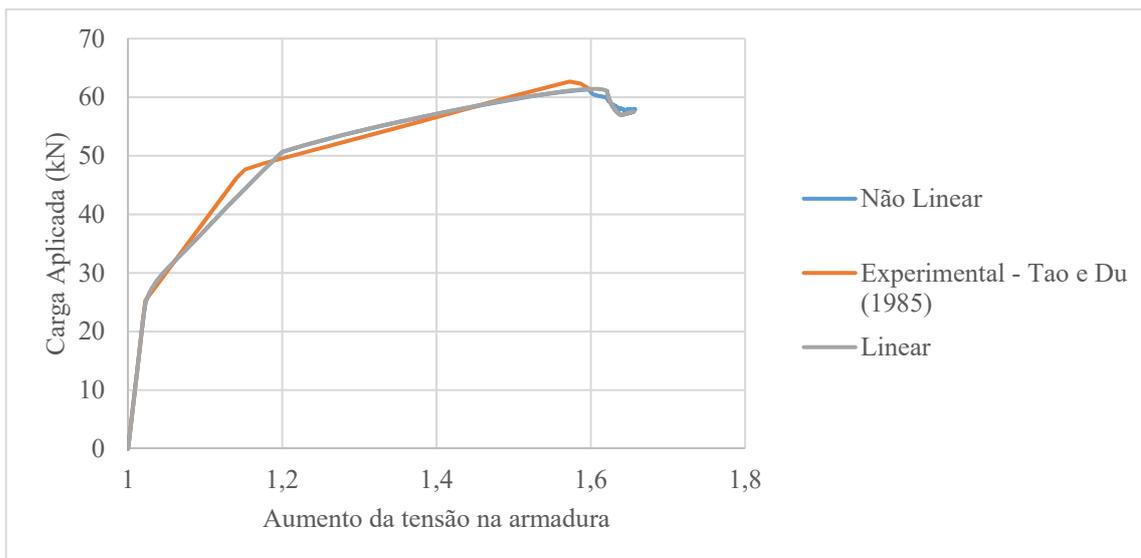


Figura 5.4: Aumento da tensão na armadura ativa da viga A2

Nas Figuras 5.4 e 5.6 são apresentados o aumento da tensão na armadura ativa em relação à carga aplicada para as vigas A2 e A3, respectivamente. O eixo horizontal dos gráficos dessas figuras fornece um fator que multiplicado pela força inicial de protensão determina a força atuante na armadura ativa para uma específica carga aplicada. Dessa forma, o eixo horizontal inicia da unidade já que para carga nula a força na armadura ativa é a força de protensão inicial. Nota-se dos gráficos dessas figuras que, tanto na análise não linear geométrica quanto na linear geométrica, o comportamento obtido para a fase linear foi praticamente coincidente com o comportamento experimental. Na fase não linear, o comportamento obtido pelos modelos numéricos tem boa aproximação com o comportamento experimental. Como para análise de deflexão nas Figuras 5.3 e 5.5, a diferença observada se deve à complexidade da simulação numérica do concreto após fissuração e da grande quantidade de fatores que influenciam no comportamento de estruturas protendidas.

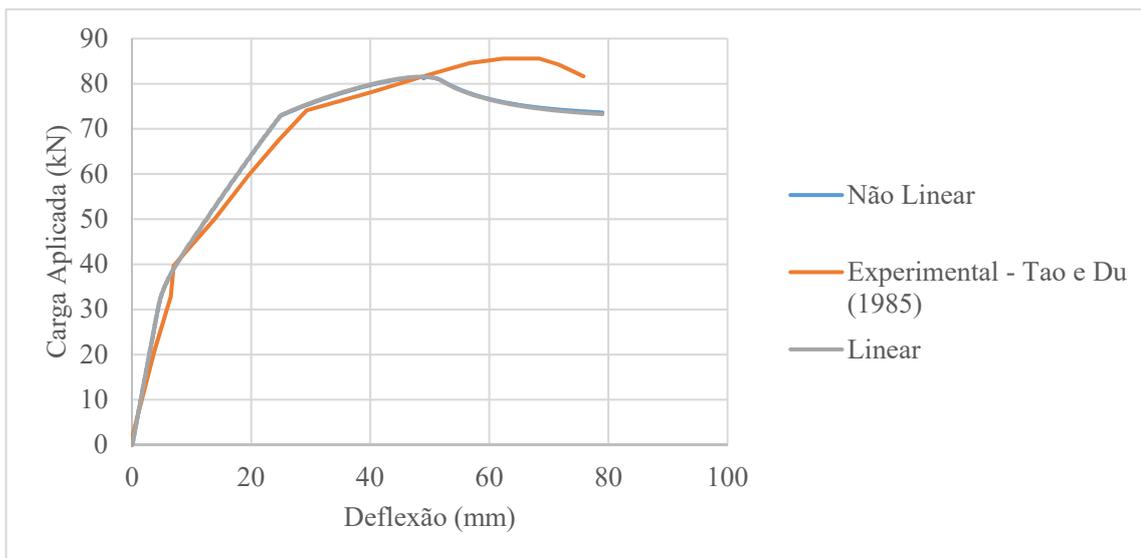


Figura 5.5: Deflexão no meio do vão da viga A3

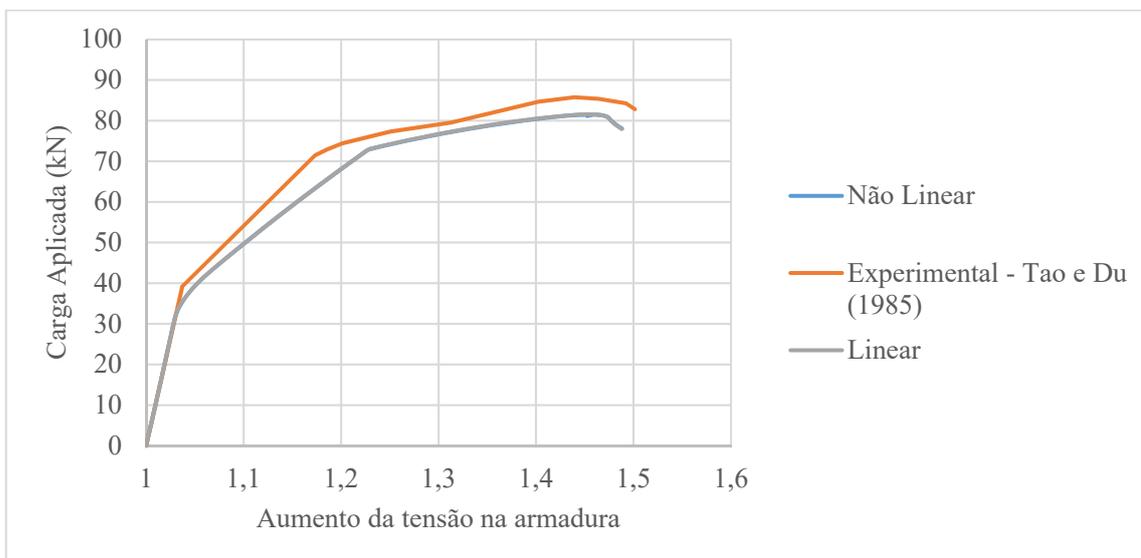


Figura 5.6: Aumento da tensão na armadura ativa da viga A3

5.2 VIGA COM PROTENSÃO INTERNA DE HUSSIEN, ELAFAND E ABDELRAHMAN (2012)

O resultado experimental de uma viga com protensão interna não aderente ensaiada por Hussien, Elafand e Abdelrahman (2012) é utilizada para avaliar o modelo numérico proposto. Como mostrando na Figura 5.7, a viga B7 é biapoiada fletida por duas cargas iguais e equidistantes dos apoios, gerando flexão pura entre as cargas e flexão simples na região entre os apoios e as cargas.

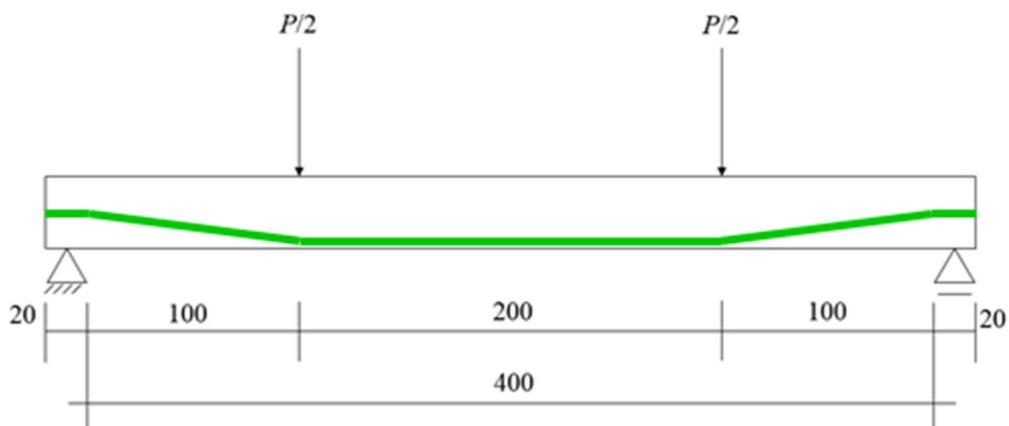


Figura 5.7: Detalhe do carregamento e do perfil do cabo da viga de Hussien, Elafand e Abdelrahman (2012) (unidades em cm)

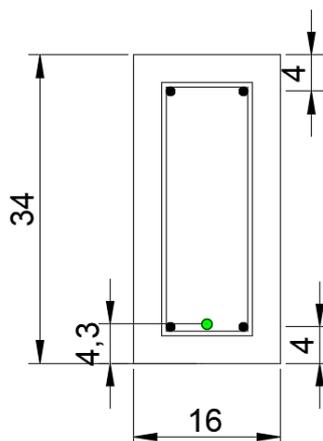


Figura 5.8: Detalhe da seção transversal no meio do vão da viga B7 de Hussien, Elafand e Abdelrahman (2012)

Como a Figura 5.8 mostra a viga possui seção retangular de 16 cm de largura e 34 cm de altura. A armadura passiva inferior e superior tem a mesma área, sendo igual a $1,57 \text{ cm}^2$. A distância da face da viga ao centro da armadura passiva é igual a 4,0 cm, tanto para a armadura inferior quanto para superior. Já a distância da face inferior ao centro da armadura ativa é igual a 4,3 cm no meio do vão. A armadura ativa tem área de $0,99 \text{ cm}^2$ com traçado semelhante ao diagrama de momentos devido à carga externa, partindo de uma excentricidade nula próxima aos apoios e uma excentricidade de 12,7 cm na região de momento máximo. A tensão efetiva no cabo (σ_{pe}) após a aplicação da protensão e perdas é dada igual a 1000 MPa.

A viga foi modelada utilizando-se 14 elementos de barra e 28 elementos de interface. Os dados do material concreto foram obtidos através de ensaios realizados por Hussien, Elafand e Abdelrahman (2012). Para a caracterização dos materiais foram utilizadas as curvas tensão-deformação apresentadas no item 4.1, sendo que para o concreto foi adotado resistência à

compressão $f_c = 37,4$ MPa e coeficiente de Poisson $\nu = 0,2$. As barras da armadura passiva apresentam módulo de elasticidade $E_s = 210000$ MPa, tensão de escoamento $f_y = 470$ MPa e coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. As barras de armadura ativa têm módulo de elasticidade $E_p = 195000$ MPa e tensão de escoamento $f_y = 1860$ MPa.

Na Figura 5.9 está apresentado o comportamento da deflexão no meio do vão da viga em relação à carga aplicada. Nota-se que tanto na análise não linear geométrica quanto na linear geométrica o comportamento obtido para a fase linear apresenta uma rigidez um pouco superior ao comportamento experimental. Após a fissuração do concreto, há uma aproximação entre o comportamento experimental e o encontrado com os modelos numéricos. Em termos de carga última, as respostas numéricas apresentam valores muito próximos ao resultado experimental (Figura 5.3).

Tabela 5.3: Carga última da viga de Hussien, Elafand e Abdelrahman (2012)

Carga última (kN)		
Experimental	Não Linear	Linear
133.02	135.72	137.85

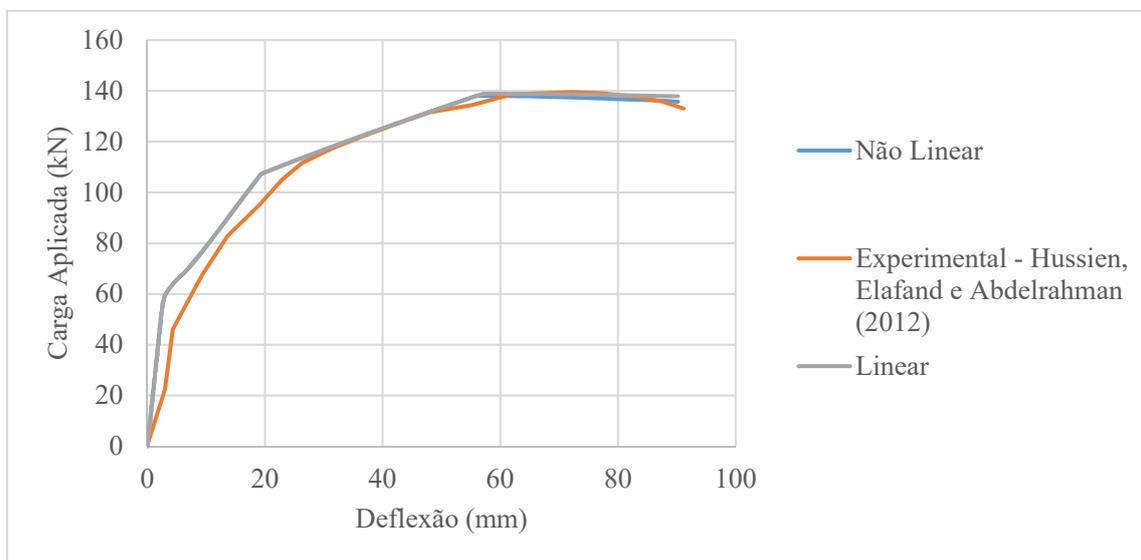


Figura 5.9: Deflexão no meio do vão

Na Figura 5.10 está apresentado o aumento da tensão na armadura ativa em relação à carga aplicada. Nota-se que o resultado obtido através da análise não linear geométrica e da linear geométrica teve um comportamento praticamente igual, mostrando nenhuma ou pouca influência da força de protensão na geração de efeitos de segunda ordem na viga. Não houve comparação com resultado experimental, pois os autores não disponibilizaram as informações.

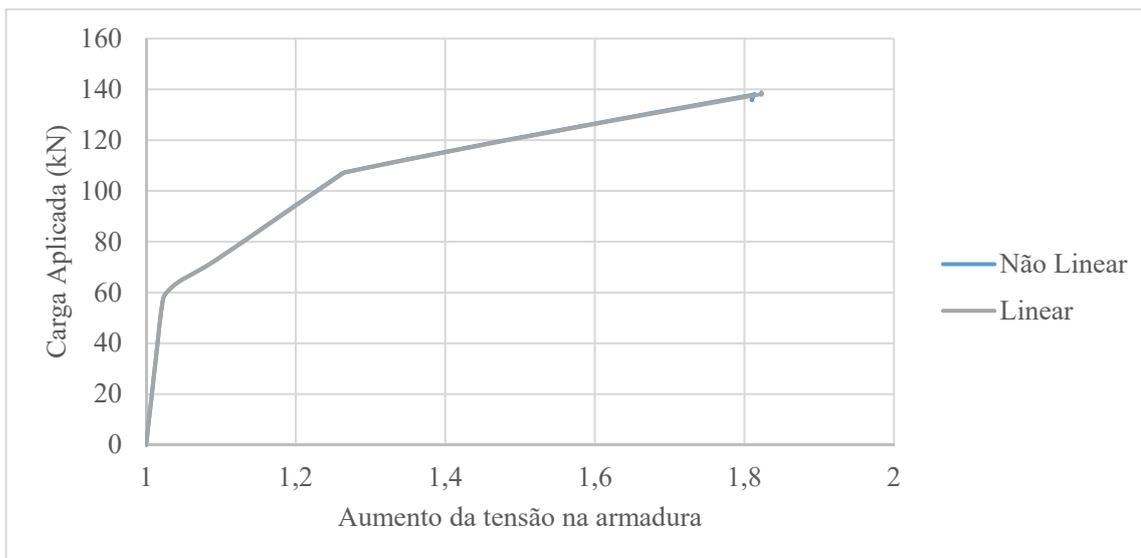


Figura 5.10: Aumento da tensão na armadura ativa

5.3 VIGA COM PROTENSÃO SUPERIOR E INFERIOR DE RABCZUK, AKKERMANN E EIBL (2005)

O resultado experimental e numérico de uma viga com protensão interna aderente ensaiada por Rabczuk, Akkermann e Eibl (2005) é utilizada para avaliar o modelo numérico proposto. A viga é biapoiada submetida a duas cargas iguais simétricas em relação aos apoios gerando flexão pura na região entre as cargas e flexão simples na região entre os apoios e as cargas.

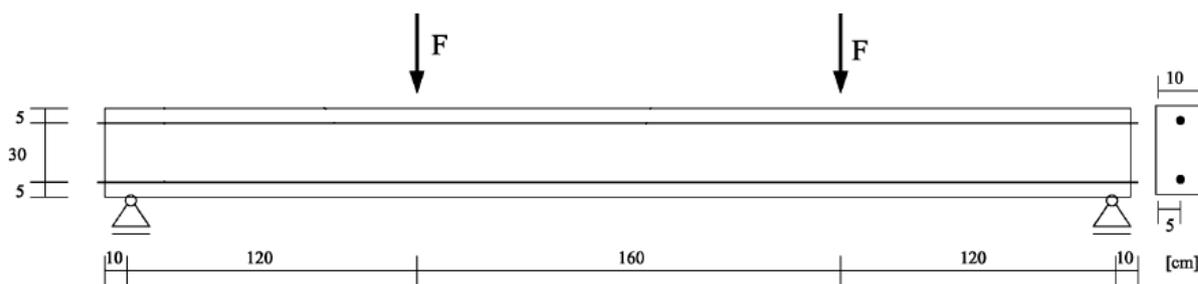


Figura 5.11: Detalhe do carregamento e do perfil do cabo da viga de Rabczuk, Akkermann e Eibl (2005)

A Figura 5.11 ilustra o esquema da viga e ela possui seção retangular com 10 cm de largura e 40 cm de altura. O protótipo foi protendido utilizando-se dois cabos de protensão de 7 mm. O cabo inferior fica a 5 cm da face inferior e foi protendido com 26,25 kN, o cabo superior está a 5 cm da face superior e foi protendido com 11,25 kN. O traçado dos cabos é reto.

A viga foi modelada utilizando-se 8 elementos de barra e 32 elementos de interface, sendo 16 elementos de interface para conectar os oito elementos de barra ao cabo de protensão inferior, e mais 16 elementos de interface para conectar os mesmos oito elementos de barra ao cabo de protensão superior. Para a caracterização dos materiais foram utilizadas as curvas tensão-deformação apresentadas no item 4.1, sendo que para o concreto foi adotado resistência à compressão $f_c = 45,0$ MPa e coeficiente de Poisson $\nu = 0,2$. As barras de armadura ativa têm módulo de elasticidade $E_p = 200000$ MPa e tensão de escoamento $f_y = 1470$ MPa.

Na Figura 5.12 está apresentado o comportamento da deflexão no meio do vão da viga em relação à carga aplicada. Nota-se que o comportamento obtido para a fase linear foi similar ao comportamento experimental e ao de Rabczuk, Akkermann e Eibl (2005). Porém, o início da fissuração no modelo experimental ocorreu com uma carga um pouco inferior a carga dos modelos numéricos. Após o início da fissuração, o modelo numérico teve um bom comportamento em relação ao experimental, atingindo uma carga última muito próxima. O modelo do presente trabalho apresentou um comportamento mais próximo da resposta experimental que o modelo numérico de Rabczuk, Akkermann e Eibl (2005) (Tabela 5.4).

Tabela 5.4: Carga última da viga de Rabczuk, Akkermann e Eibl (2005)

Carga última (kN)		
Experimental	Presente	Rabczuk, Akkermann e Eibl (2005)
36.30	37.07	33.22

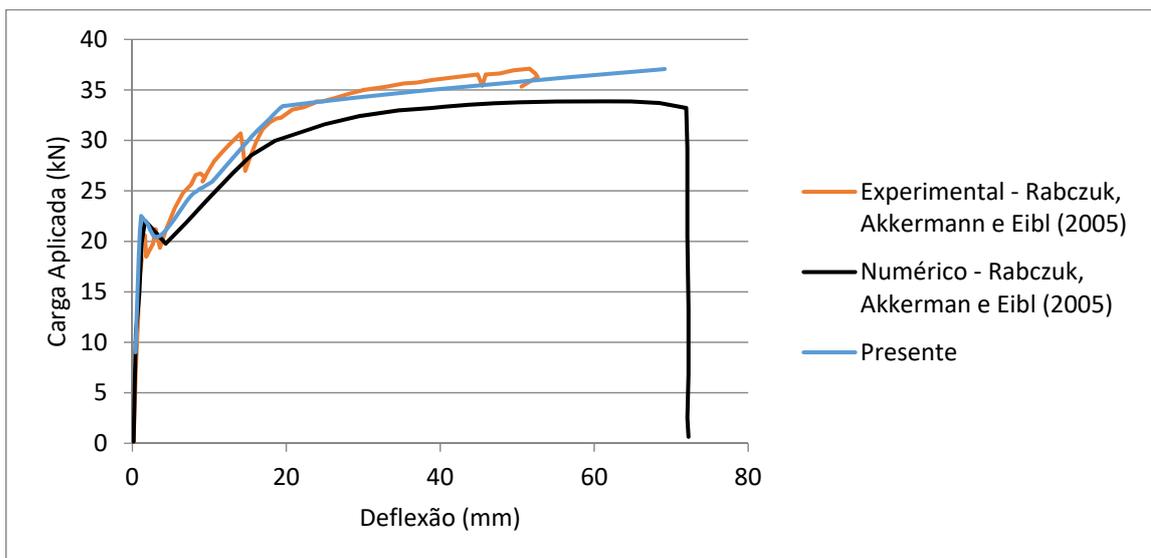


Figura 5.12: Deflexão no meio do vão

5.4 VIGA COM PROTENSÃO INTERNA DE CHEN (2008)

Um ensaio experimental de Chen (2008) de uma viga protendida com cabos internos não aderentes pós-tensionados foi avaliada numericamente por Lou, Lopes e Lopes (2016). A viga possui 10m de comprimento e 3 apoios, com vãos efetivos de 4,8m. A viga é carregada por quatro cargas iguais distanciadas de 1,6m dos apoios (Figura 5.13).

O resultado experimental de uma viga com protensão interna não aderente ensaiada por Chen (2008) é utilizada para avaliar o modelo numérico proposto. A viga B7 é bi apoiada fletida por duas cargas iguais e equidistantes dos apoios gerando flexão pura entre as cargas e flexão simples na região entre os apoios e as cargas.

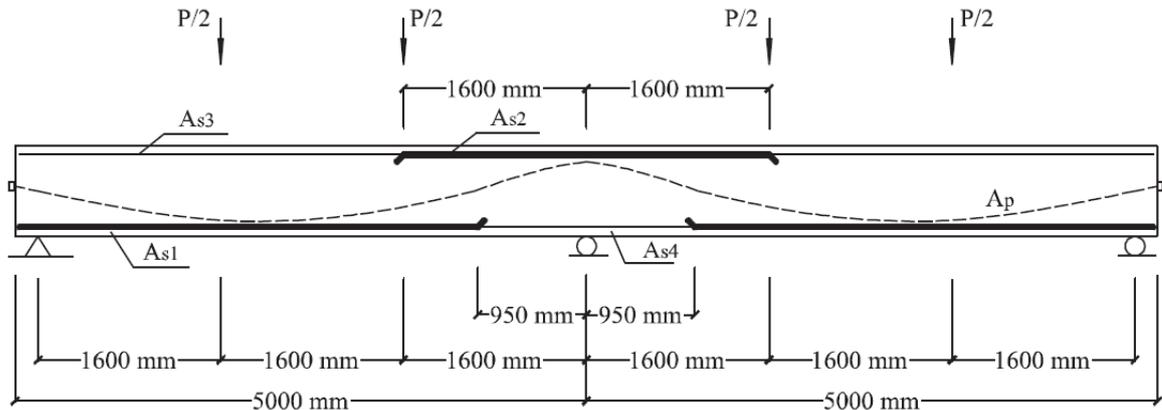


Figura 5.13: Detalhe do carregamento e do perfil do cabo da viga de Chen (2008)

A viga possui seção retangular de 15 cm de largura e 30 cm de altura. A quantidade de armadura passiva inferior e superior utilizada na viga está descrita na tabela 5.2, assim como outros parâmetros utilizados. A armadura ativa tem área de 1,4 cm² com um traçado parabolóide. A tensão efetiva no cabo (σ_{pe}) após a aplicação da protensão e perdas é igual a 1181 MPa.

Tabela 5.5: Parâmetro da viga de Chen (2008)

Aço de reforço					Aço de protensão			Concreto
As1 (mm ²)	As2 (mm ²)	As3 (mm ²)	As4 (mm ²)	f_y (MPa)	Ap (mm ²)	σ_{pe} (MPa)	f_{pu} (MPa)	f_{cm} (MPa)
603,2	508,9	226,2	603,2	360	140	1181	1941	38,3

A viga foi modelada utilizando-se 12 elementos de barra e 24 elementos de interface. Os dados do material concreto foram obtidos através de ensaios realizados por Chen (2008). Para a caracterização dos materiais foram utilizadas as curvas tensão-deformação apresentadas no item 4.1, sendo que para o concreto foi adotado resistência média à compressão $f_c = 38,3$ MPa e coeficiente de Poisson $\nu = 0,2$. As barras da armadura passiva apresentam módulo de elasticidade $E_s = 197000$ MPa, tensão de escoamento $f_y = 360$ MPa. As barras de armadura ativa têm módulo de elasticidade $E_p = 200000$ MPa.

Na Figura 5.14 está apresentado o comportamento da deflexão no meio do vão da viga em relação à carga aplicada. Nota-se que na fase linear o comportamento obtido foi similar ao comportamento experimental e ao de Lou, Lopes e Lopes (2016). Com o início da fase não linear, o comportamento da estrutura proposta por este trabalho ainda se apresentou próximo ao comportamento experimental, porém com uma rigidez um pouco mais elevada. Em termos de carga última, como pode ser visto na Tabela 5.6, o modelo experimental de Chen (2008) teve uma carga última menor do que a encontrada tanto neste trabalho quanto no trabalho de Lou, Lopes e Lopes (2016).

Tabela 5.6: Carga última da viga de Chen (2008)

Carga última (kN)		
Experimental	Presente	Lou, Lopes e Lopes (2016)
162.06	184.61	167.20

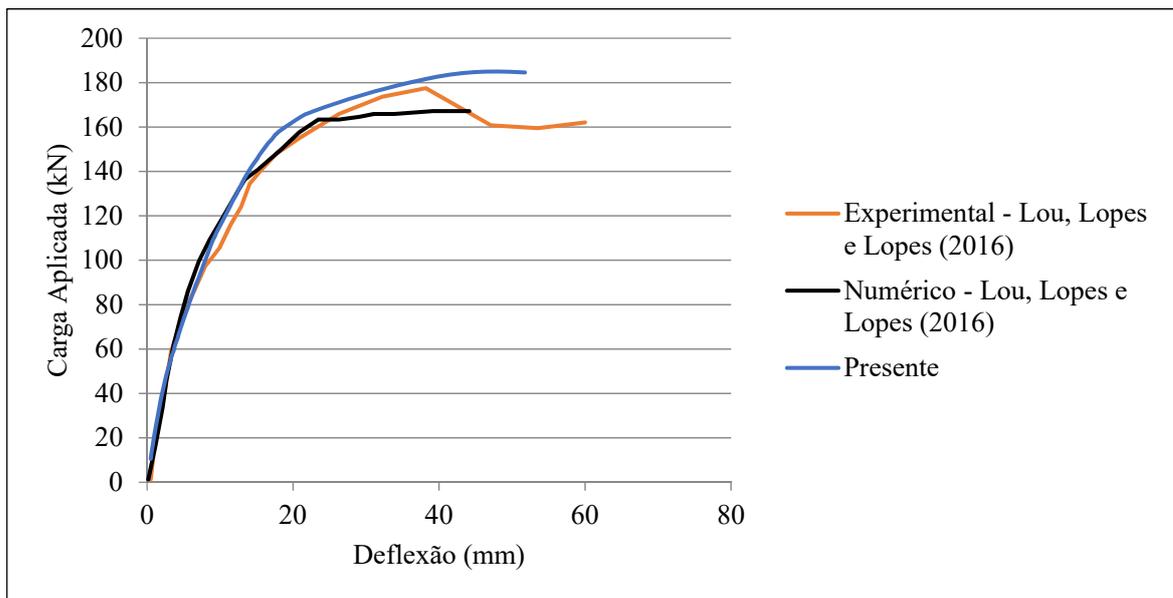


Figura 5.14: Deflexão no meio do vão

5.5 LAJE DE COOKE, PARK E YONG (1981)

Cooke, Park e Yong (1981) apresentam resultados experimentais de ensaios de 9 protótipos de lajes de concreto com protensão interna não aderente. Todas as lajes são bi apoiadas e com cargas dispostas em seus terços médios, como ilustrado na Figura 5.15. As lajes analisadas neste exemplo para validação dos elementos foram as lajes 5 e 8.

As lajes possuem uma espessura de 18 cm e altura útil da armadura protendida de 12 cm. O traçado do cabo de protensão é reto. Cada laje foi protendida com 3 cordoalhas de 12,7 mm. Algumas características das lajes são apresentadas na Tabela 5.7.

Tabela 5.7: Características das lajes de Cooke, Park e Yong (1981)

Laje	L (cm)	L_e (cm)	b (cm)	f_{cm} (kN/cm ²)	σ_{p0} (kN/cm ²)
5	360	340	70,5	3,44	115,4
8	240	220	70,5	3,08	116,8

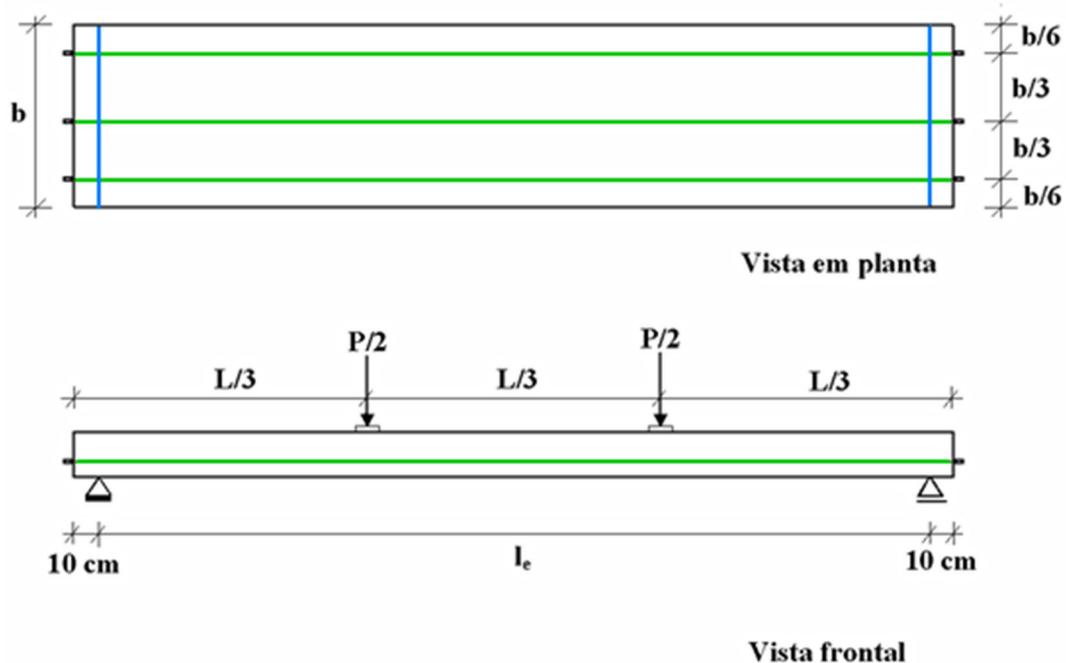


Figura 5.15: Vista em planta e frontal das lajes de Cooke, Park e Yong (1981)

A laje 5 foi modelada utilizando-se 30 elementos de placa e 60 elementos de interface como mostrado na Figura 5.16. Os dados do material concreto foram obtidos através de ensaios realizados por Cooke, Park e Yong (1981). Para a caracterização dos materiais foram utilizadas as curvas tensão-deformação apresentadas no item 4.1, sendo adotada para a laje 5 a resistência à compressão f_c de 34,4 MPa e coeficiente de Poisson $\nu = 0,2$. A laje 8 foi modelada a partir de

36 elementos de placa e 72 elementos de interface. A laje 8 possui a resistência à compressão f_c de 30,8 MPa e coeficiente de Poisson $\nu = 0,2$.

As barras de armadura ativa têm módulo de elasticidade E_p de 202100 MPa, tensão de escoamento f_y de 1582 MPa e tensão de ruptura de 1765 MPa.

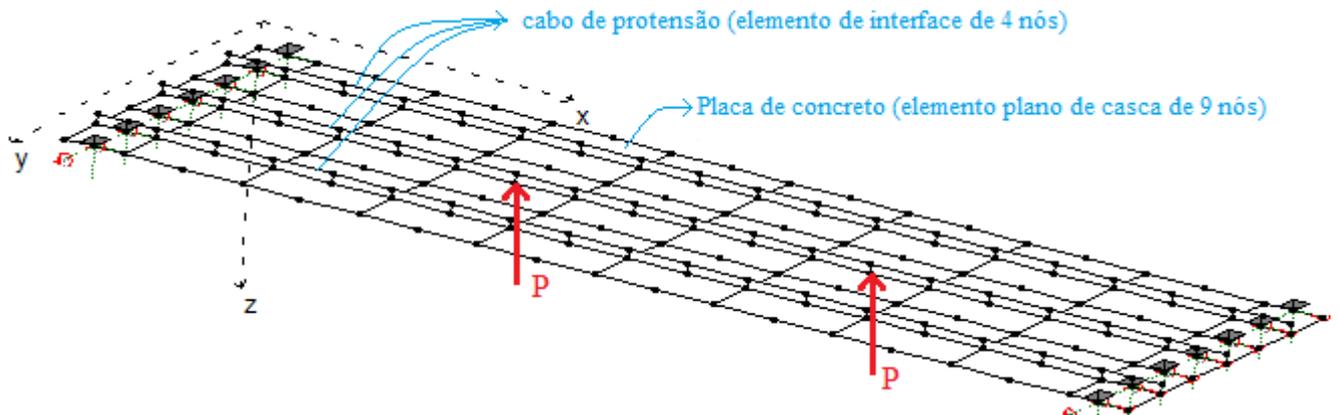


Figura 5.16: Discretização da laje de Cooke, Park e Yong (1981)

Na Figura 5.17 está apresentado o comportamento da laje 5 relacionando a deflexão no meio do vão à carga aplicada. Nota-se que em nos dois modelos numéricos propostos o comportamento obtido para a fase linear possui um comportamento muito próximo ao experimental. Na parte não linear da curva carga-deslocamento da Figura 5.17 os modelos numéricos apresentam boa aproximação da análise experimental. Nesse exemplo o efeito de segunda ordem gerou uma diferença na resposta numérica em termos de carga última, uma vez que na análise não linear geométrica se obteve uma carga última mais próxima da resposta experimental do que na análise linear geométrica.

Tabela 5.8: Carga última das lajes de Cooke, Park e Yong (1981)

Laje	Carga última (kN)		
	Experimental	Não Linear	Linear
5	78.90	75.16	70.42
8	124.11	114.23	100.63

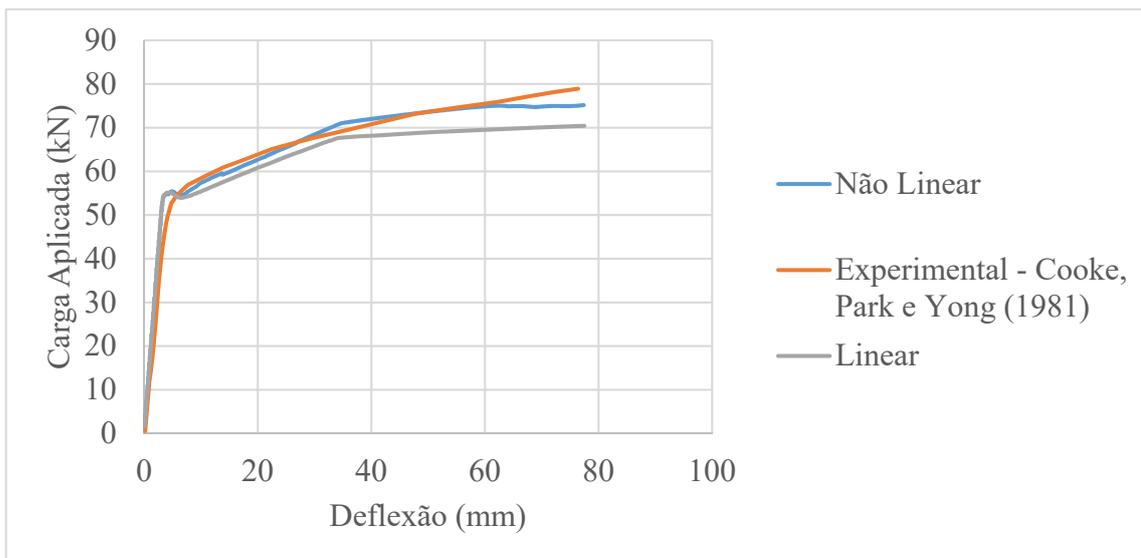


Figura 5.17: Deflexão no meio do vão da laje 5

Na Figura 5.18 é apresentado o aumento da tensão na armadura ativa em relação à carga aplicada para a laje 5 (ma descrição dos eixos deste gráfico já foi feita nos exemplos anteriores). Dessa figura observa-se que para a tensão na armadura ativa as repostas numéricas referentes à consideração ou não da não linearidade geométrica são praticamente coincidentes, e ambas têm uma boa aproximação com a resposta experimental.

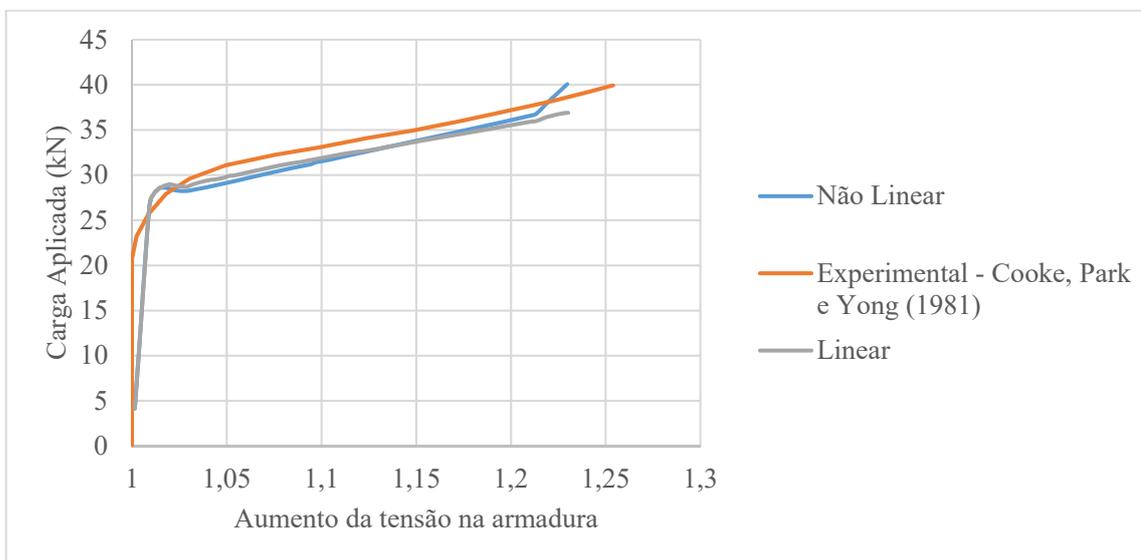


Figura 5.18: Aumento da tensão na armadura ativa da laje 5

Na Figura 5.19 está apresentado comportamento da laje 8 relacionando a deflexão no meio do vão à carga aplicada. Nota-se que tanto na análise não linear geométrica quanto na linear geométrica o comportamento obtido para a fase linear possui uma rigidez um pouco superior ao comportamento da laje experimental. Em termos das análises numéricas as

respostas obtidas considerando linearidade e não linearidade geométrica são muito próximas, uma diferença maior nessas análises é percebida quando a laje está próxima ao colapso. Em termos de carga última a análise não linear geométrica apresenta resultado mais próximo da análise experimental.

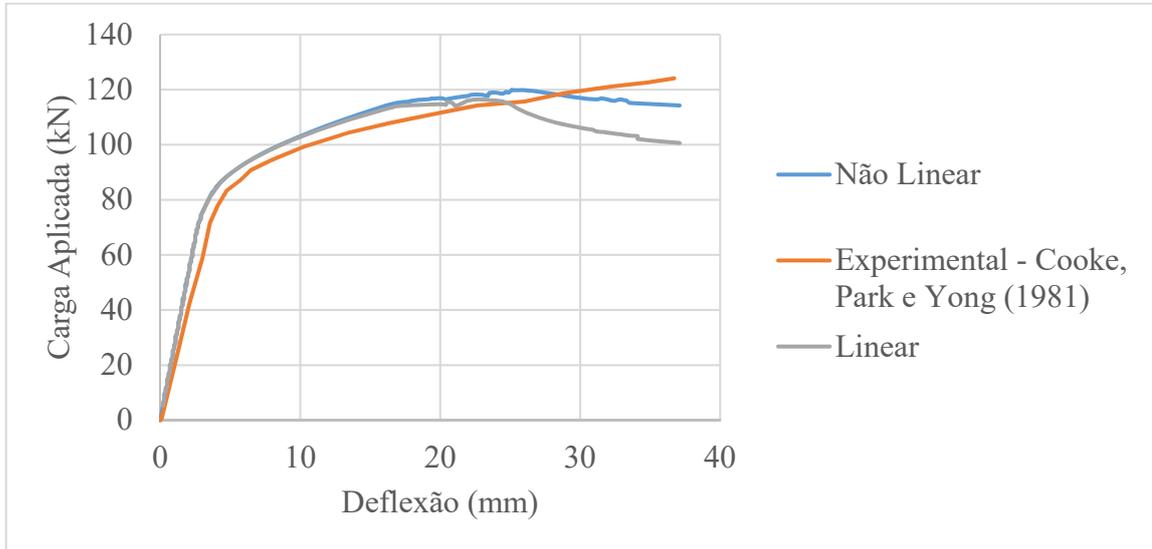


Figura 5.19: Deflexão no meio do vão da laje 8

Na Figura 5.20 é apresentado o aumento da tensão na armadura ativa em relação à carga aplicada da laje 8. Nota-se que para o início do carregamento, os modelos numéricos tiveram um aumento maior da tensão no cabo do que o modelo experimental. Com o aumento da carga aplicada, observa-se que o modelo experimental, para uma mesma tensão na armadura, estava com uma carga maior aplicada. Observa-se também que a tensão na armadura do experimento foi superior à tensão dos modelos numéricos e que suportou uma carga um pouco maior.

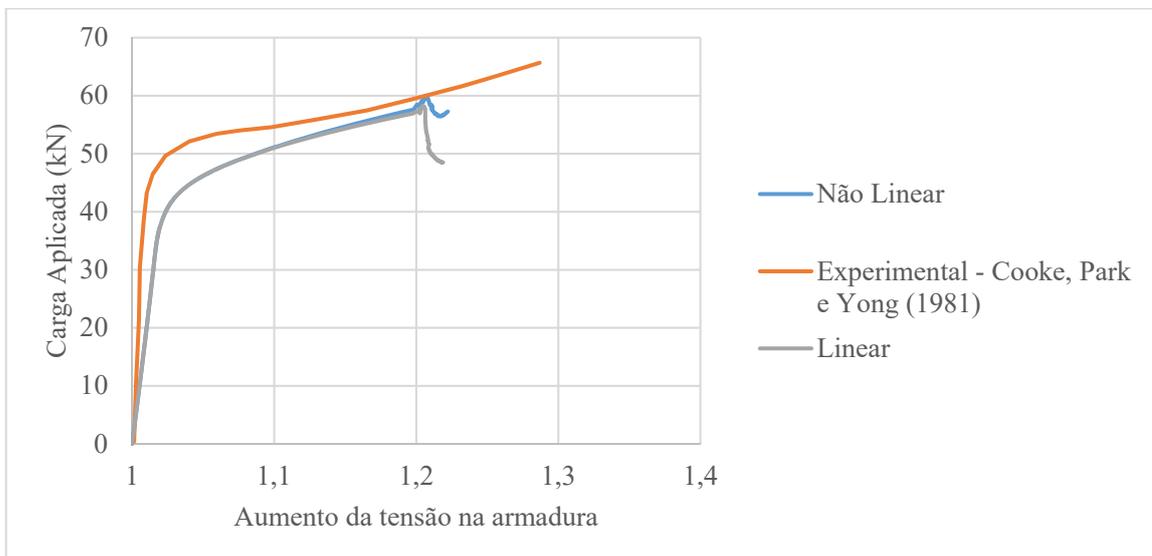


Figura 5.20: Aumento da tensão na armadura ativa da laje 8

5.6 LAJE DE ROCA E MARÍ (1993b)

No trabalho de Roca e Marí (1993b) são apresentados resultados experimentais e numéricos de laje de concreto com protensão interna não aderente nos dois sentidos. A laje é apoiada em 4 pontos, sendo estes localizados no ponto médio de cada lado da laje retangular, e com carga uniformemente distribuída por toda a superfície da laje (Figura 5.21).

A laje possui uma espessura de 20 cm. O traçado do cabo de protensão é parabólico, sendo que nos pontos de ancoragem a excentricidade é nula e no meio do vão o cabo está a 3,5 cm da face inferior da laje (Figura 5.22). A laje foi protendida com 20 cordoalhas de área igual a 92,9 mm². Sendo 10 cordoalhas para cada direção, espaçadas igualmente a cada 40 cm a partir dos pontos de apoio.

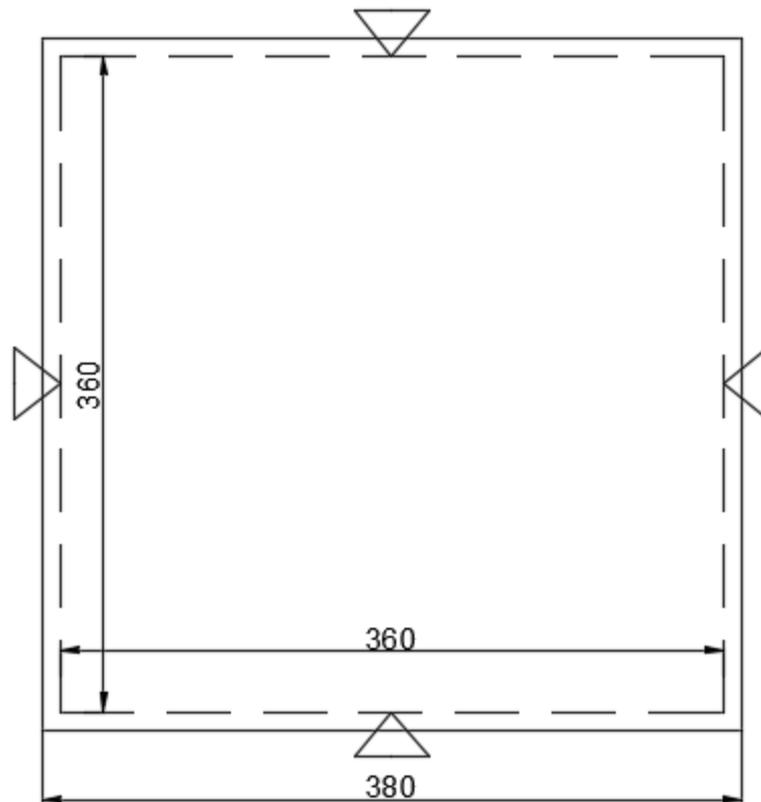


Figura 5.21: Vista em planta da laje de Roca e Marí (1993b)

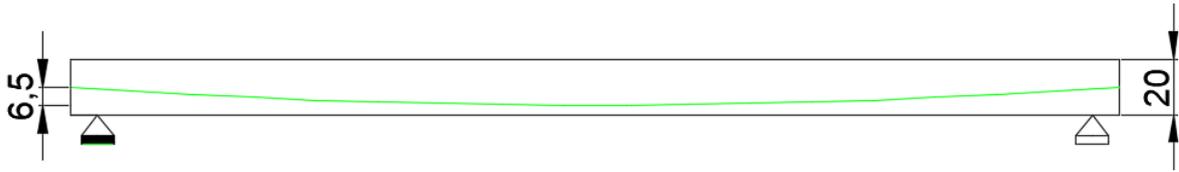


Figura 5.22: Vista frontal da laje de Roca e Marí (1993b)

A laje foi modelada tomando vantagem da dupla simetria, assim sendo somente um quarto da laje foi discretizada. Para isto utilizaram-se 81 elementos de placa e 180 elementos de interface como mostrado na Figura 5.23. Nessa figura os elementos de interface aparecem paralelos à superfície média da placa porque o gerador de malha utilizado ainda não permite a geração de elementos de interface não retangulares (sendo assim, a figura ilustra fielmente a posição da superfície média da laje de concreto e as posições x e y dos cabos de protensão). Para a análise numérica a posição z dos cabos foi determinada manualmente.

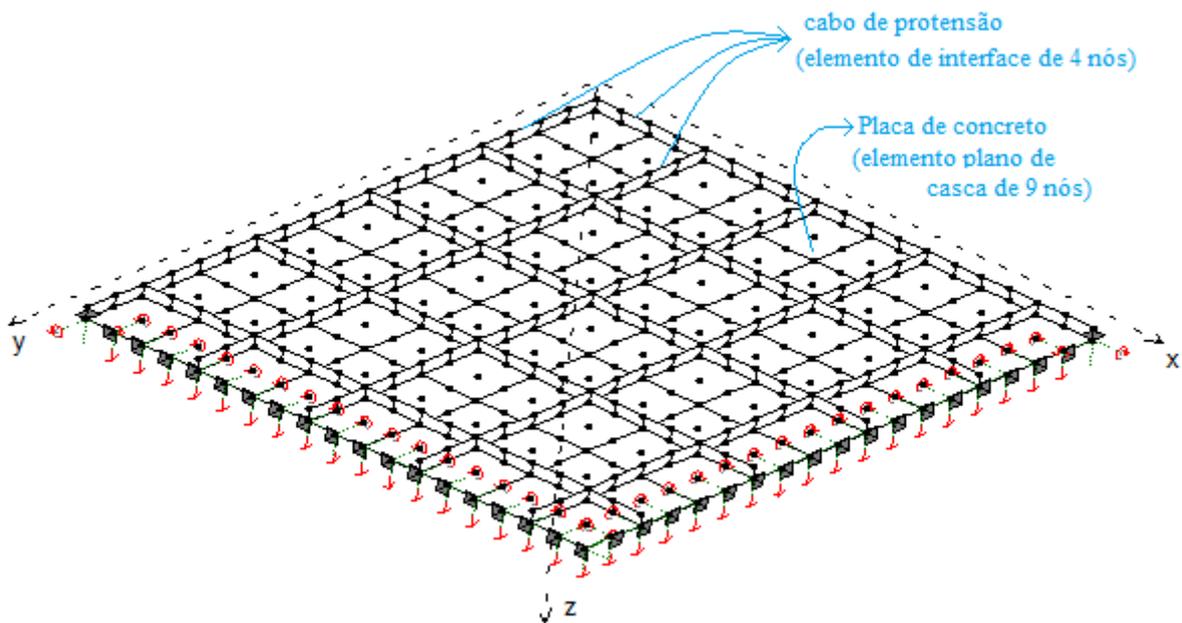


Figura 5.23: Discretização da laje de Roca e Marí (1993b)

Para a caracterização dos materiais foram utilizadas as curvas tensão-deformação apresentadas no item 4.1, sendo que a resistência à compressão f_{ck} de 35,0 MPa e coeficiente de Poisson $\nu = 0,18$. As barras de armadura ativas são modeladas com rigidez apenas no sentido longitudinal da barra, com módulo de elasticidade E_p de 190000 MPa, tensão de escoamento f_y de 1615 MPa e tensão de ruptura de 1898 MPa.

Tabela 5.9: Carga última da laje de Roca e Mari (1993b)

Carga última (kN)		
Experimental	Presente	Roca e Mari (1993b)
93.84	90.28	94.52

Na Figura 5.24 está apresentado o comportamento da laje relacionando a deflexão no meio da laje à carga aplicada. Nota-se que o comportamento na fase linear está muito próximo ao comportamento do modelo experimental, porém a primeira fissura ocorre com uma carga um pouco inferior. Após o início da fissuração tanto o modelo numérico proposto quanto o modelo numérico de Roca e Mari (1993b) apresentaram uma rigidez um pouco menor que o modelo experimental. Como mostrado na Tabela 5.9, em termos de carga última ambos os modelos numéricos apresentaram boa concordância com a resposta experimental de Roca e Mari (1993b).

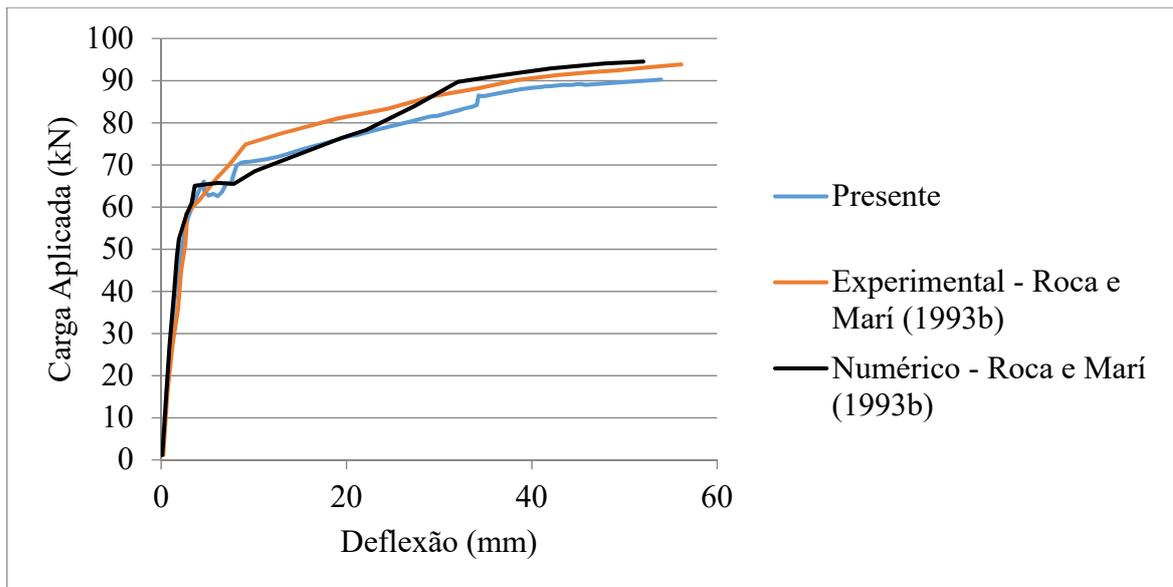


Figura 5.24: Deflexão no centro da laje

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

6.1 COMENTÁRIOS GERAIS

Este trabalho se inicia apresentando uma descrição dos objetivos e fatores motivadores que levaram o autor a pesquisar sobre o tema: análise numérica de vigas e lajes protendidas.

No Capítulo 2, realizou-se a revisão bibliográfica de modelos numéricos utilizados para analisar placas de concreto e estruturas protendidas. Além disso, foi apresentado um histórico da protensão e algumas características desse tipo de estrutura.

No capítulo seguinte, foram detalhadas as perdas de protensão que ocorrem em uma estrutura, mostrando o procedimento de cálculo tanto das perdas imediatas quanto das perdas ao longo do tempo.

São apresentadas no capítulo 4 as formulações dos elementos implementados nesta pesquisa. Inicialmente é apresentada a formulação do elemento plano de casca de nove nós e cinco graus de liberdade por nó a nível local considerando a teoria de placa de Reissner-Mindlin. Em seguida são apresentadas, as formulações dos elementos finitos de barra e de interface que foram utilizados na modelagem das lajes e vigas protendidas.

No capítulo 5 foram desenvolvidos alguns exemplos numéricos com o objetivo de evidenciar a eficiência dos elementos finitos implementados. Os resultados numéricos encontrados são comparados com respostas experimentais e numéricas extraídas de trabalhos encontrados na literatura.

6.2 CONCLUSÕES

Neste trabalho utilizando o Método dos Elementos Finitos, um modelo numérico para análise numérica linear e não linear de vigas e lajes protendidas submetidas à sua capacidade última foi implementado.

O comportamento estrutural de placas de concreto foi simulado por elementos finitos planos de casca considerando o comportamento ortotrópico do concreto após a fissuração. Já o comportamento das vigas de concreto foi simulado por elementos finitos de barra considerando a não linearidade do concreto através da curva tensão deformação do concreto sob carregamento axial. Para as cordoalhas de aço utilizadas na protensão das vigas e lajes foram utilizados

elementos de interface para a simulação do seu comportamento estrutural bem como a conexão entre as cordoalhas e o elemento de concreto.

A eficiência das formulações implementadas para simulação numérica de vigas e lajes protendidas foi devidamente comprovada com os resultados obtidos em vários exemplos encontrados na literatura. Em alguns exemplos a metodologia sugerida nesse trabalho apresentou resultados melhores que o modelo numérico apresentado na literatura. Em outros, observou-se boa concordância com as respostas experimentais, principalmente em termos de carga última suportada pela estrutura analisada. Algumas pequenas diferenças encontradas nas respostas numéricas e experimentais podem ser explicadas devido à análise simplificada por meio de elementos planos de casca para simular a laje de concreto, sendo considerado para análise não linear do concreto o modelo de dano sugerido por Huang, Burgess e Plank (2003a). Modelos de danos mais elaborados, como o controle da formação e abertura de fissuras utilizando a energia de fratura do concreto, exigem uma discretização mais detalhada e tridimensional da laje ou viga de concreto protendido.

Como uma conclusão geral, os modelos numéricos desenvolvidos neste trabalho mostraram-se adequados para modelagem dos problemas propostos, sendo as validações e robustez destes elementos verificadas com base na comparação dos resultados encontrados na literatura. Dessa forma, o objetivo deste trabalho foi alcançado e outros trabalhos poderão ser realizados com as ferramentas desenvolvidas.

6.3 TRABALHOS FUTUROS

O elemento finito plano de casca mais o elemento de interface implementados nesse trabalho permitem uma análise não linear de lajes de concreto protendido. O elemento plano de casca é baseado na teoria de Reissner-Mindlin e pode apresentar erros numéricos no caso de análise de placas muito finas e baixa discretização. Dessa forma sugere-se a implementação de um elemento de casca considerando a teoria de placa de Kirchhof para simulação de placas muito finas. Além disso, sugere-se o desenvolvimento de elementos finitos de casca curvos para a análise de cascas ou lajes curvas protendidas, sendo necessário para isso estender a formulação do elemento de interface para um sistema de referência no espaço.

Outro estudo interessante seria inserir as formulações descritas neste trabalho dentro de um algoritmo de otimização para determinar, por exemplo, as posições em relação ao eixo

perpendicular ao plano da laje dos cabos de protensão que otimizam a estrutura em termos de carga última e de serviço.

Para facilitar a utilização do programa FEMOOP utilizado neste trabalho como plataforma para modificações e implementações dos elementos propostos, sugere-se desenvolver uma interface gráfica com pré e pós-processamento gráfico tornando o seu uso mais simples.

7 REFERÊNCIAS

Agostini, L. R. S. Concreto protendido: estudo das vigas isostáticas. Livraria Ciência e Tecnologia. São Paulo, 1983.

Alkhairi, F. M.; Naaman, A. E. Analysis of Beams Prestressed with Unbonded Internal or External Tendons. *Journal of Structural Engineering*, New York, ASCE, v. 119, n. 9, p. 2680-2699, Sep. 1993.

American Society of Civil Engineers - ASCE (1982). Finite element analysis of reinforced concrete. New York.

Associação Brasileira de Normas Técnicas - ABNT NBR 6118. Projeto de estruturas de concreto — Procedimento. Rio de Janeiro, 2014

Associação Brasileira de Normas Técnicas - ABNT NBR 8953. Concreto para fins estruturais - Classificação pela massa específica, por grupos de resistência e consistência. Rio de Janeiro, 2015

Bailey C. G. (1995) Simulation of the structural behavior of steelframed buildings in fire. PhD thesis, Univ. of Sheffield, Sheffield, U.K.

Barbieri, R. A. Modelo Numérico para Análise à Flexão de Elementos Estruturais com Protensão Aderente e Não Aderente. 2003. 330 p. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

Barbieri, R. A.; Gastal, F. P. S. L.; Filho, A. C. Numerical Model for the Analysis of Unbonded Prestressed Members. In: *Journal of Structural Engineering*, Vol. 132, No. 1, January 1, 2006.

Barbosa, M. P. Concreto Protendido, notas de aula. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, São Paulo, 2008.

Bastos P. S. S. Concreto Protendido – Notas de aula. Universidade Estadual Paulista, Bauru, São Paulo, 2014. 98 páginas.

Bazant, Z. P.; Wu, S. T. Rate-Type Creep Law of Aging Concrete Based on Maxwell Chain. *Materials and Structures*, v.7, n.37, p.45-60, 1974.

Belletti, B.; Gasperi A. Behavior of Prestressed Steel Beams. *Journal of Structural Engineering*. Setembro, 2010.

Carol, I.; Murcia, J. Nonlinear Time-Dependent Analysis of Planar Frame Using an ‘Exact’ Formulation – I. Theory. *Computers & Structures*, London, Pergamon Press, v. 33, n. 1, p.79-87, Jan. 1989.

Cauduro, E. L. Em Favor da Leveza. *Téchne*, São Paulo, PINI, n. 26, 1997.

CEB/FIP MODEL CODE. Fip Bulletin 55: Model Code 2010, First complete draft –Volume 1. International Federation for Structural Concrete, 2010.

Chen, YW. The experimental researches on unbonded partially prestressed concrete continuous beams (Master’s thesis). Changsha: Hunan University; 2008

Cholfe, L.; Bonilha, L. *Concreto Protendido – Teoria e Prática*. 1ª Edição. São Paulo, Brasil: Pini, 2013.

Cooke, N.; Park, R.; Yong, P. Flexural strength of prestressed concrete members with unbonded tendons. *PCI Journal*, November-December, 1981.

Darwin, D. and Pecknold D.A. Nonlinear biaxial stress–strain law for concrete. *ASCE J. Eng. Mech.*, v.103, n.2, p.229–241, 1977.

Dias, L. E. S. Análise numérica de cascas de concreto ligadas com conexão deformável a vigas de aço usando elementos finitos de casca e interface. Dissertação (Mestrado). Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto, 2016.

El-Mezaini, N.; Çitipitioglu, E. Finite Element Analysis of Prestressed and Reinforced Concrete Structures. *Journal of Structural Engineering*, New York, ASCE, v. 117, n. 10, Oct. 1991.

Emerick, A.A. *Projeto e Execução de Lajes Protendidas*, 1ª ed., Brasil, Alexandre Emerick, 2005.

Figueiras, J. A.; Póvoas, R. H. C. F. Modelling of Prestress in Non-Linear Analysis of Concrete Structures. *Computers & Structures*. London, Elsevier Science, v. 53, n.1, p. 173-187, Jan. 1994.

Gomes H. A. Vigas protendidas - estudo da norma e modelagem com auxílio de programa de análise comercial. 92 páginas. Monografia - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009.

Gomes, I. R., Análise Elastoplástica Laminar e Não-Laminar de Placas Finas pelo Método dos Elementos Finitos, Porto Alegre: CPGEC, 1990. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Escola de Engenharia, UFRGS.

Guimarães, L. G. S. Disciplina orientada a objetos para análise e visualização bidimensional de modelos de elementos finitos. Dissertação (Mestrado), Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica - Rio. Rio de Janeiro, 1992.

Hanai, J. B. Fundamentos do concreto protendido. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. 116 f. São Carlos, 2005.

<http://efreyssinet-association.com>, visitado em 08/09/2018

http://vswmcivil.blogspot.com/2018/03/blog-post_13.html - modificado, visitado 25/08/2018

Huang Z., Burgess I. W., Plank R. J. (1999) Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Slabs Subjected to Fire. *ACI Structural Journal*, 96(1), 127-135.

Huang Z., Burgess I. W., Plank R. J. (2003a) Modelling Membrane Action of Concrete Slabs in Composite Buildings in Fire. Part I: Theoretical Development. *Journal of Structural Engineering*, ASCE. 2003, 129 (8), pp 1093-1102.

Huang Z., Burgess I. W., Plank R. J. (2003b) Modelling Membrane Action of Concrete Slabs in Composite Buildings in Fire. Part II: Validations. *Journal of Structural Engineering*, ASCE. 2003, 129 (8), pp 1103-1112.

Hussien, O.F.; Elafand, T. H. K.; Abdelrahman, A. A.; Abdel, B. S. A.; Nasr, E. A. Behavior of bonded and unbonded prestressed normal and high strength concrete beams. *HRBC Journal*, p. 239-251, v. 8, n. 3, 2012.

Jiang, J. Analysis of Reinforced and Prestressed Concrete Slabs by Finite Element Method. Thesis. Nanjing Institute of Technology, China, 1985

Jiang J., Mirza F. A. (1997) Nonlinear analysis of reinforced concrete slabs by a discrete finite element approach, *Comput. Struct.* 65 (4) (1997) 585–592.

- Jofriet J. C., McNeice G. M. (1971) Finite-element analysis of reinforced concrete slabs, J. Struct. Div. ASCE 97 (ST3) (1971) 785–806.
- Kabaila, A.; Saenz, L. P.; Tulin, L. G.; Gerstle, K. H. Equation for the Stress- Strain Curve of Concrete. ACI Journal, Farmington Hills, ACI, v.61, n. 3, p.1227-1239, Mar. 1964.
- Kalintzis, C. A. A. Estudo da fluência do concreto de elevado desempenho. 2000. 146 p. Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2000.
- Lazzari, P. M., Campos Filho, A., Gastal, F. P. S. L., Barbieri, R. A., & Schwingel, R. C.. (2013). Automatização da verificação de vigas em concreto com protensão aderente e não aderente, segundo as normas brasileira e francesa. Revista IBRACON de Estruturas e Materiais, 6(1), 13-54.
- Loo Y. C., Guan H. (1997) Cracking and punching shear failure analysis of RC flat plates, J. Struct. Eng., ASCE 123 (10) (1997) 1321–1330.
- Lou T, Lopes S, Lopes A. Response of continuous concrete beams internally prestressed with unbonded frp and steel tendons. Compos Struct 2016;154:92–105.
- Martineli, M. Modelagem de situações de punção em lajes de concreto armado através do Método dos Elementos Finitos. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, CPGEC, 168 p., 2003.
- Mello, A.L.V. Cálculo de lajes lisas com protensão parcial e limitada. 2005. 128 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de São Carlos, São Paulo.
- Milani, A. C. Análise de Lajes Planas Protendidas Pelo Método dos Elementos Finitos. 2006. 145 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rio Grande do Sul
- Pereira, S. S. R. SVTSCP: Um Sistema para Verificação de Tensões em Seções em Concreto Protendido. Dissertação (Mestrado) — UFMG – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil, agosto 1987
- Pfeil, W. Concreto Protendido: Processos Construtivos, Perdas de Protensão, Sistemas Estruturais. Rio de Janeiro, Brasil: LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1980.

Pfeil, W. Concreto Protendido: Processos Construtivos, Perdas de Protensão. 2ª Edição. Rio de Janeiro, Brasil: LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1983.

Pfeil, W. Concreto Protendido Vol.1 – Introdução. LTC Editora, Rio de Janeiro, 1984.

Phuvoravan K., Sotelino E. D. (2005) Nonlinear finite element for reinforced concrete slabs, J. Struct. Eng., ASCE 13 (4) (2005) 643–649.

Polak M. A. (1996) Effective stiffness model for reinforced concrete slabs, J. Struct. Eng., ASCE 122 (9) (1996) 1025–1030.

Prates Junior, N.P., Silva, C.S.B., Campos Filho, A., & Gastal, F.P.S.L. Rocha, M.M. (Ed.). (1995). Elasto-viscoplastic finite element model for prestressed concrete structures. Brazil: Editora da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Rabczuk, T., Akkermann, J., Eibl, J. (2005) A numerical model for reinforced concrete structures. In: International Journal of Solids and Structures 42, p 1327-1354

Roca, P.; Mari, A. R. (1993a) Numerical Treatment of Prestressing Tendons in the Nonlinear Analysis of Prestressed Concrete Structures. In: Computers & Structures Vol. 46. No. 5. pp. 905-916, 1993

Roca, P.; Mari, A. R. (1993b) Nonlinear Geometric and Material Analysis of Prestressed Concrete General Shell Structures. In: Computers & Structures Vol. 46. No. 5. pp. 917-929, 1993

Rots, J. G., Kusters, G.M.A, Blaauwendraad, J. The need for fracture mechanics options in finite element models for concrete structures. Proc., Int. Conf. On Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures. v.1, Part 1, 1984; p.19-32

Rüsch, H. Concreto armado e protendido – propriedades dos materiais e dimensionamento. Rio de Janeiro : Campus, 1981

Scanlon A., Murray D. W. (1982) Practical calculations of two-way slab deflections, Concr. Int. Mag. (1982) 43–50.

Silva, A. R. Análise numérica de elementos estruturais com interação parcial. Tese (Doutorado). Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto, 2010.

Silva, P. B. Análise Numérica Não Linear De Lajes De Concreto Com Fôrma De Aço Incorporada. 2018. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Ouro Preto, Minas Gerais

Tao X, Du G. Ultimate stress of unbonded tendons in partially prestressed concrete beams. PCI J 1985;30(6):72–91

Veríssimo, S.; César, L. Concreto protendido Fundamentos Básicos. 4ª Edição. Viçosa: Universidade Federal de Viçosa, 1997. 73 páginas.

Veríssimo, G. S., César JR., K. M. L. Concreto protendido. 5. ed. Viçosa: Universidade Federal de Viçosa, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas. Suporte bibliográfico para a disciplina de concreto protendido. 78 f. 1998.

Wu, X-H.; Otani, S.; Shiohara, H. Tendon Model for Nonlinear Analysis of Prestressed Concrete Structures. In: Journal of Structural Engineering, Vol. 127, No. 4, April, 2001.

Zhang Y. X., Bradford M. A. (2007) Nonlinear analysis of moderately thick reinforced concrete slabs at elevated temperatures using a rectangular layered plate element with Timoshenko beam functions. Engineering Structures 29 (2007) 2751–2761.

Zhang, N., Fu, C.C., Che, H. Experiment and numerical modeling of prestressed concrete curved slab with spatial unbonded tendons. In: Engineering Structures. March, 2011 Engineering Structures