



UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO – ESCOLA DE MINAS

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL



**ANÁLISE DE ESTRUTURAS DE CONCRETO  
ARMADO VIA MODELOS DE BIELAS E  
TIRANTES E TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO  
TOPOLÓGICA**

**Artur Hallack Ladeira**

Ouro Preto

2019

Universidade Federal de Ouro Preto – Escola de Minas

Departamento de Engenharia Civil

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

**ANÁLISE DE ESTRUTURAS DE CONCRETO  
ARMADO VIA MODELOS DE BIELAS E  
TIRANTES E TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO  
TOPOLÓGICA**

**Artur Hallack Ladeira**

Área de concentração: Estruturas e Construção

Linha de Pesquisa: Comportamento e Dimensionamento de Estruturas

Orientador: Prof. D.Sc. Amilton Rodrigues da Silva – UFOP

Ouro Preto

2019

**ARTUR HALLACK LADEIRA**

**ANÁLISE DE ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO  
VIA MODELOS DE BIELAS E TIRANTES E TÉCNICAS DE  
OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte integrante dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, área de concentração: Estruturas e Construção.

Orientador: Prof. D.Sc. Amilton Rodrigues da Silva – UFOP

Ouro Preto

2019

## SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

L154a Ladeira, Artur Hallack .  
Análise de estruturas de Concreto Armado via modelos de Bielas e Tirantes e técnicas de otimização topológica. [manuscrito] / Artur Hallack Ladeira. - 2019.  
100 f.: il.: color., gráf., tab..

Orientador: Prof. Dr. Amilton da Silva.  
Dissertação (Mestrado Acadêmico). Universidade Federal de Ouro Preto.  
Departamento de Engenharia Civil. Programa de Engenharia Civil.  
Área de Concentração: Estruturas e Construção.

1. Método (Bielas e Tirantes). 2. Método dos Elementos Finitos. 3. Método de Otimização Topológica (TOM). 4. Engenharia de estruturas - Concreto Armado. I. Ladeira, Artur Hallack . II. Silva, Amilton da. III. Universidade Federal de Ouro Preto. IV. Título.


CDU 624.01

Bibliotecário(a) Responsável: Maristela Sanches Lima Mesquita - CRB:1716


# ANÁLISE DE ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO VIA MODELOS DE BIELAS E TIRANTES E TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO TOPOLOGICA

AUTOR: ARTUR HALLACK LADEIRA

Esta dissertação foi apresentada em sessão pública e aprovada em 01 de novembro de 2019, pela Banca Examinadora composta pelos seguintes membros:

  
Prof. Amilton Rodrigues da Silva, D. Sc. – UFOP (Presidente)

  
Prof. Walliston dos Santos Fernandes, D. Sc. – UFOP

  
Prof. Igor José Mendes Lemes, D. Sc. – UFLA

## **Agradecimentos**

À Universidade Federal de Ouro Preto pela valiosa oportunidade de aprimorar meus conhecimentos.

Ao meu orientador, professor Amilton Rodrigues da Silva, pela excelência na orientação, disponibilidade e paciência em responder às mesmas perguntas inúmeras vezes.

Aos colegas de turma pelo companheirismo e amizade durante essa jornada.

Aos demais professores e funcionários do PROPEC.

À CAPES pelo suporte financeiro.

Aos meus pais, Roberto e Denise, os quais proporcionam um ambiente familiar sadio e harmonioso.

E a Deus, por me iluminar e dar forças nos momentos de incertezas.

*"... don't worry about a thing*

*'Cause every little thing*

*Gonna be alright..."*

*Bob Marley*

Resumo da dissertação apresentada ao PROPEC/UFOP como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil.

O Modelo de Bielas e Tirantes (MBT) pode ser uma excelente alternativa para o dimensionamento de elementos estruturais em concreto armado submetidos a estado plano de tensão e para regiões que apresentem descontinuidade de ordem geométrica ou estática. Nesse sentido, o modelo permite uma melhor representação do comportamento estrutural e mecanismos de resistência nas estruturas de concreto. Para tornar a concepção do modelo menos dependente da experiência do projetista, o presente trabalho tem como objetivo a aplicação do modelo de bielas e tirantes em elementos estruturais e seu dimensionamento considerando a não-linearidade dos materiais, aliando a técnica de otimização topológica ESO (*Evolutionary Structural Optimization*) ao Método dos Elementos Finitos. O critério de evolução do método de otimização topológica adotado considera a eliminação de elementos/armadura menos solicitados e ocorre em duas etapas. Em um primeiro momento essa remoção é feita em nível de tensão, considerando uma análise linear, a qual gera o MBT e a configuração inicial para disposição das armaduras. Em seguida, é feita uma análise não linear onde são excluídas as armaduras dos elementos com menores níveis de deformação, obtendo-se a configuração final e a consequente distribuição de armadura procurada. Nesse contexto, é possível obter soluções otimizadas de problemas complexos envolvendo o concreto estrutural. São apresentados exemplos de cada etapa deste trabalho para comprovação e validação das técnicas implementadas. Os MBT's obtidos apresentam boa concordância com os modelos normativos e com aqueles encontrados na literatura. Além disso, com a consideração da não linearidade dos materiais foi possível reduzir sobremaneira o consumo de aço em relação à análise linear.

**Palavras-chave:** Modelo de Bielas e Tirantes, Método dos Elementos Finitos, Otimização Topológica, Concreto Armado.



Abstract of dissertation presented to PROPEC/UFOP as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Civil Engineering.

The Strut-and-Tie Models (STM) can be an excellent alternative for the design of reinforced concrete structural elements submitted to plane stress state and for regions with geometric or static discontinuity. In this sense, the model allows a better representation of structural behavior and resistance mechanisms in concrete structures. In order to make the concept of the model less dependent on the experience of the designer, the present work aims the automatic generation of the strut-and-tie models in structural elements and its dimensioning considering the physical nonlinearity of the materials, combining the topological optimization technique ESO (Evolutionary Structural Optimization) to the Finite Element Method. The evolution criterion of the adopted topological optimization method considers the elimination of less requested elements and occurs in two stages. At first, this removal is made at a stress level, considering a linear analysis, which generates the STM and the initial configuration for steel bars arrangement. Then, a nonlinear analysis is performed where the reinforcement of the elements with the lowest deformation levels is excluded, obtaining the final configuration and the consequent reinforcement distribution sought. In this context, it is possible to obtain optimized solutions of complex problems involving structural concrete. Examples of each step of this work are presented to prove and validate the implemented techniques. The STM obtained show good agreement with the normative models and with those found in the literature. Moreover, by considering the nonlinearity of the materials it was possible to greatly reduce the steel consumption compared to the linear analysis.

**Keywords:** Strut-and-Tie Model, Finite Element Method, Topological Optimization, Reinforced Concrete

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 Modelo de bielas e tirantes de viga parede (Pantoja, 2012) .....	5
Figura 2.2 Analogia de Treliça.....	6
Figura 2.3 Divisão da estrutura em regiões B e D (Adaptado de Fu , 2001) .....	8
Figura 2.4 Regiões com descontinuidade estática (b) ,(d), (f) ou geométrica (a), (c), (e).....	9
Figura 2.5 Fluxograma do Modelo de bielas e tirantes .....	10
Figura 2.6 (a) Otimização Paramétrica de estrutura treliçada, (b) Otimização de Forma, (c) Otimização Topológica. (Bensøe e Sigmund, 2002).....	14
Figura 3.1 Modelos de bielas e tirantes (CEB-FIP, 2010) .....	17
Figura 3.2 Modelo de bielas e tirantes (a) viga parede, (b) apoio em dente, (c) nó de pórtico (Wight e Macgregor, 2012).....	17
Figura 3.3 Modelo de bielas e tirantes definido pelo Processo do Caminho de Cargas (Schafer e Schlaich,1991) .....	18
Figura 3.4 Modelo de bielas e tirantes obtido pelo padrão de fissuração (Schlaich, 1987).....	19
Figura 3.5 (a) Malha Elemento triangular de três nós (b) Graus de liberdade do elemento triangular .....	20
Figura 3.6 Definição das coordenadas naturais de triângulo (Bathe, 1982).....	22
Figura 3.7 Domínio paramétrico em coordenadas naturais (Fish e Belytschko, 2007).....	24
Figura 3.8 ESO: retirada de elemento da malha. (Simonetti, 2009). .....	28
Figura 3.9 Algoritmo ESO em nível de tensão. ....	30
Figura 3.10 Representação do tabuleiro de xadrez. (Sigmund e Perterson ,1998)..	32
Figura 3.11 Fluxograma do algoritmo ESO quando há elementos a serem removidos para uma dada taxa de rejeição.....	33
Figura 3.12 Fluxograma do algoritmo ESO quando não há elementos a serem removidos para uma dada taxa de rejeição.....	35

Figura 3.13 Representação da topologia final para diferentes malhas (a) 2700 elementos, (b) 4800 elementos, (c) 17200 elementos. (Bendsøe e Sigmund, 2004)	35
Figura 3.14 (a) Domínio inicial para estrutura de Michell (b) Solução analítica....	38
Figura 3.15 (a) Iteração 22, $RR=2,5\%$ , $VR=5,6\%$ (b) Iteração 69, $RR=4,75\%$ , $VR=18,6\%$ (c) Iteração 175, $RR=10,75\%$ , $VR=60,0\%$ (d) Modelo de bielas e tirantes .....	38
Figura 3.16 Consolo Curto (Liang <i>et al.</i> , 2000) .....	39
Figura 3.17 (a), (b), (c) Processo evolucionário (d) Modelo de bielas e tirantes (Liang <i>et al.</i> , 2000) .....	39
Figura 3.18 (a) Iteração 25, $RR = 11,0\%$ , $VR = 15,0\%$ (b) Iteração 31, $RR = 11,0\%$ , $VR = 35,0\%$ (c) Iteração 47, $RR= 16,0\%$ , $VR=55,0\%$ .....	40
Figura 3.19 Viga biapoiada submetida a ação de várias cargas. (Liang, 2007) .....	41
Figura 3.20 (a) Iteração 133, $RR=19\%$ , $VF=39\%$ (b) Iteração 121, $RR=6\%$ , $VF=39\%$ .....	41
Figura 3.21 Topologia ótima obtida via SESO (Simonetti, 2009) .....	42
Figura 3.22 (a) Domínio inicial (b) Topologia ótima via PBO (Liang <i>et al.</i> , 2002a) .....	42
Figura 3.23 (a) Iteração 192, $RR=19\%$ , $VF=35\%$ (b) Iteração 139, $RR=10\%$ , $VF=35\%$ (c) Projeto existente de uma ponte .....	43
Figura 3.24 Viga parede biapoiada com dois furos (Liang <i>et al.</i> 2000).....	44
Figura 3.25 (a) Iteração 47, $RR = 6,0\%$ , $VR = 18,0\%$ (b) Iteração 102, $RR = 13,0\%$ , $VR = 40,0\%$ (c) Iteração 184, $RR = 23,0\%$ , $VR = 58,0\%$ .....	44
Figura 3.26 (a) Topologia ótima via ESO (b) Topologia ótima via SESO (Simonetti, 2009).....	45
Figura 3.27 Topologias ótimas obtidas com $RR= 1\%$ , $ER=1\%$ , $VF=42\%$ , $VI=1,75\%$ , $it=1$ , $RR_c=2\%$ (a) $ER_c=1\%$ . (b) $ER_c=2\%$ .....	45
Figura 4.1 Curva tensão-deformação para o concreto comprimido (CEB/FIP, 2010). .....	47

Figura 4.2 Curva tensão-deformação para o concreto tracionado (CEB/FIP, 2010). .....	48
Figura 4.3 Área das barras de aço e largura de influência para duas camadas(Dias, 2016).....	52
Figura 4.4 Fluxograma ESO-RC .....	58
Figura 4.5 Viga biapoiada com abertura (Adaptado de Schlaich <i>et al.</i> , 1987) .....	59
Figura 4.6 Tensão principal máxima para análise linear .....	60
Figura 4.7 Tensão principal mínima para análise linear .....	60
Figura 4.8 (a) Topologia ótima obtida no presente trabalho (Iteração 155, $RR=10,0\%$ , $VR=51,3\%$ ) (b) Modelo de bielas e tirantes sugerido por Almeida <i>et al.</i> (2013a) (c) Distribuição de armadura proposta por Almeida <i>et al.</i> (2013a)....	61
Figura 4.9 Discretização da viga parede em elementos triangulares de concreto simples e armado .....	63
Figura 4.10 Curva carga-deslocamento da viga parede para configuração de aço da Figura 4.9.....	64
Figura 4.11 Tensões principais máximas no concreto da viga parede considerando análise não linear .....	64
Figura 4.12 Tensões principais mínimas no concreto da viga parede considerando análise não linear .....	65
Figura 4.13 Tensões nas armaduras horizontais para configuração de aço da Figura 4.9 .....	66
Figura 4.14 Tensões nas armaduras verticais para configuração de aço da Figura 4.9 .....	66
Figura 4.15 Distribuição das armaduras após a retirada de 66% da armadura inicial .....	67
Figura 4.16 Distribuição final das armaduras após retirada de 93,5% da armadura inicial .....	68

Figura 4.17 Curvas carga-deslocamento obtidas durante o processo de otimização da armadura .....	68
Figura 4.18 Discretização da viga parede em elementos triangulares de concreto simples e armado .....	69
Figura 4.19 Curva carga-deslocamento da viga parede para configuração de aço da Figura 4.18.....	70
Figura 4.20 Tensões nas armaduras horizontais para configuração de aço da Figura 4.18.....	70
Figura 4.21 Tensões nas armaduras verticais para configuração de aço da Figura 4.18.....	71
Figura 4.22 Domínio de projeto do pilar de ponte (Liang <i>et al.</i> , 2002b) .....	72
Figura 4.23 Modelo de bielas e tirantes obtido. Iteração 164, $RR=18\%$ , $VR=52\%$	72
Figura 4.24 (a) Máximas tensões principais no modelo de bielas e tirantes e definição das barras tracionadas (tirante T1) (b) Mínimas tensões principais no modelo de bielas e tirantes .....	73
Figura 4.25 Curva carga-deslocamento do pilar no ponto A .....	74
Figura 4.26 Tensões na armadura para $P=2750\text{kN}$ .....	74
Figura 4.27 Configuração inicial para o pilar de ponte e identificação do nó A.....	75
Figura 4.28 Configuração obtida após aplicação do algoritmo de otimização da armadura ESO-RC (a) 60% da armadura retirada (b) 87% da armadura retirada...	75
Figura 4.29 Configuração da armadura adotada para análise não linear.....	76
Figura 4.30 Curvas carga-deslocamento para diferentes níveis de retirada de armadura.....	76
Figura 4.31 Curva carga-deslocamento para configuração da armadura mostrada na Figura 4.29.....	77
Figura 4.32 Tensão principal mínima para análise não linear da configuração da Figura 4.29.....	77

Figura 4.33 (a) Tensão na armadura horizontal para análise não linear da configuração da Figura 4.29 (b) Tensão na armadura vertical para análise não linear da configuração da Figura 4.29 .....	78
Figura 4.34 Viga Contínua .....	79
Figura 4.35 Modelo de bielas e tirantes obtido via ESO.....	79
Figura 4.36 Máximas tensões principais no modelo de bielas e tirantes obtido e identificação dos tirantes T1 a T6 .....	79
Figura 4.37 Mínimas tensões principais no modelo de bielas e tirantes obtido.....	80
Figura 4.38 Distribuição inicial de armadura para viga contínua .....	81
Figura 4.39 Configuração obtida via ESORC após retirada de 69% da armadura .	81
Figura 4.40 Configuração da armadura adotada para análise não linear.....	82
Figura 4.41 Curva carga-deslocamento para configuração mostrada na Figura 4.40 .....	83
Figura 4.42 Tensão principal mínima para análise não linear da configuração da Figura 4.40.....	83
Figura 4.43 Tensão na armadura na direção x para análise não linear da configuração da Figura 4.40.....	84
Figura 4.44 Tensão na armadura na direção y para análise não linear da configuração da Figura 4.40.....	84
Figura 4.45 (a) Diagrama de esforço cortante (b) Diagrama de momento fletor ...	85

## LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 Dimensionamento da armadura dos tirantes (Almeida <i>et al.</i> , 2013a) ...	62
Tabela 4.2 Dimensionamento da armadura dos tirantes.....	73
Tabela 4.3 Dimensionamento da armadura dos tirantes.....	80
Tabela 4.4 Comparativo entre o dimensionamento via ESO-RC e via NBR 6118 (2014) .....	90

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>1</b>
1.1	Considerações Iniciais .....	1
1.2	Objetivos.....	2
1.3	Justificativa.....	2
1.4	Organização do Trabalho.....	3
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....</b>	<b>5</b>
2.1	Modelo de Bielas e Tirantes .....	5
2.2	Otimização Estrutural .....	10
<b>3</b>	<b>OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL EVOLUCIONÁRIA – ESO.....</b>	<b>16</b>
3.1	Introdução.....	16
3.2	Formulação do Elemento Triangular.....	20
3.3	Formulação do ESO .....	27
3.4	Critério de escoamento de von Mises.....	30
3.5	Problemas Numéricos na Otimização Topológica .....	31
3.5.1	Tabuleiro de Xadrez ( <i>Checkerboard</i> ).....	32
3.5.2	Dependência de Malha .....	35
3.5.3	Mínimos Locais .....	36
3.6	Exemplos Numéricos.....	37
3.6.1	Estrutura de Michell .....	37
3.6.2	Consolo Curto.....	39
3.6.3	Viga biapoiada com múltiplo carregamento.....	40
3.6.4	Estrutura de Ponte.....	42
3.6.5	Viga parede com furos.....	44



<b>4</b>	<b>DIMENSIONAMENTO ESTRUTURAL.....</b>	<b>46</b>
4.1	Introdução.....	46
4.2	Formulação do Elemento Triangular Não Linear.....	47
4.3	ESO-RC.....	54
4.4	Exemplos Numéricos.....	59
4.4.1	Viga parede biapoiada com uma abertura.....	59
4.4.2	Pilar de Ponte.....	71
4.4.3	Viga Contínua.....	78
<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>91</b>
5.1	Conclusões.....	91
5.2	Sugestões para trabalhos futuros.....	92
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>94</b>

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Considerações Iniciais

No campo da Engenharia de Estruturas, a procura por novas soluções construtivas capazes de conciliar economia, desempenho e segurança exige um maior conhecimento do comportamento mecânico dos sistemas estruturais.

Para o dimensionamento da maior parte dos elementos lineares de concreto armado, assume-se a Hipótese de Bernoulli-Euler ou de Timoshenko, de que seções planas permanecem planas após a flexão do elemento. Assim, é admitida uma distribuição linear de deformações ao longo da altura da seção transversal. Essa hipótese torna a análise mais simplificada e gera bons resultados em elementos com comprimento bem maior que a sua altura, justificando a análise unidimensional. No entanto, em alguns casos práticos uma análise bidimensional considerando estado plano de tensões ou deformações é mais adequada. Por exemplo, em vigas onde o cisalhamento é determinante no seu dimensionamento, em regiões ou elementos estruturais nos quais a Hipótese de Bernoulli não descreva apropriadamente o comportamento estrutural ou distribuição de tensões. Nessas regiões, denominadas na literatura de ‘Regiões D’ (Discontinuity), as tensões de cisalhamento são significativas e a distribuição de deformações é não linear. Como exemplo, citam-se elementos estruturais como vigas-parede, consolos, sapatas, nós de pórticos, blocos rígidos de fundação sobre estacas, furos em vigas e dentes Gerber.

Dessa maneira, para o entendimento dos mecanismos resistentes destas regiões especiais, pode-se recorrer a outras alternativas de dimensionamento, tais como o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Modelo das Bielas e Tirantes (MBT).

O modelo de bielas e tirantes é um método simples no qual uma estrutura treliçada é idealizada no interior da região D, de modo a representar o fluxo interno de tensões, permitindo uma análise mais simplificada do comportamento físico do elemento estrutural. No caso particular de estruturas de concreto armado, os elementos comprimidos dessa treliça idealizada são verificados quanto à compressão em estado duplo de tensões, sendo uma delas a tensão de resistência à tração do concreto. Nas regiões dos elementos tracionados são colocadas armaduras de aço em quantidade

suficiente para gerar uma força de tração igual ou superior àquela definida pelos esforços internos na treliça idealizada.

Entretanto, a não unicidade do modelo topológico, torna a concepção dependente da experiência e da sensibilidade estrutural do projetista. Sendo a armadura calculada e distribuída conforme o modelo topológico definido para o elemento estrutural de concreto armado, a correta definição desse não somente gera economia como também está relacionada à segurança. Diante disso, este estudo apresenta uma metodologia para geração automática do modelo de bielas e tirantes via otimização topológica, definindo a melhor configuração a ser adotada para a análise. Em uma segunda etapa, é feito o dimensionamento dos tirantes considerando material com comportamento não linear.

A dissertação a ser desenvolvida faz parte das seguintes linhas de pesquisa do PROPEC/Deciv/EM/UFOP, a saber: Comportamento e Dimensionamento de Estruturas.

## **1.2 Objetivos**

O presente trabalho tem como objetivo principal o estudo e investigação de técnicas para obtenção de modelos de bielas e tirantes aplicáveis a estruturas de concreto armado submetidas a estado plano de tensão via otimização topológica e o seu dimensionamento considerando material com comportamento não linear.

Para a realização do objetivo principal pode-se destacar os seguintes objetivos específicos: implementação de um elemento finito triangular de três nós para análise em estado plano de tensão; implementação de uma rotina de otimização topológica dentro de um Programa de Elementos Finitos; implementação de uma rotina para dimensionar e detalhar a armadura a partir do modelo topológico definido. Nas implementações será utilizado o programa de Elementos Finitos FEMOOP, *Finite Element Method Object Oriented Program*, (Guimarães, 1992), desenvolvido em linguagem C++ e estruturado de uma forma que novos elementos e algoritmos de análise sejam implementados sem a necessidade de conhecimento detalhado de sua estrutura, de acordo com os conceitos da programação orientada a objetos.

## **1.3 Justificativa**

O método das bielas e tirantes pode ser uma excelente alternativa para o projeto de estruturas de concreto armado em regiões com descontinuidade geométrica ou estática, substituindo procedimentos empíricos por uma metodologia racional de projeto. O

método consiste basicamente na análise de uma estrutura contínua através de uma treliça ideal definida a partir do fluxo de tensões de tração (os tirantes) e de compressão (as bielas), e a partir disso é realizado o dimensionamento estrutural. No entanto, a escolha do modelo topológico a partir dessa metodologia depende basicamente da experiência do projetista em compatibilizar a geometria dos fluxos internos de cargas e os pontos de apoios, o que não é uma tarefa trivial. Diante disso, torna-se relevante a investigação de técnicas de otimização para geração “automática” da topologia do modelo de bielas e tirantes, assegurando a simplificação do processo de concepção e permitindo melhor entendimento do comportamento estrutural de elementos especiais. Além disso, a consideração do comportamento não linear do material permite um melhor aproveitamento da armadura a ser empregada.

A escolha do elemento triangular de três nós para a análise numérica de estruturas em estado plano de tensões, deve-se ao fato de que esse elemento requer uma discretização do contínuo bastante detalhada permitindo assim definir as regiões de compressão e tração do modelo bielas e tirantes com mais refinamento. Uma vez que, em algumas etapas das análises a técnica de evolução utilizada no processo de otimização topológica ou de distribuição da armadura na estrutura plana de concreto consiste em eliminar o elemento ou a armadura do elemento da malha de elementos finitos, por isso a exigência de uma malha bem refinada, em consequência um elemento mais pobre em termos das funções de forma.

## **1.4 Organização do Trabalho**

Este trabalho se inicia com a descrição dos objetivos e dos aspectos que motivaram a pesquisa sobre o tema: análise e dimensionamento de elementos estruturais de concreto armado submetidos a estado plano de tensões através do Modelo de Bielas e Tirantes e de técnicas de otimização topológica.

No Capítulo 2 são apresentados conceitos, definições e trabalhos relevantes que envolvem o MBT e a Otimização Estrutural.

Já no Capítulo 3 é desenvolvida a formulação do elemento finito triangular de três nós utilizado para as simulações numéricas considerando material com comportamento elástico-linear. Paralelamente, é apresentado o algoritmo evolucionário ESO e sua formulação. Assim, é possível obter o MBT desejado. As rotinas implementadas são

verificadas e validadas por meio de exemplos numéricos cujos resultados são comparados com os obtidos na literatura.

O dimensionamento otimizado da armadura é feito no Capítulo 4. Inicialmente, é apresentada a formulação do elemento finito triangular de três nós não-linear físico e, em seguida, é descrito o algoritmo ESO-RC que elimina armadura nas direções  $x$  e  $y$ . Os resultados encontrados são comparados com respostas extraídas de trabalhos encontrados na literatura. Para uma das aplicações é feita também uma comparação com o dimensionamento segundo a NBR 6118 (2014).

No Capítulo 5 são apresentadas as considerações finais e conclusões acerca da pesquisa desenvolvida, além de possibilidades para pesquisas futuras. Por último, são apresentadas as referências bibliográficas citadas ao longo do texto.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Este capítulo apresenta uma breve revisão bibliográfica acerca do modelo de bielas e tirantes e da otimização estrutural, discutindo conceitos preliminares relacionados às suas aplicações no campo da engenharia de estruturas.

### 2.1 Modelo de Bielas e Tirantes

No MBT, as bielas e tirantes representam campos de tensões de compressão e de tração, respectivamente, que surgem em decorrência dos carregamentos aplicados e das condições de contorno a que o elemento estrutural de concreto armado está submetido. As interseções existentes entre as bielas, tirantes e/ou cargas atuantes (ações ou reações) são denominados nós. A Figura 2.1 apresenta o MBT para uma viga parede.

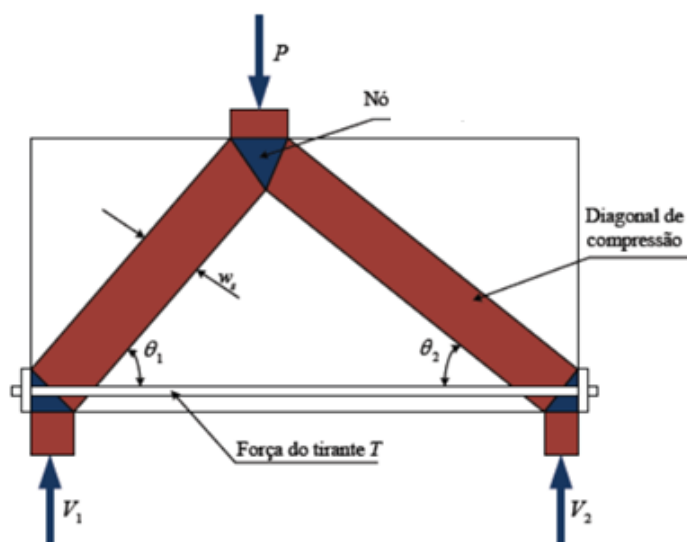


Figura 2.1 Modelo de bielas e tirantes de viga parede (Pantoja, 2012)

Os primeiros estudos envolvendo o método de bielas e tirantes (*Strut-and-Tie Models* - STM, do inglês) tiveram origem no início do século XX. Ritter e Morsch propuseram, a partir de resultados experimentais, a analogia do modelo de treliças para o dimensionamento a cisalhamento de vigas fletidas de concreto armado.

Segundo esse modelo, admite-se a substituição da viga original por uma treliça equivalente definida a partir da distribuição de tensões. As barras tracionadas representam campos de tensão de tração (tirantes), enquanto as barras comprimidas

representam campos de tensão de compressão (bielas). A Figura 2.2 apresenta a denominada “Analogia de Treliça”.

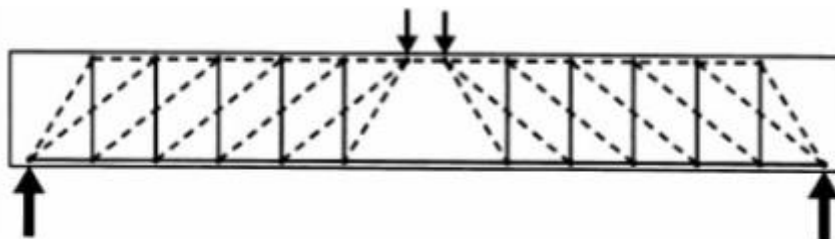


Figura 2.2 Analogia de Treliça

Pesquisas e estudos foram desenvolvidos no último século com o propósito de refinar e adequar a clássica analogia de treliça de Ritter e Morsch aos resultados experimentais. A aplicação desses conceitos a outros tipos de elementos estruturais representa, portanto, uma generalização da teoria, caracterizando o modelo de bielas e tirantes.

Em geral, essas publicações tratam sobre os princípios gerais de funcionamento e concepção dos modelos de bielas e tirantes, abordando temas como procedimentos para definição das regiões com e sem descontinuidade, geração dos modelos de treliças no interior do contínuo de concreto, cálculo dos esforços internos, diretrizes para verificação das tensões nas bielas e regiões nodais e cálculo e detalhamento da armadura necessária.

Entretanto, foi a partir dos estudos desenvolvidos por Schläich *et al.* (1987) que o tema ganhou forte impulso. Além das vigas inicialmente analisadas, esses pesquisadores estenderam a aplicação do modelo de bielas e tirantes a outros tipos de elementos estruturais, tais como vigas-parede, consolos curtos, sapatas, blocos de fundação, vigas com aberturas, entre outros.

Schäfer e Schläich (1991) propuseram ainda regras de caráter prático, principalmente em relação à determinação das resistências das bielas e regiões nodais, tornando possível a sistematização no dimensionamento de estruturas de concreto com descontinuidades estáticas e/ou geométricas.

Oliveira (1995) determinou os esforços internos nas bielas e tirantes de um modelo de treliça hiperestático. Para tanto, utilizou a técnica de Mínima Norma Euclidiana na análise de vigas esbeltas, vigas-parede, consolo e nó de pórtico e validou sua formulação com exemplos da literatura.

Souza (2004) estudou soluções alternativas de dimensionamento de vigas-parede e blocos de fundação, tais como o Método dos Elementos Finitos, o Método das Bielas e o Método Corda-Painel. O autor propôs, ainda, critérios de análise, dimensionamento e detalhamento de elementos especiais de concreto estrutural.

Santos (2006) realizou um estudo do modelo de bielas e tirantes em vigas de concreto armado cujos resultados das modelagens permitiram comparações com os resultados das verificações realizadas segundo os critérios da NBR 6118 (2003) e do MC CEB-FIP (1990), identificando também os aspectos de maior dificuldade na concepção de um modelo de bielas e tirantes.

Pesquisadores da Universidade de *Illinois* desenvolveram um programa computacional, baseando-se em resultados experimentais. O programa CAST (*Computer Aided Strut and Tie*), utiliza uma interface simples que possibilita a criação e a modificação gráfica de modelos de bielas e tirantes com grande agilidade. Além disso, a obtenção dos esforços no modelo e a verificação da capacidade resistente das bielas e dos nós é feita de maneira automática, conforme relatam Tjhin e Kuchma (2002). Além disso, o programa realiza análises lineares e não lineares de modelos de bielas e tirantes, seu dimensionamento e detalhamento.

Nepomuceno (2012) realizou uma análise de vigas-parede aplicando o modelo de bielas e tirantes na predição de carga última, comparando métodos analíticos e numéricos com o auxílio dos *softwares* CAST, para uma análise linear, e do *Micro-Truss Analyzer*, para uma análise não linear.

Pantoja (2012) analisou o desempenho do Modelo de Bielas e Tirantes via análise de confiabilidade. O método permite avaliar as incertezas inerentes ao carregamento atuante e as respectivas resistências do concreto e do aço da estrutura analisada. Os índices de confiabilidade são obtidos para mostrar a validade da formulação.

Simão (2014) realizou uma análise e dimensionamento de vigas de concreto armado com aberturas na alma utilizando o Modelo de Bielas e Tirantes submetidas a um carregamento distribuído ao longo do comprimento. Verificou-se que é possível realizar o dimensionamento das vigas com abertura sem que ocorra redução da capacidade de carga, e que a redução da rigidez pode ser controlada de modo a garantir um correto comportamento estrutural.

Santos e Vieira (2016) desenvolveram um *software* para o dimensionamento de consolos curtos de concreto armado, utilizando o MBT e baseado na NBR 9062 (2006).



Foi estudado um exemplo do livro do modelo de Bielas e Tirantes aplicados a estruturas de concreto armado (Silva e Giongo, 2000), e os resultados obtidos validam o funcionamento do *software*.

Conforme dito anteriormente, o MTB é aplicado em elementos que apresentam descontinuidades de ordem geométrica e/ou estática. Portanto, o primeiro passo para a concepção do modelo é dividir a estrutura em regiões B e D. Denominam-se “Regiões B” aquelas em que a Hipótese de Bernoulli-Euler é válida, ou seja, regiões em que se pode assumir que a distribuição de deformação ao longo da altura da seção transversal seja linear. Nesses casos, costuma-se desprezar as deformações causadas pelo esforço cortante e o dimensionamento é feito do modo convencional. Quando a hipótese anterior não é aplicável têm-se as “Regiões D”, cuja análise e dimensionamento são objetos de estudo do presente trabalho. A Figura 2.3 ilustra regiões desse tipo.

Com base no Princípio de *Saint Venant* é possível definir as “Regiões D” de uma estrutura. O Princípio de *Saint Venant* afirma que efeitos localizados causados por qualquer carga que age sobre um corpo serão dissipados ou atenuados em regiões suficientemente afastados do ponto de aplicação da carga. Como regra geral, que se aplica a muitos casos de carregamento e geometria, pode-se afirmar que essa distância é no mínimo igual à maior dimensão da seção transversal carregada.

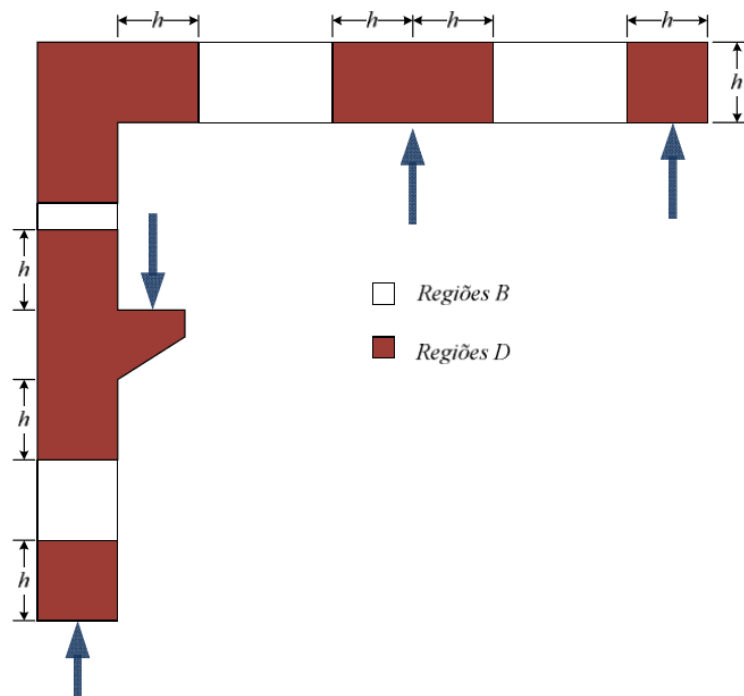


Figura 2.3 Divisão da estrutura em regiões B e D (Adaptado de Fu , 2001)

No caso de regiões com geometria irregular, a distribuição das deformações também é não-linear e, portanto, o Princípio de *Saint Venant* também se aplica. Desse modo, as discontinuidades podem ser de ordem estática, que ocorrem quando da aplicação de cargas concentradas e/ou reações de apoio, ou geométricas, como em aberturas em vigas, nós de pórtico e mudanças bruscas na geometria (Figura 2.4).

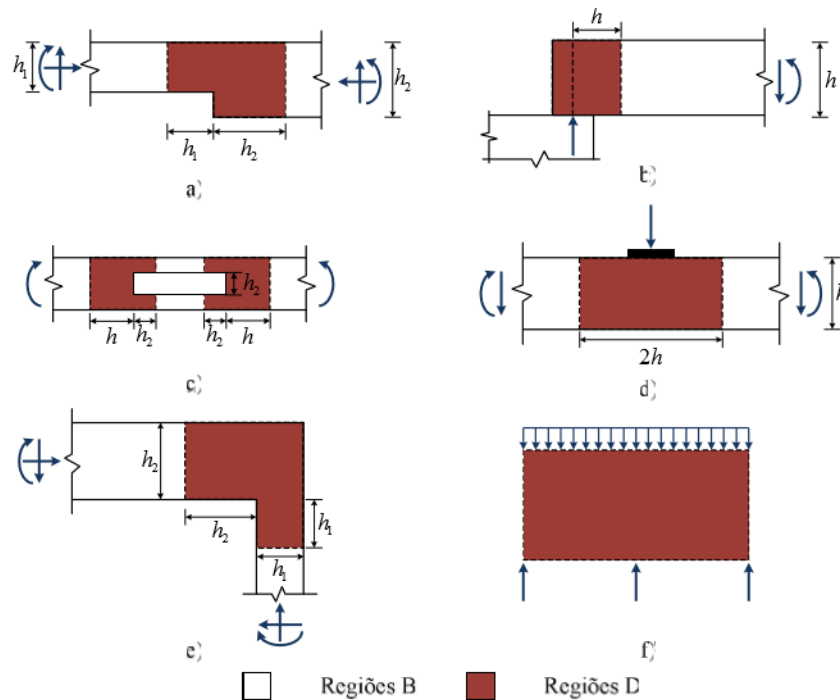


Figura 2.4 Regiões com descontinuidade estática (b), (d), (f) ou geométrica (a), (c), (e).

Após a identificação das zonas de descontinuidade de uma estrutura e conhecidos os esforços nos contornos das mesmas, pode-se recorrer a alternativas de dimensionamento apropriadas, como, por exemplo, o método das bielas e tirantes.

Em linhas gerais, um projeto envolvendo o MBT apresenta o roteiro descrito nos passos I a VI a seguir, e mostrado de forma esquemática pela Figura 2.5.

- I. Identificação das regiões com descontinuidade através do Princípio de *Saint Venant*;
- II. Cálculo dos esforços solicitantes no contorno da região D. Para tanto, forças distribuídas devem ser substituídas por cargas concentradas equivalentes;
- III. Concepção do modelo topológico da treliça no interior do contínuo de concreto. Os eixos das bielas e tirantes devem ser orientados para coincidirem aproximadamente com os eixos dos campos de tensões principais de compressão e tração, respectivamente;

- IV. Cálculos dos esforços nas barras da treliça;
- V. Verificação da resistência nas bielas e regiões nodais quanto ao esmagamento e cálculo da área de aço necessária para os tirantes. O detalhamento da armadura deve assegurar a adequada condição de ancoragem além de prever armadura de pele mínima para controle da fissuração;
- VI. Aperfeiçoamento do modelo, se necessário.

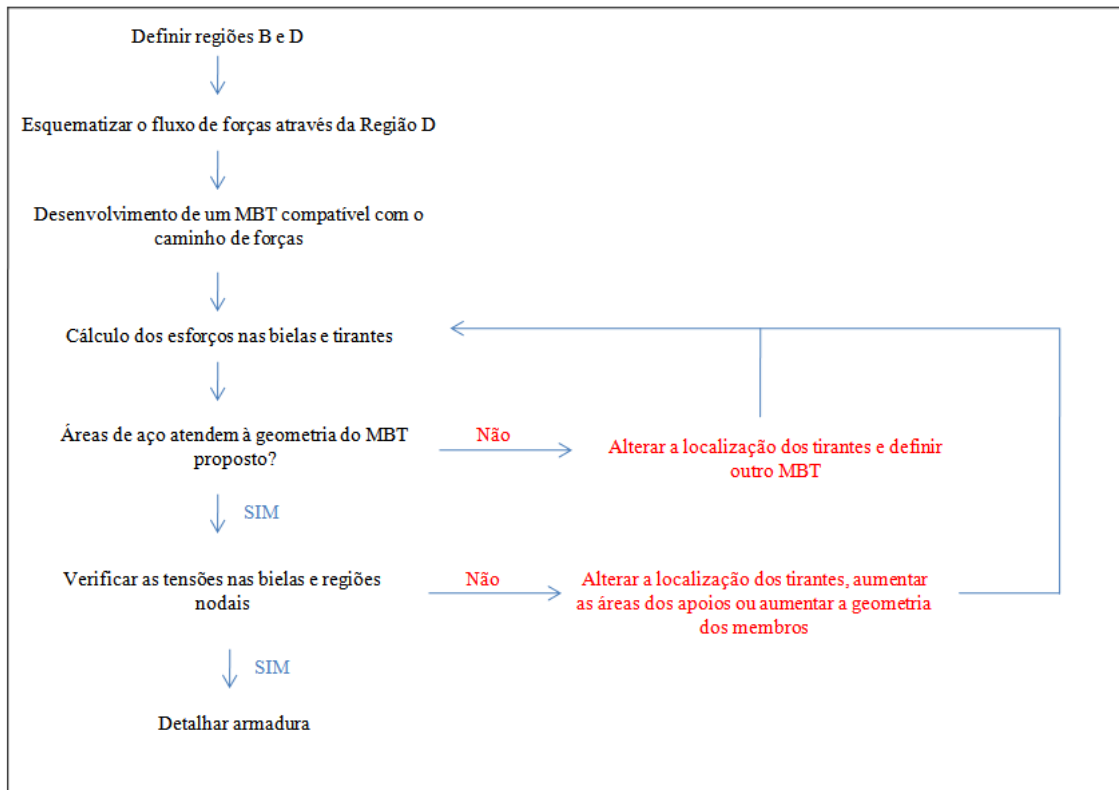


Figura 2.5 Fluxograma do Modelo de bielas e tirantes

## 2.2 Otimização Estrutural

Em um problema de otimização, deseja-se encontrar um conjunto de  $n$  variáveis de projeto, contido num vetor  $\mathbf{x}$ , que minimize (ou maximize) a função objetivo. Trata-se, portanto, de um problema de extremização (maximização ou minimização) que pode ser resolvido com o uso de teorias matemáticas. Além disso, existem critérios de projeto impostos pelas restrições que precisam ser atendidos. A região de projeto que reúne os pontos que obedecem às restrições do problema é denominada de região viável; sendo frequentemente classificada em regiões de igualdade e desigualdade.

No contexto de engenharia de estruturas, os problemas de otimização clássicos são: a minimização de volume, da energia de deformação, da flexibilidade, a maximização

da frequência natural crítica e a maximização da carga crítica de flambagem. No caso das restrições, as mais comuns são as equações de equilíbrio, os estados limites últimos e de serviço e os limites impostos diretamente às variáveis de projeto.

Os primeiros estudos envolvendo otimização estrutural tiveram início com o trabalho precursor de Maxwell (1870), visando aliar desempenho estrutural com o menor volume de material possível. Michell (1904) deu sequência ao trabalho de Maxwell, estudando estruturas treliçadas, submetidas a diferentes condições de carregamento buscando o menor peso de material, verificando as tensões nas barras para cada caso de carregamento.

A utilização do Método dos Elementos Finitos (MEF) permitiu o avanço nos estudos relacionados à otimização topológica (OT). Isso se deve ao fato que a alteração da topologia da estrutura (distribuição de material) pode implicar numa constante atualização da malha de elementos finitos à medida em que o domínio físico do problema é modificado.

Dentre as técnicas existentes para a OT, merece destaque o modelo desenvolvido por Bendsøe (1989) denominado SIMP (*Solid Isotropic and Material Penalization*). Considerando a necessidade de definição de regiões vazias ou não, representa-se o material sólido com uma densidade artificial  $\rho=1$  e o material vazio com  $\rho=0$ . Densidades artificiais intermediárias, isto é, para  $0 < \rho < 1$ , tornam-se desfavoráveis durante a otimização do problema, uma vez que conduzem a um aumento de volume de material associado a pequenos ganhos de rigidez e, portanto, não têm interesse prático. Dessa forma, técnicas que penalizem esses elementos devem ser usadas para evitar a ocorrência deste tipo de região no domínio analisado.

Alguns algoritmos de otimização topológica baseados em densidade de material possuem seus códigos disponíveis na literatura técnica ou na web. Vale citar os seguintes trabalhos: *99 line topology optimization code* (Sigmund, 2001) e *An 88 line topology optimization code* (Andressen *et al.*, 2010); ambos escritos na linguagem *MatLab*.

Pantoja (2012) apresentou uma metodologia que contempla aspectos de geração automática da topologia e avaliação da segurança via confiabilidade dos modelos de bielas e tirantes aplicados a estruturas planas de concreto armado. O algoritmo de otimização topológica SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*), que faz uso

de densidades artificiais, é utilizado como base para um encaminhamento de cargas ótimo e estaticamente admissível. Apresentou também a influência da presença de elementos indutores do tipo armaduras na definição da topologia e concluiu que a otimização topológica com processos de indução é uma alternativa viável.

Uma técnica de otimização de *layout* encontrada na literatura é o método proposto por Xie e Steven (1993), denominado Otimização Estrutural Evolucionária (*Evolutionary Structural Optimization* – ESO). A essência do método consiste na remoção gradual de regiões menos solicitadas, com base num critério de penalidade baseado em tensões equivalentes de von Mises. Isto é, elementos com tensões abaixo de um determinado limite são removidos da malha a cada iteração num processo denominado “*hard-kill*”. Dessa forma, é possível obter uma estrutura ótima para um dado volume remanescente.

Liang *et al.* (2000) utilizaram a técnica de otimização estrutural evolucionária para geração automática de modelos de bielas e tirantes em estruturas de concreto armado em estado plano de tensões. O método considerou a energia de deformação de elementos virtuais para realizar a remoção, que é monitorada por um índice de performance. Os elementos com menor contribuição para rigidez são sistematicamente removidos, estabelecendo uma configuração final do modelo de bielas e tirantes, com os mecanismos de transferência de cargas correspondentes. O trabalho apresenta aplicações em vigas-parede e consolo curto.

Uma variante do ESO é o AESO (*Additive Evolutionary Structural Optimization*) é apresentada por Querin *et al.* (2000) na qual elementos são inseridos nos domínios da estrutura utilizando uma técnica de otimização evolutiva semelhante ao ESO.

Simonetti (2009) propôs uma nova estratégia evolucionária chamada de SESO (*Smoothing Evolutionary Structural Optimization*), cuja idéia central baseia-se no fato de que se o elemento não for realmente necessário à estrutura, sua contribuição de rigidez diminui gradativamente, ou seja, sua retirada ocorre de forma suave; num processo batizado de “*soft-kill*”. Para gerar modelos de bielas e tirantes e validar sua formulação foram testados diversos exemplos numéricos como um pilar de ponte, viga de formato L e consolo curto.

Estudos pioneiros de Xie e Steven (1996) abordaram o problema da maximização das frequências naturais, e a partir dessa publicação outras análises considerando problemas dinâmicos ganharam impulso.

Lanes (2013) abordou o problema de OT implementando o algoritmo ESO na plataforma de programação disponível no *software* comercial *Abaqus*<sup>®</sup> para automatização na definição do modelo de bielas e tirantes. O autor investigou a obtenção de estruturas ótimas submetidas a ações estáticas e dinâmicas sob restrições de volume de material e outros exemplos considerando a não-linearidade geométrica sob restrições de outras variáveis de projeto. A metodologia desenvolvida mostrou-se simples e eficiente e os resultados obtidos ficaram próximos aos da literatura.

Guerra (2017) investigou métodos de dimensionamento para estruturas em concreto armado, com comportamento não linear do material. Para modelagem e análise dos elementos estruturais, utilizou o *software* comercial *Abaqus*<sup>®</sup>. Já para a concepção dos modelos de bielas e tirantes lançou mão do algoritmo de otimização topológica evolucionária implementado por Lanes (2013). Por fim, estabeleceu comparações entre os modelos de bielas e tirantes e quantidade de armaduras obtidos considerando-se uma análise linear e não-linear.

A otimização estrutural pode ser classificada conforme o tipo de variável de projeto. Os tipos frequentemente encontrados na literatura são: Otimização Paramétrica (*Size Optimization*), Otimização de Forma (*Shape Optimization*) e Otimização Topológica (*Topology Optimization*).

Na otimização paramétrica, variam-se apenas as dimensões (diâmetro, base, altura) da seção transversal dos elementos, com a forma e topologia fixas. Por exemplo, uma vez estabelecido que a seção seja retangular, esta geometria não se altera, apenas os valores da base e altura, segundo as funções de restrição. A Figura 2.6a ilustra esta abordagem.

Na otimização de forma, o contorno da estrutura é alterado a cada iteração durante o processo de otimização, mas a topologia permanece fixa, conforme pode ser observado na Figura 2.6b.

Por fim, a otimização topológica (OT), que otimiza a distribuição de material num domínio previamente definido (domínio estendido). Para estruturas discretas, isto representa, por exemplo, variar o número de barras, suas respectivas conectividades e

propriedades geométricas. Já em estruturas contínuas, são criados ‘buracos’ na estrutura, ver Figura 2.6c.

No presente estudo, ênfase maior será dada à otimização de topologia, em especial à técnica ESO (*Evolutionary Structural Optimization*).

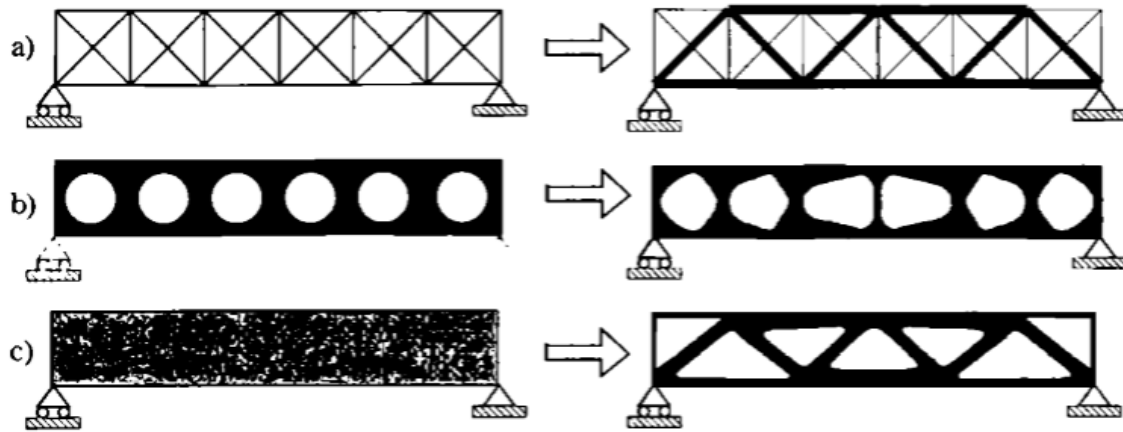


Figura 2.6 (a) Otimização Paramétrica de estrutura treliçada, (b) Otimização de Forma, (c) Otimização Topológica. (Bensøe e Sigmund, 2002).

Entretanto, seja qual for o tipo de otimização (paramétrica, de forma ou topológica), existem diferentes métodos para atacar um problema de otimização estrutural, classificados em dois grandes grupos: determinísticos e heurísticos (Querin, 1997). Nos métodos clássicos, também chamados de métodos determinísticos, a função objetivo e as restrições são dadas como funções matemáticas e relações funcionais. É necessário também que a função objetivo seja contínua e diferenciável em relação às variáveis de projeto. Nestes métodos são empregados teoremas que lhes garantem a convergência para uma solução ótima, mas que não necessariamente é a solução ótima global. Em geral, a solução encontrada é extremamente dependente do ponto de partida fornecido, podendo convergir para um ótimo local, e por isso não possuem bom desempenho em otimizar funções multimodais, isto é, funções que possuem vários ótimos locais. Como exemplo, pode-se citar a programação linear e a programação não-linear.

Já os métodos heurísticos de otimização estão baseados em regras e simplificações que permitem a busca de soluções em conjuntos não convexos, com funções objetivo também não convexas e não diferenciáveis. Além disso, trabalham adequadamente com variáveis lógicas, contínuas e discretas. Por outro lado, conforme afirmou Querin

(1997), não garantem a condução da solução ótima final, uma vez que não há prova de convergência. Como decorrência, podem levar à descoberta de soluções não convencionais que não poderiam ser vislumbradas por serem contra intuitivas. Para utilização desta abordagem em problemas de otimização com restrições, é comum empregar um método de penalização no qual um indivíduo é removido da população quando violar as restrições ou quando não for possível avaliar seu desempenho. Outra forma de solução que contempla essa abordagem são as técnicas que imitam, de forma simplificada, fenômenos ou processos encontrados na natureza como é o caso dos Algoritmos Genéticos: trata-se de um algoritmo baseado no processo de seleção natural proposto por Darwin. Toma-se inicialmente uma população viável de soluções para o problema. Tal população se reproduz e sofre mutações, descartando-se as soluções (indivíduos) que menos se ajustam ao propósito do problema. Assim, a cada geração um novo conjunto de possíveis soluções é criado até alcançar a solução ótima, de maneira semelhante à evolução natural.

Dessa forma, a otimização estrutural baseia-se nos mais diversos métodos e critérios, considerando leis matemáticas e mecânicas, atuando como uma ferramenta poderosa durante a fase de concepção e projeto de estruturas.



### 3 OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL EVOLUCIONÁRIA – ESO

Este capítulo apresenta o algoritmo de otimização topológica ESO implementado neste trabalho, considerando material com comportamento linear-elástico.

#### 3.1 Introdução

A concepção do modelo de bielas e tirantes a ser adotado é comumente vista como uma espécie de lançamento estrutural. É função da geometria do elemento, das forças atuantes no seu contorno e do fluxo de tensões no seu interior.

Como não há uma sistematização da metodologia, o que se observa na prática é a adoção de regras simplificadas de dimensionamento desses tipos de elementos estruturais. Entretanto, de um modo geral, segundo Silva e Giongo (2000), na definição da topologia do modelo devem ser observados os seguintes aspectos: tipos de seções atuantes, ângulo entre bielas e tirantes, área de aplicação das ações e reações, número de camadas da armadura.

Schläich *et al.* (1987) sugeriram uma modelagem feita considerando a geometria do modelo por meio das tensões elásticas e dimensionando a mesma pelo teorema do limite inferior da plasticidade, ou seja, considerando o campo de tensões/esforços na estrutura como estaticamente admissível: em qualquer ponto do corpo a distribuição de esforços na estrutura deve satisfazer às condições de equilíbrio e de contorno, bem como atender ao critério de escoamento.

A seguir são apresentadas, de maneira resumida, algumas alternativas encontradas na literatura para escolha do modelo de bielas e tirantes.

- Modelos normativos

Existem modelos padronizados para elementos estruturais do tipo consolos curtos, blocos sobre estacas, sapatas, nós de pórtico, vigas parede, entre outros. Se por um lado os modelos padronizados possibilitam o dimensionamento de elementos especiais de forma segura, por outro têm o inconveniente de serem limitados a certos parâmetros geométricos e de carregamento. As Figuras 3.1 e 3.2 trazem alguns exemplos.

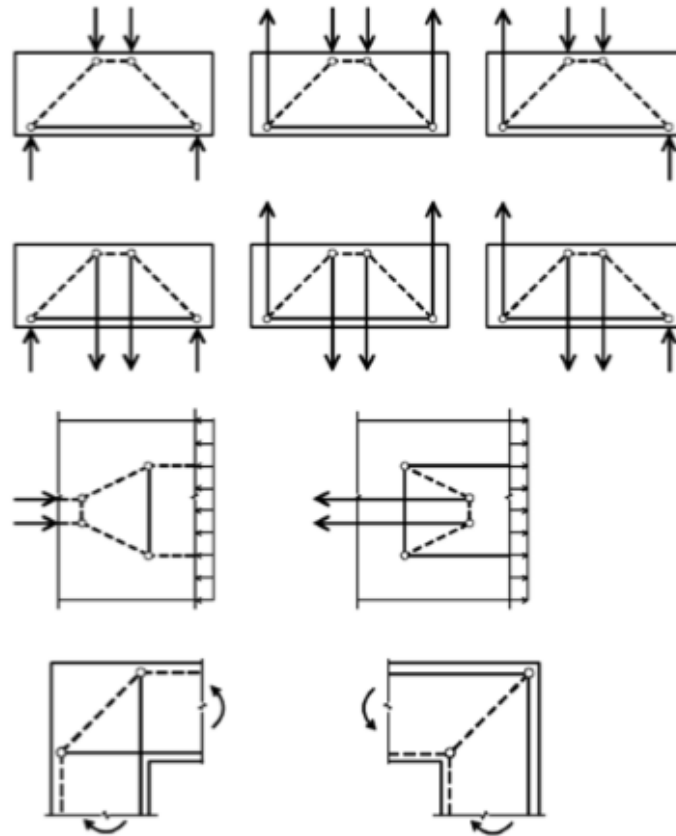


Figura 3.1 Modelos de bielas e tirantes (CEB-FIP, 2010)

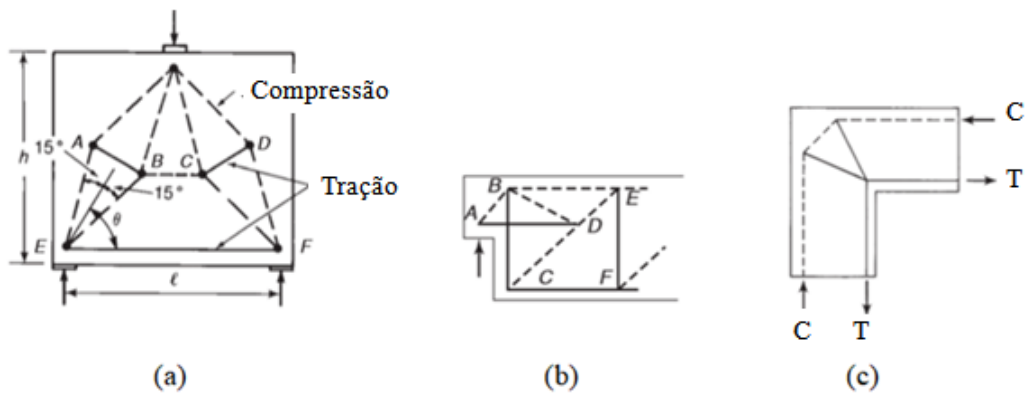


Figura 3.2 Modelo de bielas e tirantes (a) viga parede, (b) apoio em dente, (c) nó de pórtico (Wight e Macgregor, 2012)

- Processo do Caminho de Cargas (*'Load Path Approach'*)

Neste método, deve-se assegurar inicialmente o equilíbrio externo da Região D, considerando o carregamento atuante e as restrições de apoio existentes. O caminho de cargas no interior da estrutura ocorre via campos de tensão de tração e compressão,

sendo que duas ações opostas devem ser interligadas por caminhos mais curtos possíveis, conforme pode ser visto na Figura 3.3.

Se houver carregamentos distribuídos, estes devem ser substituídos por cargas concentradas equivalentes, de modo que as forças de um lado da estrutura, após percorrerem um determinado caminho de carga, encontrem do outro lado as ações que as equilibram.

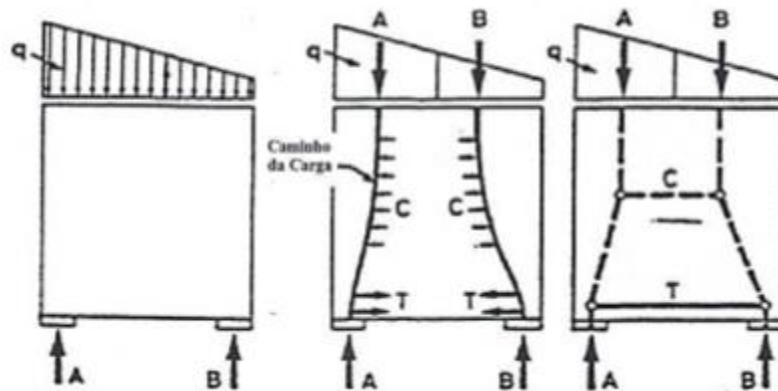


Figura 3.3 Modelo de bielas e tirantes definido pelo Processo do Caminho de Cargas (Schäfer e Schläich,1991)

Os caminhos de carga entre forças atuantes e reações formam o modelo de bielas e tirantes. Se necessário, devem ser acrescentadas outras barras para equilíbrio dos nós.

- Análise Linear Elástica

Geralmente, a distribuição das tensões elásticas no interior da estrutura de concreto é tomada como uma referência inicial para determinação da posição das bielas e tirantes. Nesse caso, com o auxílio de um programa de elementos finitos, a direção das bielas pode ser definida a partir da direção média das tensões principais de compressão, ao passo que os tirantes ficam determinados pela direção das tensões principais de tração.

Uma vez calculados os esforços nas barras da treliça idealizada, deve-se verificar a resistência das bielas e regiões nodais e dimensionar a armadura dos tirantes.

- Análise Não-Linear

A partir de análises experimentais, modelos podem ser concebidos observando-se o padrão de fissuração do elemento. Uma vez que, a direção das fissuras se apresenta perpendicular ao fluxo de tensões de tração e paralela ao fluxo de tensões de

compressão, haveria a possibilidade de traçar as trajetórias das bielas e tirantes. A Figura 3.4 ilustra o procedimento para o caso de uma viga parede com carga concentrada.

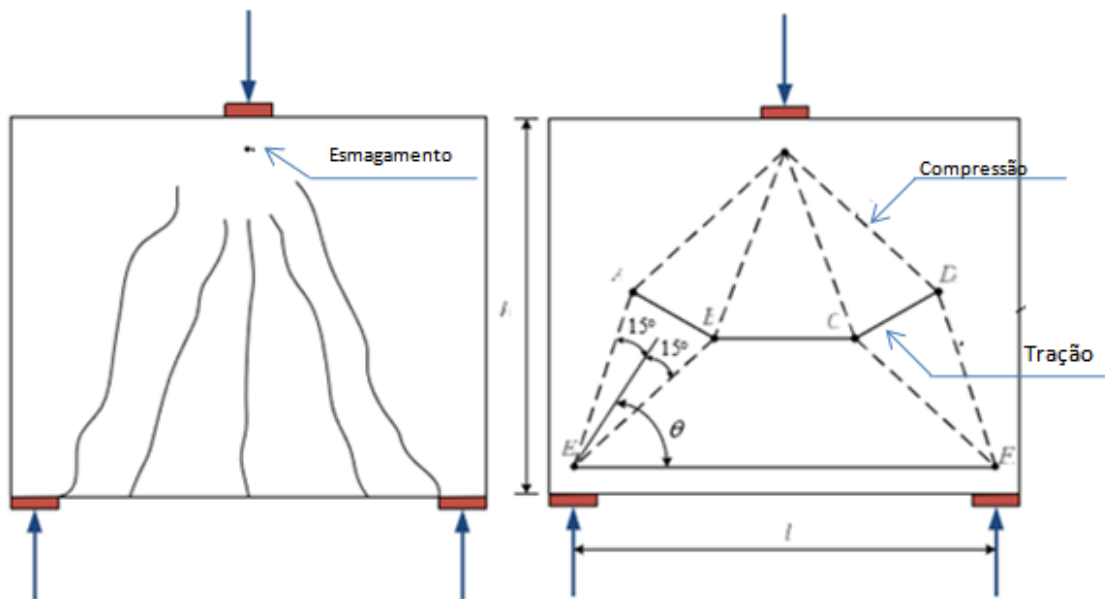


Figura 3.4 Modelo de bielas e tirantes obtido pelo padrão de fissuração (Schläich *et al.*, 1987)

- Processos de Otimização

Um dos maiores problemas enfrentados na aplicação do MBT está na falta de uma metodologia sistemática e coerente. Isso explica o emprego de soluções práticas simplificadas geralmente conservadoras mas que em algumas situações podendo ser até inseguras. Diante deste cenário, a geração automática de modelos de bielas e tirantes tem o intuito de tornar a escolha do modelo menos dependente da experiência do projetista, auxiliando-o no dimensionamento seguro de elementos especiais.

Otimização topológica pode ser entendida como um método computacional capaz de lançar estruturas através da distribuição ótima de material em uma determinada região do espaço. Para isso é utilizada uma combinação do Método dos Elementos Finitos, um modelo para o comportamento do material e métodos de otimização. Assim, uma região do espaço é discretizada em elementos finitos de modo que se possa analisar seu comportamento e, então, é distribuído material de forma racionalizada através de algoritmos de otimização (Pantoja, 2012).

No presente trabalho será empregada a técnica de otimização topológica no sentido de automatizar o processo de definição do MBT em estruturas submetidas a estado plano de tensão. Portanto, para alcançar esse objetivo, a primeira etapa consiste na implementação de um elemento finito bidimensional, cuja formulação é apresentada no item a seguir.

### 3.2 Formulação do Elemento Triangular

O elemento finito implementado neste trabalho é o elemento bidimensional triangular de três nós e dois graus de liberdade por nó, conhecido como CST (*Constant Strain Triangle*), utilizado na simulação numérica por meio do Método dos Elementos Finitos de estruturas sob estado plano de tensões. Seus graus de liberdade são dados pelos deslocamentos de translações nas direções dos eixos  $x$  e  $y$  que formam o plano do elemento triangular, como mostrado na Figura 3.5.

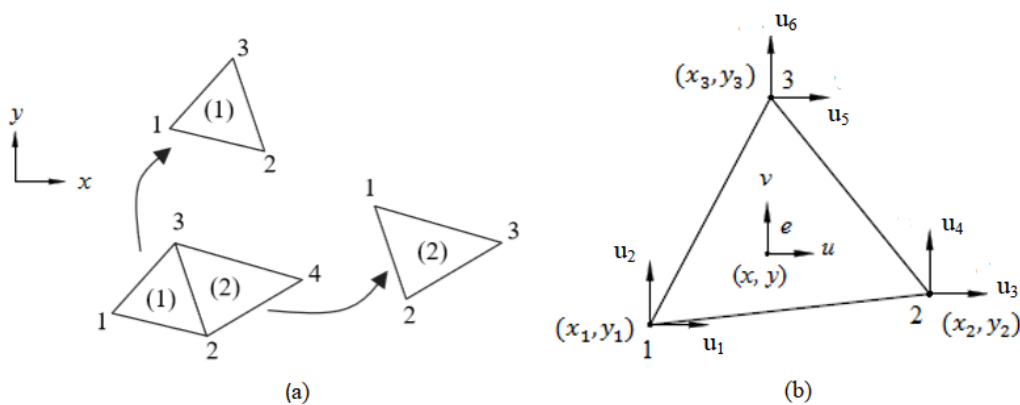


Figura 3.5 (a) Malha Elemento triangular de três nós (b) Graus de liberdade do elemento triangular

O domínio do elemento triangular implementado é representado por um determinado volume de área triangular e espessura constante ao longo dessa área. O elemento triangular bidimensional representa o plano médio desse domínio no qual as aproximações para um problema em estado plano de tensões desprezam as tensões que surgem no plano do elemento e um ponto nesse plano pode apenas deslocar mantendo-se no plano. Dessa forma as equações dos deslocamentos para o elemento são dadas por:  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$ .

A partir do tensor de deformação-deslocamento de Green-Lagrange e considerando pequenas mudanças de configurações, obtêm-se as equações das deformações dadas pelas Equações 3.1 a 3.3.

$$\varepsilon_x = u_{,x} \quad (3.1)$$

$$\varepsilon_y = v_{,y} \quad (3.2)$$

$$\gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} \quad (3.3)$$

Considerando material homogêneo, isotrópico e linear, chega-se à relação tensão deformação dada pela Equação 3.4 a seguir, onde  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal do material e  $\nu$  o seu coeficiente de Poisson.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

Aplicando um campo de deformação virtual compatível ao elemento triangular deformável tem-se, pelo princípio dos trabalhos virtuais,

$$\delta W_{\text{int}} = \iiint_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV \quad (3.5)$$

onde,  $\delta$  é o operador variacional,  $\sigma_{ij}$  é o estado tensional real em um ponto qualquer no elemento, e  $\delta \varepsilon_{ij}$  é o estado de deformação virtual em um ponto qualquer no elemento, ou seja, a deformação obtida devido ao campo de deslocamento virtual aplicado ao elemento. Aplicando o operador variacional nas Equações 3.1 a 3.3 das deformações chega-se às equações a seguir.

$$\delta \varepsilon_x = \delta u_{,x} \quad (3.6)$$

$$\delta \varepsilon_y = \delta v_{,y} \quad (3.7)$$

$$\delta \gamma_{xy} = \delta u_{,y} + \delta v_{,x} \quad (3.8)$$

Substituindo as Equações 3.6 a 3.8 na expressão do princípio do trabalho virtual e desprezando as tensões tangenciais e normais ao plano de normal na direção  $z$ , chega-se

à equação a seguir para o trabalho virtual interno. Nessa equação  $t$  é a espessura do elemento triangular.

$$\delta W_{\text{int}} = t \iint_A [\delta u_{,x} \sigma_x + \delta v_{,y} \sigma_y + (\delta u_{,y} + \delta v_{,x}) \tau_{xy}] dA \quad (3.9)$$

Na aproximação por elementos finitos, baseado em deslocamentos, as equações dos deslocamentos são aproximadas por funções de forma associadas aos deslocamentos nodais ( $\mathbf{q}$ ). Para as funções de interpolação nos elementos triangulares é usual adotar as chamadas coordenadas naturais. Para descrevê-las, considere-se a Figura 3.6a, na qual está representado um triângulo de área  $A$ .

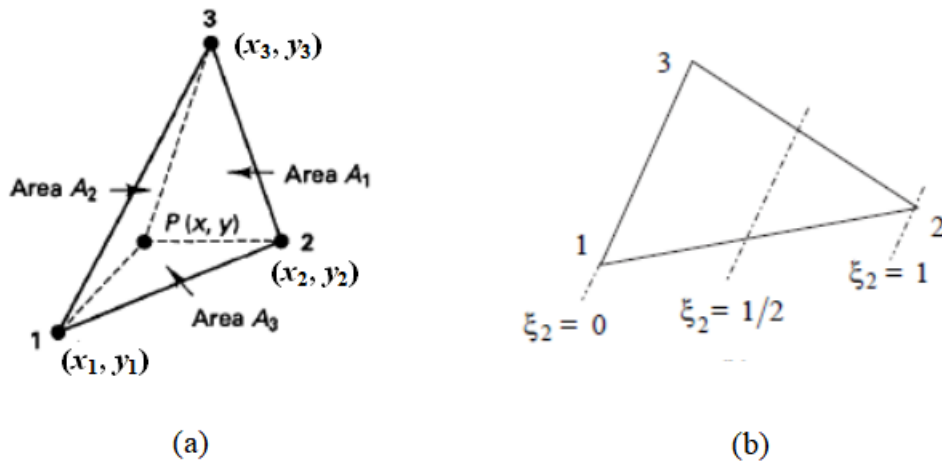


Figura 3.6 Definição das coordenadas naturais de triângulo (Bathe, 1982).

Considere-se um ponto  $P$  de coordenadas  $(x, y)$  interno ao triângulo, sendo  $A_1, A_2, A_3$  as áreas dos triângulos  $P_{23}, P_{31}$  e  $P_{12}$ , respectivamente. Adotando as relações entre cada uma dessas áreas e a área total do triângulo chega-se às seguintes equações:

$$\xi_1 = \frac{A_1}{A} \quad (3.10a)$$

$$\xi_2 = \frac{A_2}{A} \quad (3.10b)$$

$$\xi_3 = \frac{A_3}{A} \quad (3.10c)$$

Pode ser facilmente depreendido da Figura 3.6a que quando o ponto  $P$  se move para um dos nós, a correspondente coordenada natural assume o valor unitário e as demais se anulam. O ponto  $P$  fica definido por  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ , que são as coordenadas naturais do triângulo. Como  $A_1 + A_2 + A_3 = A$  e sendo  $x_1, x_2, x_3$  e  $y_1, y_2, y_3$  as coordenadas dos vértices do triângulo, podem ser estabelecidas o conjunto de Equações 3.11. Desta forma, cada ponto do triângulo corresponde a um e apenas um conjunto  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ .

$$x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 \quad (3.11a)$$

$$y = \xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 + \xi_3 y_3 \quad (3.11b)$$

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1 \quad (3.11c)$$

Para um ponto  $P$  de coordenada  $(x,y)$  qualquer no interior do triângulo determina-se as áreas dos três triângulos mostrados na Figura 3.6 pelas Equações 3.12 a 3.14. Já a área  $A$  do elemento triangular pode ser calculada pela Equação 3.15.

$$A_1 = \frac{1}{2}[(x_3 - x_2)(y - y_2) - (y_3 - y_2)(x - x_2)] \quad (3.12)$$

$$A_2 = \frac{1}{2}[(x - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y - y_1)] \quad (3.13)$$

$$A_3 = \frac{1}{2}[(x_2 - x_1)(y - y_1) - (y_2 - y_1)(x - x_1)] \quad (3.14)$$

$$A = \frac{1}{2}[(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)] \quad (3.15)$$

Para que as áreas  $A_1, A_2, A_3$  e  $A$  da forma que foram definidas nas Equações 3.12 a 3.15 sejam positivas, os nós 1, 2 e 3 do triângulo da Figura 3.6a deve ser definidos de tal forma que o sentido de percurso do nó 1 ao 3 seja sempre anti-horário. Considerando  $\xi_1 = \xi$ ,  $\xi_2 = \eta$ , as equações das coordenadas paramétricas em função de  $x$  e  $y$  são dadas pelas equações a seguir.

$$\xi = \frac{(y_2 - y_3)}{2A} x + \frac{(x_3 - x_2)}{2A} y + \frac{(y_3 - y_2)x_2 - (x_3 - x_2)y_2}{2A} \quad (3.16)$$

$$\eta = \frac{(y_3 - y_1)}{2A} x + \frac{(x_1 - x_3)}{2A} y + \frac{(x_3 - x_1)y_1 - (y_3 - y_1)x_1}{2A} \quad (3.17)$$

O conjunto de Equações 3.11 pode ser visto como um mapa entre o domínio paramétrico e o domínio cartesiano. A Figura 3.7 representa esse mapeamento do elemento triangular da Figura 3.6a no espaço paramétrico  $\xi_1, \xi_2$ . Nesse espaço,



considera-se  $\xi_1 = \xi$  e  $\xi_2 = \eta$  e, portanto, a partir da Equação 3.11c,  $\xi_3 = 1 - \xi - \eta$ . Dessa forma, para elementos triangulares de três nós as funções de forma em coordenadas naturais ficam:

$$N_1 = \xi_1 = \xi \quad (3.18a)$$

$$N_2 = \xi_2 = \eta \quad (3.18b)$$

$$N_3 = \xi_3 = 1 - \xi - \eta \quad (3.18c)$$

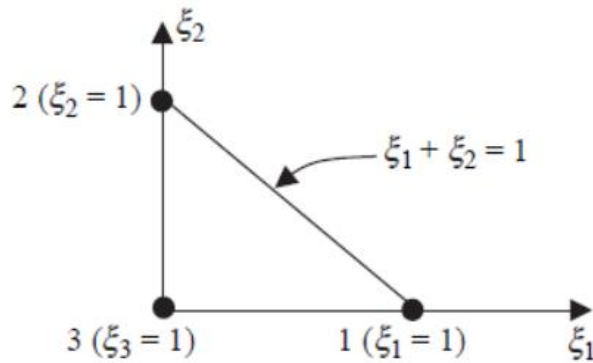


Figura 3.7 Domínio paramétrico em coordenadas naturais (Fish e Belytschko, 2007)

Definindo o vetor dos deslocamentos nodais por  $\mathbf{q} = \{u_1 \ u_2 \ u_3 \ v_1 \ v_2 \ v_3\}^T$  e representando as funções de interpolação dadas pelo conjunto de Equações 3.19 pelo vetor coluna  $\Phi^T = \{N_1 \ N_2 \ N_3\}$  definem-se as equações aproximadas dos deslocamentos associadas aos deslocamentos nodais  $\mathbf{q}$ .

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi^T & \mathbf{O}^T \\ \mathbf{O}^T & \Phi^T \end{bmatrix} \mathbf{q} \quad (3.19)$$

Na Equação 3.19,  $\mathbf{O}$  é um vetor coluna nulo com três termos. Sendo os deslocamentos  $u$  e  $v$  funções dos deslocamentos nodais, os seus variacionais podem ser escritos a partir da seguinte expressão:  $\delta a = \delta \mathbf{q}^T \left( \frac{\partial a}{\partial \mathbf{q}} \right)$ , sendo  $\mathbf{q}$  o vetor dos deslocamentos nodais,  $\partial$  o operador diferencial e  $a$  substituído por  $u$  e  $v$ . Substituindo esses variacionais na Equação 3.9 chega-se ao trabalho virtual de um elemento triangular dado pela equação a seguir.

$$\delta W_{\text{int}} = \delta \mathbf{q}^T t \iint_A \left[ \frac{\partial u_{,x}}{\partial \mathbf{q}} \sigma_x + \frac{\partial v_{,y}}{\partial \mathbf{q}} \sigma_y + \left( \frac{\partial u_{,y}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial v_{,x}}{\partial \mathbf{q}} \right) \tau_{xy} \right] dA \quad (3.20)$$

O trabalho virtual externo é dado por  $\delta W_{\text{ext}} = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{f}_{\text{ext}}$ , sendo  $\mathbf{f}_{\text{ext}}$  o vetor de forças externas no elemento, dado pelas forças externas aplicadas diretamente na direção dos graus de liberdade do elemento, e as forças nodais equivalentes obtidas a partir do carregamento externo atuando no contorno do elemento. Da condição  $\delta W_{\text{ext}} = \delta W_{\text{int}}$  tem-se:

$$\delta \mathbf{q}^T t \iint_A \left[ \frac{\partial u_{,x}}{\partial \mathbf{q}} \sigma_x + \frac{\partial v_{,y}}{\partial \mathbf{q}} \sigma_y + \left( \frac{\partial u_{,y}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial v_{,x}}{\partial \mathbf{q}} \right) \tau_{xy} \right] dA = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{f}_{\text{ext}} \quad (3.21)$$

Sabendo que a expressão acima deve ser válida para qualquer campo de deslocamento virtual compatível ( $\delta \mathbf{q}$ ), tem-se:  $\mathbf{f}_{\text{int}} - \mathbf{f}_{\text{ext}} = \mathbf{0}$ , onde  $\mathbf{f}_{\text{int}}$  é o vetor de forças internas dado pela expressão:

$$\mathbf{f}_{\text{int}} = t \iint_A \left[ \frac{\partial u_{,x}}{\partial \mathbf{q}} \sigma_x + \frac{\partial v_{,y}}{\partial \mathbf{q}} \sigma_y + \left( \frac{\partial u_{,y}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial v_{,x}}{\partial \mathbf{q}} \right) \tau_{xy} \right] dA \quad (3.22)$$

O vetor de forças internas para o elemento triangular da Equação 3.22 pode ser reescrito na forma apresentada pela equação a seguir.

$$\mathbf{f}_{\text{int}} = t \iint_A \begin{bmatrix} \sigma_x \Phi_{,x} + \tau_{xy} \Phi_{,y} \\ \sigma_y \Phi_{,y} + \tau_{xy} \Phi_{,x} \end{bmatrix} dA \quad (3.23)$$

Utilizando o método de Newton-Rapshon na solução do problema  $\mathbf{f}_{\text{int}} - \mathbf{f}_{\text{ext}} = \mathbf{0}$  é necessária a determinação da derivada dessa expressão em relação aos deslocamentos nodais, obtendo assim a matriz de rigidez tangente. Sendo  $\mathbf{f}_{\text{ext}}$  constante em relação aos deslocamentos nodais, a matriz de rigidez tangente é dada por:

$$\mathbf{K} = \frac{\partial \mathbf{f}_{int}}{\partial \mathbf{q}} = t \iint_A \begin{bmatrix} \Phi_{,x} \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \Phi_{,y} \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi_{,y} \left( \frac{\partial \sigma_y}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \Phi_{,x} \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \end{bmatrix} dA \quad (3.24)$$

Na Equação 3.24, a derivada da tensão normal na direção  $x$  em relação aos deslocamentos nodais é dada por:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_x} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_y} \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial \mathbf{q}} \quad (3.25)$$

Da Equação 3.4 tem-se  $\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y)$ , logo as derivadas em relação às deformações  $\varepsilon_x$  e  $\varepsilon_y$  são dadas por  $\frac{E}{1-\nu^2}$  e  $\sigma_x = \frac{E\nu}{1-\nu^2}$ , respectivamente. As derivadas das deformações lineares em relação aos deslocamentos nodais são dadas pelas expressões a seguir.

$$\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial u_{,x}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \Phi_{,x} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial v_{,y}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \Phi_{,y} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Substituindo as Equações 3.26 e 3.27 na derivada dos deslocamentos nodais (Equação 3.25), tem-se:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial \mathbf{q}} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} \Phi_{,x} \\ \nu\Phi_{,y} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

De forma análoga à descrita para tensão normal na direção  $x$ , pode-se chegar às Equações 3.29 e 3.30 para as derivadas em relação aos deslocamentos nodais das outras tensões atuantes no elemento.

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial \mathbf{q}} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} \nu\Phi_{,x} \\ \Phi_{,y} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} \Phi_{,y} \\ \Phi_{,x} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

A seguir são determinadas as derivadas das funções de forma em relação aos eixos  $x$  e  $y$ .

$$\Phi_{,x} = \Phi_{,\xi} \xi_{,x} + \Phi_{,\eta} \eta_{,x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \frac{y_2 - y_3}{2A} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \frac{y_3 - y_1}{2A} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 \\ y_3 - y_1 \\ y_1 - y_2 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

$$\Phi_{,y} = \Phi_{,\xi} \xi_{,y} + \Phi_{,\eta} \eta_{,y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \frac{x_3 - x_2}{2A} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \frac{x_1 - x_3}{2A} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x_3 - x_2 \\ x_1 - x_3 \\ x_2 - x_1 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Para mudança do domínio de integração  $dA = dx dy$  para  $d\xi d\eta$  utiliza-se a relação  $dA = \det \mathbf{J} d\xi d\eta$  onde  $\mathbf{J}$  é a matriz jacobiano da transformação das coordenadas  $x$  e  $y$  para as coordenadas paramétricas  $\xi$  e  $\eta$  dada pela equação seguir. Assim,  $\det \mathbf{J} = 2A$ .

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

### 3.3 Formulação do ESO

A técnica ESO surge como uma alternativa ao rigor matemático de métodos clássicos de otimização. Esse procedimento, proposto por Xie e Steven (1993), apresenta uma base teórica simples cujo fundamento consiste na inserção de vazios na estrutura através da eliminação gradual dos elementos menos solicitados do domínio durante o processo de evolução. Portanto, para se obter a configuração ótima deve-se agregar ao estudo um nível de análise estrutural dependente de um domínio discreto, o que torna o emprego do Método dos Elementos Finitos uma etapa do algoritmo de otimização.

Neste trabalho a representação matemática técnica ESO baseia-se no conceito de tensão, isto é, o nível máximo de tensão na estrutura, obtido por análises via MEF, é tomado como um indicador do nível de eficiência de cada elemento. Elementos com baixo nível de tensão são, portanto, sistematicamente removidos da estrutura. A cada iteração novos elementos ineficientes são eliminados da malha e o procedimento se repete até que o campo de tensão atuante em todo o domínio seja praticamente constante

e muito próximo da tensão admissível do material ou que seja atingida a restrição de volume mínimo. A Figura 3.8 ilustra o processo de retirada do elemento.

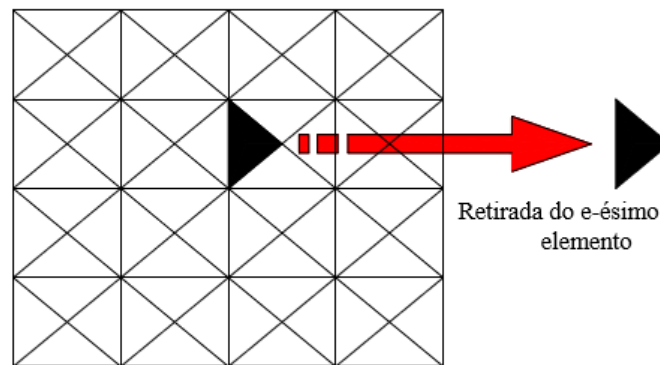


Figura 3.8 ESO: retirada de elemento da malha. (Simonetti, 2009).

O critério de remoção é feito comparando-se a tensão de von Mises de cada elemento com a tensão de von Mises máxima existente em toda a estrutura. Portanto, no fim de cada iteração todos os elementos que atendam à Inequação 3.34 serão eliminados. A forma de retirada do elemento ocorre atribuindo-se baixos valores para seu módulo de elasticidade ( $E=10^{-12}$ ). Desse modo, evita-se o remalhamento da estrutura, o que simplifica muito a implementação computacional do método dentro de uma plataforma de um programa de elementos finitos. No entanto, os graus de liberdade de um nó conectados a elementos que tenham sido retirados da análise continuam produzindo equações na matriz de rigidez global da estrutura o que pode levar a um mau condicionamento dessa matriz. Esse é o motivo da utilização de um módulo de elasticidade pequeno em vez de nulo para o elemento após a sua retirada da malha.

$$\sigma_e^{vM} < RR_i \cdot \sigma_{Max}^{vM} \quad (3.34)$$

onde:

$\sigma_e^{vM}$  = tensão de von Mises no elemento analisado;

$RR_i$  = razão de rejeição na  $i$ -ésima iteração ( $0 < RR_i < 1,0$ );

$\sigma_{Max}^{vM}$  = máxima tensão de von Mises da iteração.

A razão de rejeição é usada para retardar o processo de remoção do elemento. O ciclo de remoção ocorre até que não possam mais ser removidos elementos para um dado valor de  $RR_i$ . Quando isto ocorre, um estado de equilíbrio é alcançado. O processo

evolucionário é redefinido adicionando-se à  $RR_i$  uma razão de evolução,  $ER$ . A razão de rejeição é atualizada de acordo com a Equação 3.35.

$$RR_{i+1} = RR_i + ER \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (3.35)$$

O valor inicial da razão de rejeição ( $RR_0$ ) é definido de forma empírica pelo usuário. Entretanto, segundo Querin (1997), para garantir melhor convergência, os valores de  $RR_0$  e  $ER$  devem ser de aproximadamente 1%. O processo se repete enquanto a estrutura não atingir o volume final,  $VF$ , definido pelo usuário, ou seja:

$$VR < (1 - VF) \cdot VT \quad (3.36)$$

onde  $VR$  é o volume retirado acumulado até aquela iteração,  $VF$  é o volume final expresso em percentual (por exemplo,  $VF = 0,4$  implica que a retirada de elementos cessará quando o volume da estrutura atingir 40% do seu volume total inicial) e  $VT$  o volume inicial total da estrutura.

Matematicamente, o ESO pode ser escrito como:

$$\mathbf{D}(j) = \begin{cases} \mathbf{D}_0, & \text{se } j \in \Gamma \\ \mathbf{0}, & \text{se } j \in \Gamma' \end{cases} \quad (3.37)$$

onde:

$\mathbf{D}(j)$  = matriz constitutiva do ponto  $j \in \Omega$ ;

$\mathbf{D}_0$  = matriz constitutiva inicial;

$\Omega = \Gamma + \Gamma'$  = domínio da estrutura;

$\Gamma = \left\{ \Omega / \left( \frac{\sigma_e^{vM}}{\sigma_{m\acute{a}x}^{vM}} \right) \geq RR_i \right\}$ , conjunto dos elementos que não serão removidos;

$\Gamma' = \left\{ \Omega / \left( \frac{\sigma_e^{vM}}{\sigma_{m\acute{a}x}^{vM}} \right) < RR_i \right\}$ , conjunto dos elementos que serão removidos.

Portanto, o algoritmo ESO apresenta a seguinte marcha, representada no fluxograma da Figura 3.9:

1º Passo: discretização do domínio e aplicação das condições de contorno e ações prescritas;

2º Passo: análise da estrutura via MEF e cálculo das tensões principais e tensões de von Mises em cada elemento;

3º Passo: retirar os elementos que satisfaçam a Inequação 3.35, dentro de um limite pré-definido de volume (p%);

4º Passo: repetir os passos 2 e 3 até que seja atingido o equilíbrio;

5º Passo: acréscimo da razão de rejeição conforme a Equação 3.36 e iniciar nova retirada de elementos repetindo os passos 2, 3 e 4.

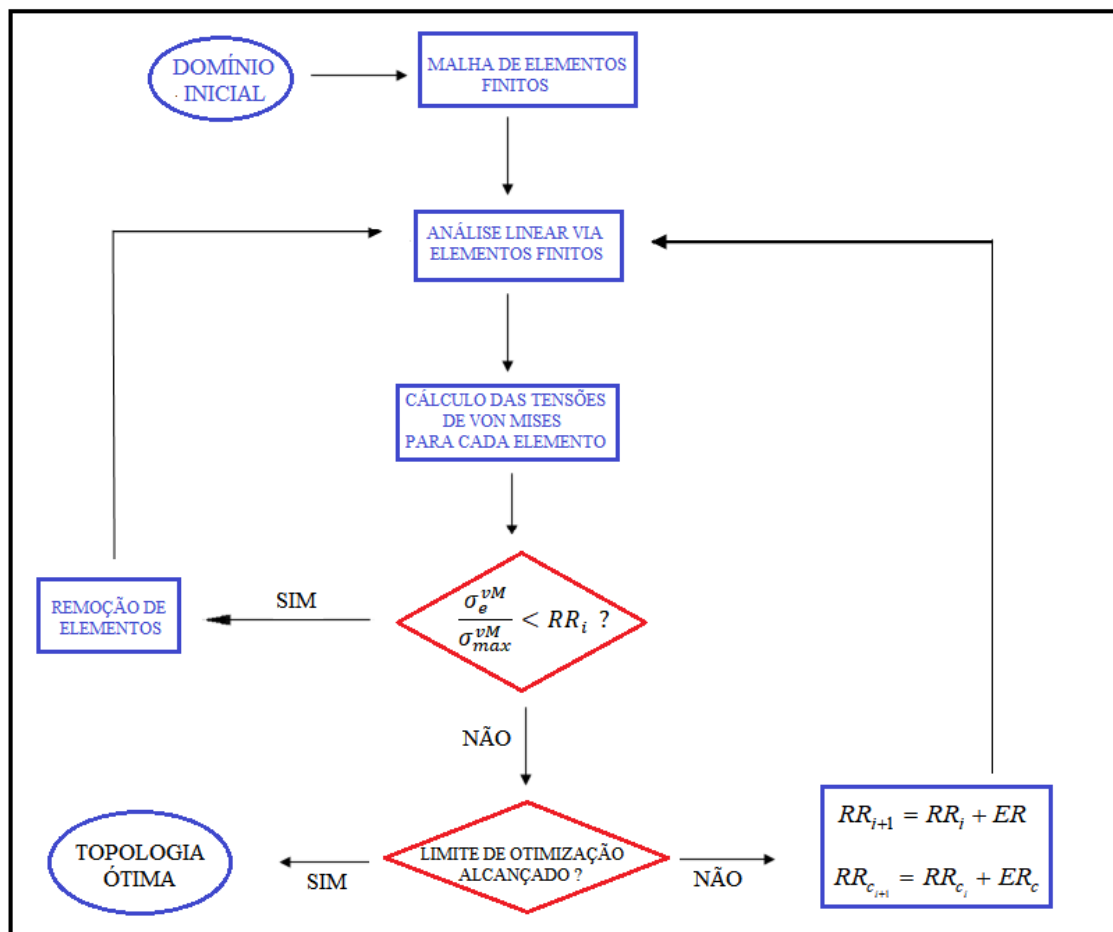


Figura 3.9 Algoritmo ESO em nível de tensão.

### 3.4 Critério de escoamento de von Mises

A teoria da energia de distorção máxima formulada por von Mises estabelece que o escoamento de um material dúctil ocorre quando a energia de distorção por unidade de volume do material,  $u_d$ , assume um valor crítico,  $u_{esc}$  dado pela energia de distorção

por unidade de volume do mesmo material quando submetido a escoamento em um ensaio de tração simples.

- Em termos de tensões principais, a energia de distorção pode ser escrita como:

$$u_d = \frac{1 + \nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \quad (3.38)$$

Para o caso uniaxial,  $\sigma_1 = \sigma_{esc}$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$  e, portanto,

$$u_{esc} = \frac{1 + \nu}{6E} [(\sigma_{esc} - 0)^2 + (0 - \sigma_{esc})^2] = \frac{1 + \nu}{3E} \sigma_{esc}^2 \quad (3.39)$$

Como o critério exige que  $u_d = u_{esc}$ , tem-se:

$$[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = 2\sigma_{esc}^2 \quad (3.40)$$

Supondo-se que o escoamento ocorra para uma dada tensão de von Mises no elemento 'e', ou seja,  $\sigma_{esc} = \sigma_e^{vM}$ , então:

$$\sigma_e^{vM} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (3.41)$$

Para o caso de estado plano de tensão, com  $\sigma_3 = 0$  e considerando  $u_d = u_{esc}$ , fica:

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_{vM}^2 \quad (3.42)$$

- Alternativamente, pode-se determinar a tensão de von Mises em termos das tensões normais e de cisalhamento:

$$\sigma_e^{vM} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)} \quad (3.43)$$

E, para o caso plano, a tensão de von Mises é calculada para cada elemento pela Equação 3.44.

$$\sigma_e^{vM} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2} \quad (3.44)$$

### 3.5 Problemas Numéricos na Otimização Topológica

Embora seja conceitualmente simples, o ESO é um algoritmo de otimização discreta o que em geral resulta em problemas relacionados às instabilidades numéricas, conforme detalhado em Sigmund e Petersson (1998). Estas instabilidades são



classificadas em três categorias: tabuleiro de xadrez, dependência da malha e os mínimos locais, que serão brevemente abordados nos itens a seguir.

### 3.5.1 Tabuleiro de Xadrez (*Checkerboard*)

A instabilidade de tabuleiro de xadrez, também conhecida na literatura como “*checkerboard*”, é um problema bastante comum na otimização topológica de estruturas contínuas. Caracteriza-se pela formação na topologia ótima de regiões contendo vazios (sem material) e sólidos (com material), de maneira alternada, assumindo um aspecto semelhante a um tabuleiro de xadrez conforme indica a Figura 3.10.

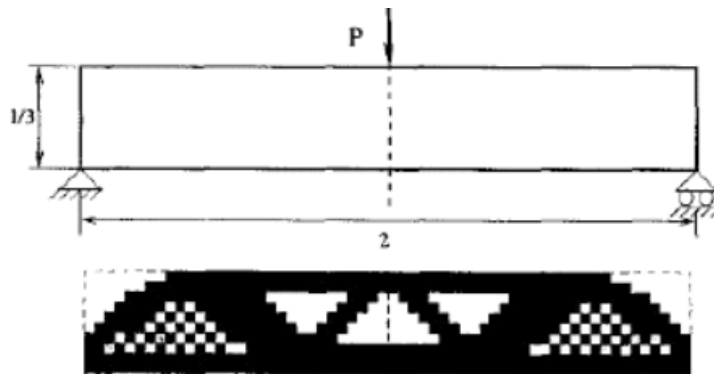


Figura 3.10 Representação do tabuleiro de xadrez. (Sigmund e Perterson ,1998).

Segundo Díaz e Sigmund (1995), esse fenômeno decorre de problemas numéricos na convergência do MEF causado pelo mau-condicionamento das equações de equilíbrio.

Bendsøe e Sigmund (2004) sugeriram a utilização de elementos com função de interpolação de alta ordem, como, por exemplo, elementos bilineares ou quadriláteros de oito nós, uma vez que o ‘enriquecimento’ do campo de deslocamentos pode prevenir a ocorrência desse tipo de fenômeno.

No presente trabalho, apesar de ter sido utilizado o elemento triangular de três nós, a redução desse tipo de instabilidade foi possível através da implementação de um código que controla a retirada de elementos que se encontram ‘soltos’ na malha durante o processo evolucionário, isto é, elementos que não estejam conectados a nenhum outro elemento por meio de suas arestas. A Figura 3.11 apresenta um desdobramento do algoritmo ESO da Figura 3.9, cuja descrição é dada a seguir.

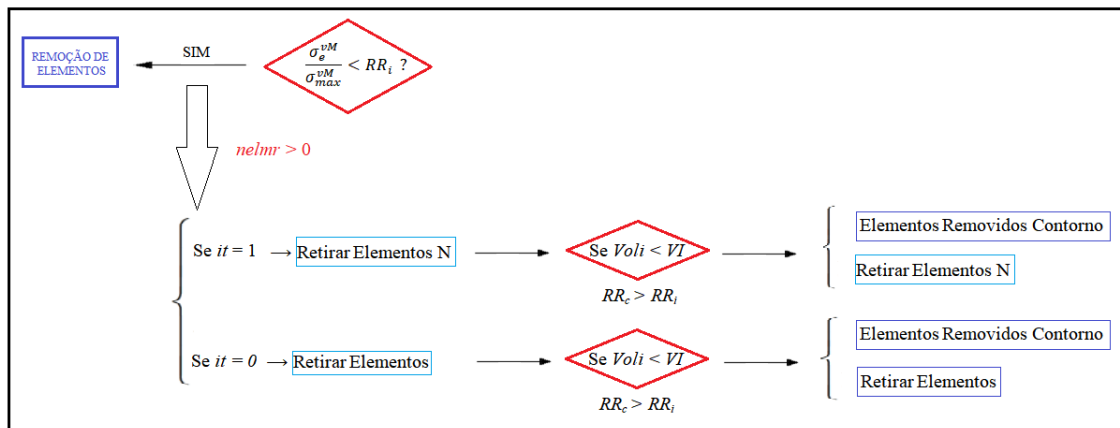


Figura 3.11 Fluxograma do algoritmo ESO quando há elementos a serem removidos para uma dada taxa de rejeição

Para ficar mais clara a explicação será definida '*elmr*' como a lista de elementos a serem retirados, '*elmrc*' a lista de elementos de contorno a serem retirados, '*nelmr*' número de elementos de '*elmr*' e '*nelmrc*' número de elementos de '*elmrc*'.

O algoritmo cria uma lista (vetor '*elmr*') com '*nelmr*' elementos candidatos a serem retirados em ordem crescente de razão de rejeição, isto é, elementos que atendam à Inequação 3.34, independentemente de o elemento ser de contorno ou de interior. Elemento de contorno é o elemento que tem uma ou mais de suas arestas não conectada a nenhum outro elemento, caso contrário, o elemento é de interior.

A remoção dos elementos da lista '*elmr*' ocorre até que o volume retirado numa dada iteração, '*Voli*', atinja o volume máximo permitido para ser retirado por iteração, definido pelo parâmetro de entrada '*VI*'.

Para controlar a maneira como é feita a remoção de elementos, entretanto, foi criada a variável '*it*' que permite ao usuário forçar (ou não) a eliminação de elementos da malha que não estejam conectados a nenhum outro elemento por meio de suas arestas, ou seja, estariam conectados apenas pelos seus nós. Assim, quando '*it*' é 1, esses elementos 'soltos' são retirados mesmo que não atendam à Inequação 3.34. Isso é feito através da função '*Retirar Elementos N*' que exclui da malha os primeiros elementos da lista '*elmr*' até que  $Voli = VI$  ou esgote os elementos a serem retirados da lista '*elmr*', nesse caso  $Voli < VI$ . Após isso, é iniciada a etapa de retirada dos elementos conectados apenas pelos seus nós. Por outro lado, quando '*it*' é 0 o algoritmo não retira os elementos 'soltos' se não apresentarem tensão de von Mises baixa. Ou seja, o código,

então, chama a função ‘Retirar Elementos’, que funciona como função ‘Retirar Elementos  $N$ ’, excluindo a etapa da retirada dos elementos soltos que não atendem à Inequação 3.34.

Tanto para  $it = 1$  quanto para  $it = 0$ , depois da remoção de todos os elementos do vetor ‘ $elmr$ ’ ou daqueles que são permitidos pelo parâmetro ‘ $VI$ ’, são verificados se existem elementos isolados ou trechos de elementos isolados e retiram-se esses elementos. Diferente de elementos soltos, que estão conectados a outros elementos pelos seus nós, elementos isolados não estão conectados a nenhum outro elemento nem pelas suas arestas e nem pelos seus nós. O algoritmo implementado consegue identificar até três elementos conectados entre si e isolados dos demais.

Tanto para  $it = 1$  quanto para  $it = 0$ , caso o volume retirado ‘ $Voli$ ’ ainda não tenha atingido o volume máximo permitido por iteração ‘ $VI$ ’, há a possibilidade de serem retirados elementos da malha que são exclusivamente do contorno até que ‘ $Voli$ ’ seja igual a ‘ $VI$ ’. Para tanto, definiu-se o parâmetro  $RR_c$ , razão de rejeição de elementos do contorno, e sua correspondente razão de evolução,  $ER_c$ . Entretanto, isso só é feito para valores  $RR_c$  maiores que  $RR$ . Dessa forma, a função ‘Elementos Removidos Contorno’ cria uma lista com os elementos de contorno a serem retirados da malha, ou seja, elementos tais que  $\sigma_e^{vM} < RR_c \cdot \sigma_{Max}^{vM}$ . Após isso, é chamada a função ‘Retirar Elementos  $N$ ’, caso  $it = 1$ , ou ‘Retirar Elementos’, caso  $it = 0$ , para a retirada dos elementos da malha, conforme descrito nos parágrafos anteriores.

Caso não haja nenhum elemento que atenda à Inequação 3.34 para uma dada razão de rejeição, isto é, quando a lista ‘ $elmr$ ’ estiver vazia ( $nelmr = 0$ ) e o volume acumulado retirado,  $VR$ , ainda não tenha atingido o valor estipulado pelo usuário, as taxas de retirada de elementos  $RR$  e  $RR_c$  devem ser atualizadas e um novo ciclo de remoção iniciado. Antes, porém, de atualizar  $RR$  e  $RR_c$  o algoritmo verifica se existem elementos exclusivamente de contorno para serem retirados. A função ‘Elementos Removidos Contorno’ é novamente chamada para criar agora a lista ‘ $elmrc$ ’ de elementos exclusivamente de contorno. Na Figura 3.12, ‘ $nelmrc$ ’ é o número de elementos da lista ‘ $elmrc$ ’. Mais uma vez, isso só é feito se for definida uma taxa de rejeição  $RR_c$  de elementos de contorno maior que a taxa de retirada  $RR$  para elementos quaisquer. A Figura 3.12 ilustra esta etapa do código implementado.

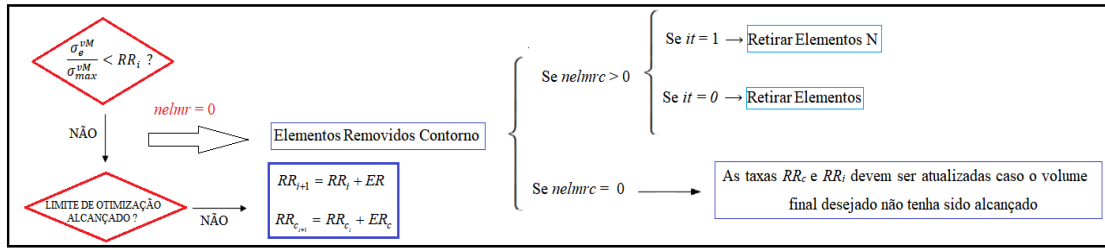


Figura 3.12 Fluxograma do algoritmo ESO quando não há elementos a serem removidos para uma dada taxa de rejeição

### 3.5.2 Dependência de Malha

O problema da dependência de malha está relacionado com as diversas soluções finais obtidas para diferentes discretizações do domínio. Portanto, na OT ocorre uma alteração da topologia ótima cada vez que se aumenta a discretização e, ao contrário do que era de se esperar, a utilização de uma malha mais refinada nem sempre acarreta em melhores resultados. Através da Figura 3.13 é possível perceber como a dependência de malha pode influenciar na topologia final.

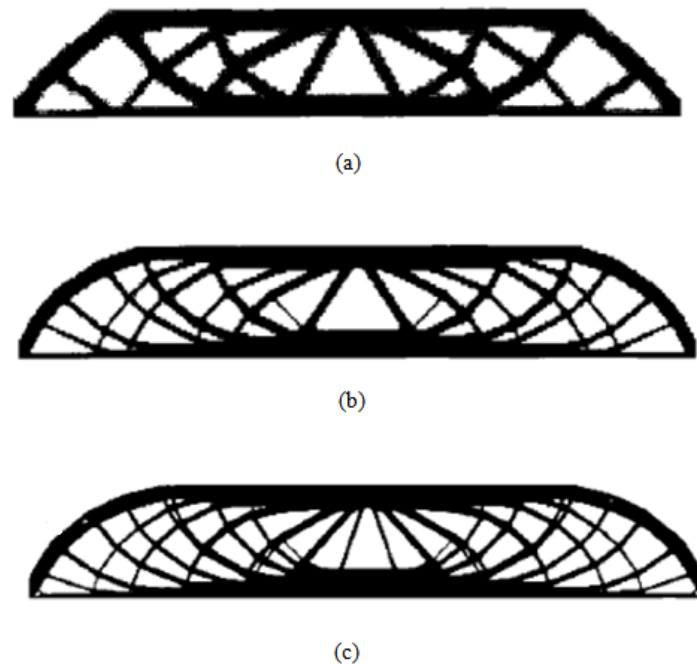


Figura 3.13 Representação da topologia final para diferentes malhas (a) 2700 elementos, (b) 4800 elementos, (c) 17200 elementos. (Bendsøe e Sigmund, 2004)

Soluções comumente adotadas para minimizar o surgimento desse problema podem ser encontradas em Jog e Haber (1996), Sigmund e Petersson (1998) e Zhou *et al.*

(2001). Sigmund e Petersson (1998) concluíram que as aproximações adotadas para redução da dependência de malha, também reduzem os efeitos do tabuleiro de xadrez.

Neste trabalho, foi adotada a seguinte estratégia para cálculo das tensões nos elementos para representar as regiões a serem eliminadas durante o processo de otimização:

- As tensões são avaliadas no ponto de Gauss do elemento (no caso do elemento triangular de três nós implementado, é utilizado apenas um ponto de Gauss para o processo de integração numérica);
- Essa tensão é extrapolada para os nós do elemento (para o elemento triangular de três nós, por se tratar de um elemento de deformação constante a tensão em qualquer ponto do elemento assume o mesmo valor da tensão nos pontos de Gauss);
- Suavização da tensão: as tensões em um nó são calculadas através de uma média aritmética simples das tensões de todos os elementos incidentes nesse nó;
- As tensões no elemento são recalculadas através da média das tensões dos três nós de conectividade elemento.

Dessa forma, as cavidades são criadas automaticamente em pontos internos de baixa tensão e foi observado que a aplicação dessa estratégia diminui a ocorrência tanto do tabuleiro de xadrez quanto da dependência de malha durante o processo iterativo.

### **3.5.3 Mínimos Locais**

O problema de ótimos locais está relacionado à natureza não convexa dos projetos de otimização topológica. As provas de convergência dos algoritmos funcionam para programação convexa, enquanto que para programação não convexa apenas garante-se a convergência para pontos estacionários, que não são necessariamente mínimos globais. Os algoritmos de otimização global disponíveis são, em sua maioria, incapazes de lidar com uma grande quantidade de variáveis de projeto, o que é o caso da otimização topológica. (Simonetti, 2009).

Segundo Sigmund e Petersson (1998), essa não convexidade permite que diversas soluções ótimas sejam encontradas dependendo da escolha dos parâmetros iniciais, tais como, número de elementos e geometria do domínio de projeto. Mais especificamente para o ESO, a adoção de diferentes parâmetros de entrada do problema como o *RR* (razão de rejeição), *ER* (razão de evolução), entre outros, para uma mesma discretização

do domínio pode resultar em diferentes soluções. Essa é, portanto, a grande desvantagem da OT que é extremamente sensível a pequenas modificações em seus parâmetros.

Sigmund e Petersson (1998) afirmam, entretanto, que o controle das outras duas instabilidades citadas anteriormente tendem a tornar convexos os problemas evitando a ocorrência desse tipo de problema na topologia final.

### **3.6 Exemplos Numéricos**

Neste item são apresentadas algumas aplicações considerando o método ESO implementado. Foram feitas análises elástico-lineares em estruturas submetidas a estado plano de tensão. O material é considerado homogêneo e isotrópico.

Para cada exemplo são definidas as propriedades mecânicas do material e o domínio inicial de projeto. Além disso, são especificados os seguintes parâmetros:  $RR$  (razão de rejeição),  $ER$  (razão de evolução),  $VF$  (volume final desejado),  $VI$  (volume máximo retirado por iteração),  $VR$  (volume total retirado até uma dada iteração), número da iteração e malha de elementos finitos adotada. São definidas também a razão de rejeição de elementos do contorno,  $RR_c$  e sua razão de evolução,  $ER_c$ . Lembrando que esses parâmetros influenciam na análise somente se  $RR_c$  for maior que  $RR$  e o volume retirado em uma dada iteração for menor que o volume máximo permitido a ser retirado por iteração ( $Voli < VI$ ), isso pode acontecer para valores pequenos de  $RR$  e grandes de  $VI$ .

#### **3.6.1 Estrutura de Michell**

O primeiro exemplo a ser apresentado trata-se de uma viga simplesmente apoiada submetida a uma carga concentrada conforme indicado na Figura 3.14a, comumente chamada na literatura de estrutura de Michell. A solução analítica é mostrada na Figura 3.14b. O material adotado foi o aço, cujo módulo de elasticidade  $E=200\text{GPa}$ , coeficiente de Poisson  $\nu=0.3$  e espessura igual a 1mm.

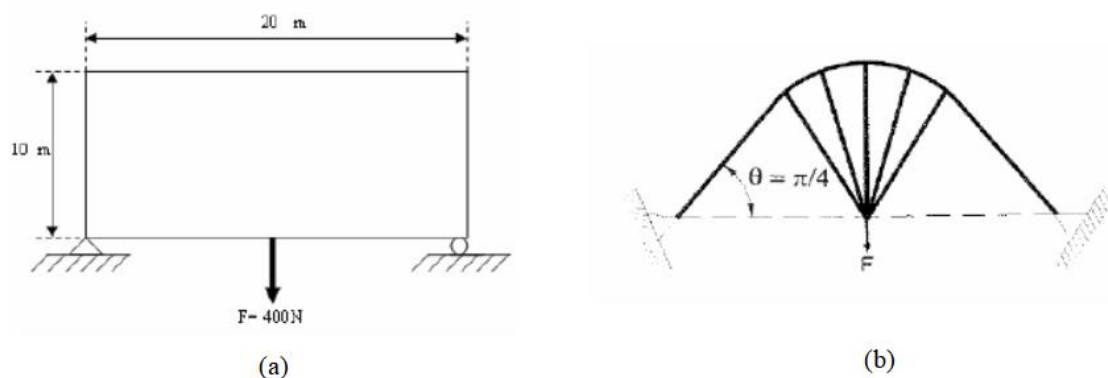


Figura 3.14 (a) Domínio inicial para estrutura de Michell (b) Solução analítica

O domínio foi discretizado numa malha de elementos triangulares de  $96 \times 40$ . O processo evolucionário teve início com uma razão de rejeição ( $RR$ ) de 1% e uma razão de evolução ( $ER$ ) de 0,75%. O volume retirado ( $VR$ ) de 60% do volume inicial e o volume máximo retirado por iteração ( $VI$ ) de 1,75%. Nesse exemplo a topologia ótima foi obtida com  $it=0$  e  $RR_c=0$ . A Figura 3.15 apresenta a evolução da estrutura.

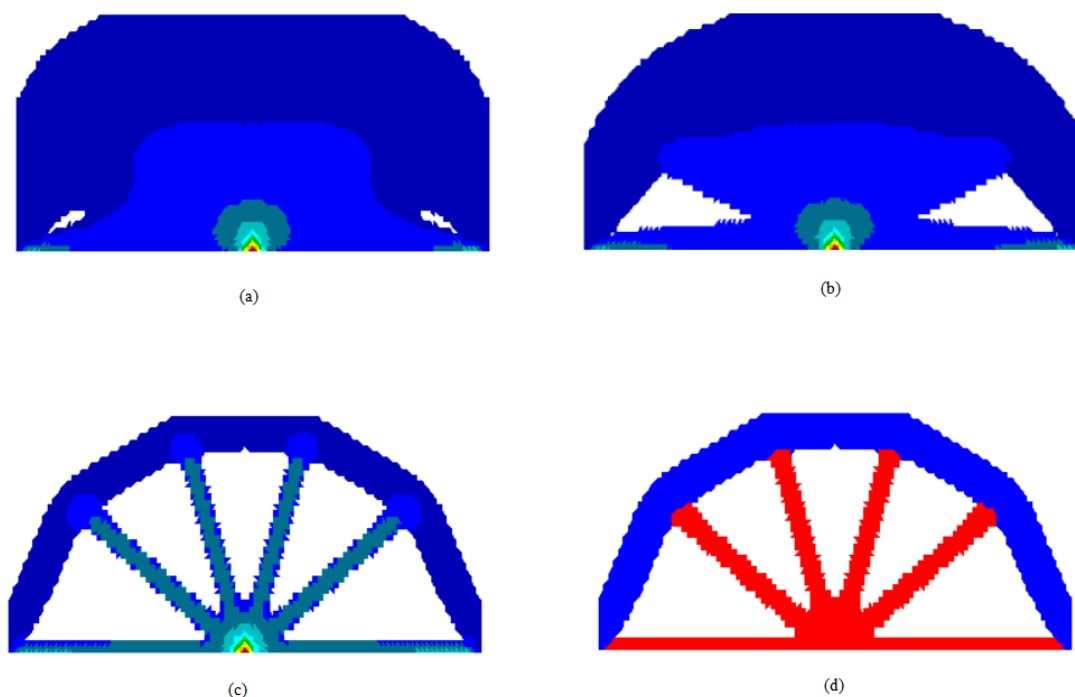


Figura 3.15 (a) Iteração 22,  $RR=2,5\%$ ,  $VR=5,6\%$  (b) Iteração 69,  $RR=4,75\%$ ,  $VR=18,6\%$  (c) Iteração 175,  $RR=10,75\%$ ,  $VR=60,0\%$  (d) Modelo de bielas e tirantes

Deve ser ressaltado que foram realizados testes para  $it=1$  e  $RR_c > RR$  e, para este exemplo, a topologia ótima não apresentou diferenças significativas com a variação desses parâmetros.

### 3.6.2 Consolo Curto

Este exemplo apresenta um consolo curto projetado para suportar uma carga pontual de 500kN. A Figura 3.16 traz as dimensões da estrutura em milímetros. O módulo de elasticidade do concreto foi tomado igual a  $E=28567\text{MPa}$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0,15$  e a espessura assumida como sendo igual a 300mm.

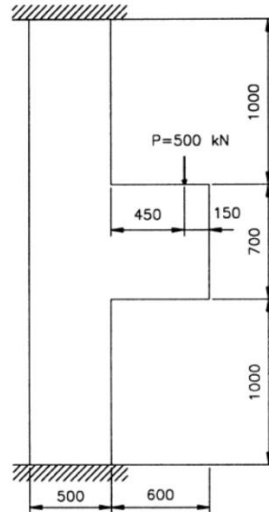


Figura 3.16 Consolo Curto (Liang *et al.*, 2000)

Este exemplo foi estudado por Liang *et al.* (2000), usando um procedimento evolucionário com critério de parada em PI (índice de performance) da estrutura. A Figura 3.17 apresenta a evolução da estrutura e o correspondente modelo de bielas e tirantes sugerido pelos autores, no qual as bielas estão representadas por linha pontilhada e os tirantes por linha cheia.

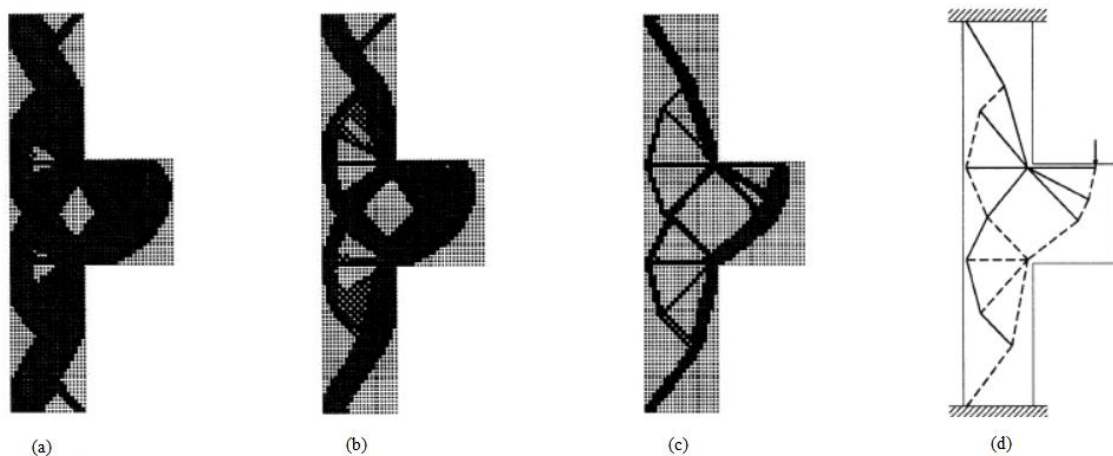


Figura 3.17 (a), (b), (c) Processo evolucionário (d) Modelo de bielas e tirantes (Liang *et al.*, 2000)



No presente trabalho a estrutura foi modelada usando uma malha com 5664 elementos triangulares de três nós com 25 mm de lado. Para obter a topologia ótima apresentada na Figura 3.18c, os parâmetros adotados foram:  $RR = 0,01$ ,  $ER=0,05$ ,  $VF=45\%$ ,  $VI=0,05$ ,  $it=1$ ,  $RR_c=0,03$  e  $ER_c=0,03$ . Os campos de compressão (bielas) são representados em azul e os campos de tração (tirantes) em vermelho.

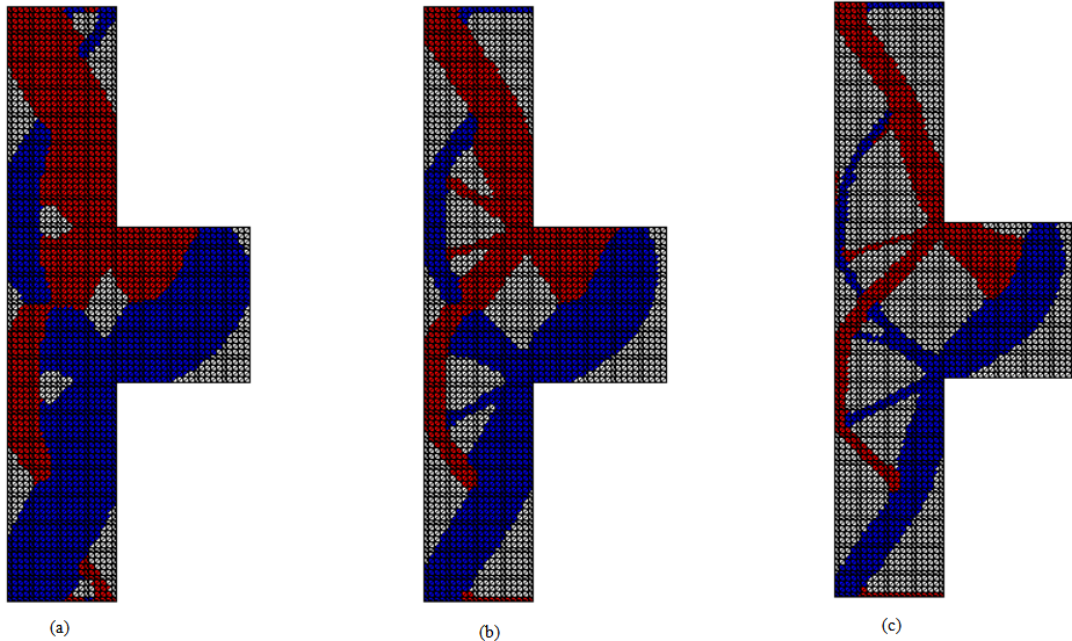


Figura 3.18 (a) Iteração 25,  $RR = 11,0\%$ ,  $VR = 15,0\%$  (b) Iteração 31,  $RR = 11,0\%$ ,  $VR = 35,0\%$  (c) Iteração 47,  $RR= 16,0\%$ ,  $VR=55,0\%$

Assim como no exemplo anterior, a topologia ótima obtida adotando-se  $it=0$  pouco variou em relação àquela da Figura 3.18c.

### 3.6.3 Viga biapoiada com múltiplo carregamento

A Figura 3.19 apresenta a geometria inicial do problema, bem como as condições de contorno e carregamento aplicado, onde  $P_1=40\text{kN}$  e  $P_2=20\text{kN}$ . O domínio foi discretizado numa malha de 3600 elementos triangulares de três nós.

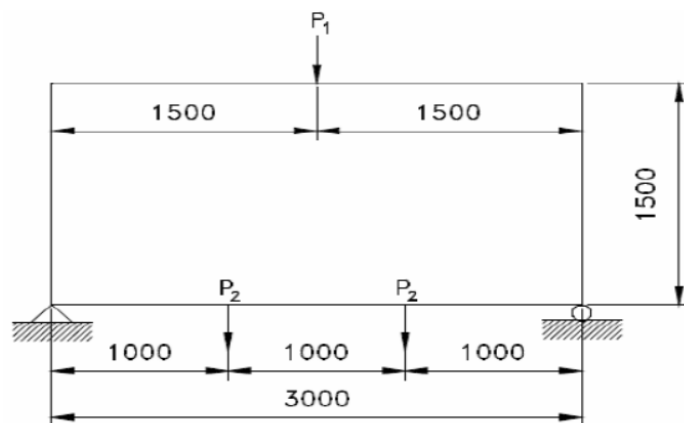


Figura 3.19 Viga biapoiada submetida a ação de várias cargas. (Liang, 2007)

A Figura 3.20a, apresenta a configuração ótima obtida adotando-se os seguintes parâmetros:  $RR=1\%$ ,  $ER=1\%$ ,  $VF=39\%$ ,  $VI=5\%$ ,  $it=0$ ,  $RR_c=0$  e  $ER_c=0$ . Essa topologia foi obtida após 133 iterações do algoritmo de otimização topológica implementado neste trabalho.

Já a topologia ótima ilustrada na Figura 3.20b, foi alcançada após 121 iterações. O processo evolucionário teve início com uma razão de rejeição ( $RR$ ) igual a 1% e uma razão de evolução ( $ER$ ) de 1%. O volume retirado por iteração ( $VI$ ) igual a 1%. Além disso, adotou-se  $it=1$ ,  $RR_c = 0,03$  e  $ER_c=0,03$ .

Nas duas situações o volume final desejado é igual a 39% do volume inicial, o material utilizado apresenta módulo de elasticidade longitudinal  $E=200\text{GPa}$ , coeficiente de Poisson  $\nu=0,30$  e a espessura considerada é de 10 mm.

Este exemplo mostra como a configuração ótima é sensível à variação dos parâmetros iniciais para um mesmo volume final.

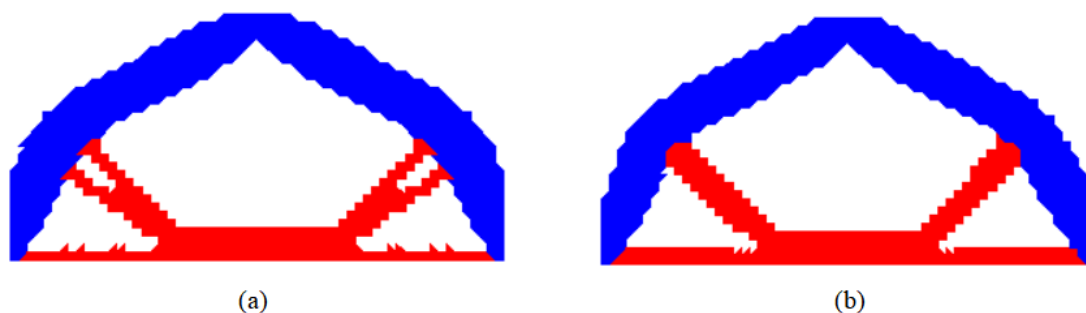


Figura 3.20 (a) Iteração 133,  $RR=19\%$ ,  $VF=39\%$  (b) Iteração 121,  $RR=6\%$ ,  $VF=39\%$

A Figura 3.21 apresenta o resultado obtido por Simonetti (2009) empregando a técnica SESO.



Figura 3.21 Topologia ótima obtida via SESO (Simonetti, 2009)

### 3.6.4 Estrutura de Ponte

A Figura 3.22a apresenta o problema proposto por Liang e Steven (2002), cuja configuração ótima obtida pelos autores está ilustrada na Figura 3.22b. Foi utilizado um método chamado PBO (*Performance-Based Optimization*) no qual a estrutura foi discretizada numa malha de 90x30 elementos quadriláteros de quatro nós.

Trata-se de uma ponte com tabuleiro central submetida a uma carga uniformemente distribuída modelado através de cargas concentradas de 500kN em todos os nós da face superior do tabuleiro. Na presente análise, foi considerado um material com módulo de elasticidade  $E=200\text{GPa}$ , coeficiente de Poisson  $\nu=0,3$  e espessura de 30cm. Adotou-se uma malha com 5400 elementos triangulares de três nós.

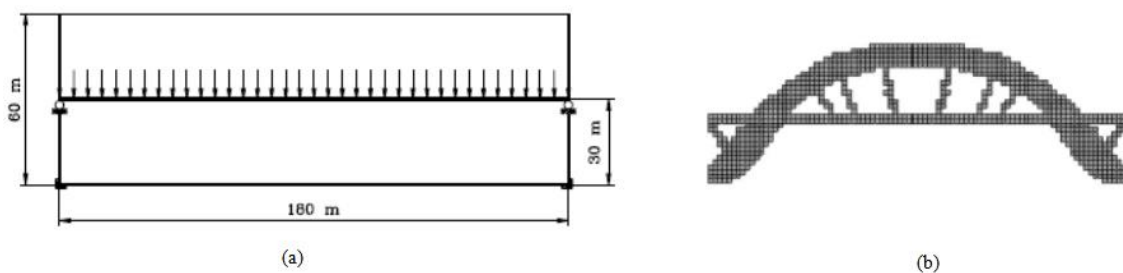
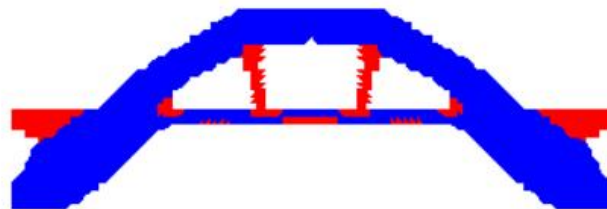


Figura 3.22 (a) Domínio inicial (b) Topologia ótima via PBO (Liang *et al.*, 2002a)

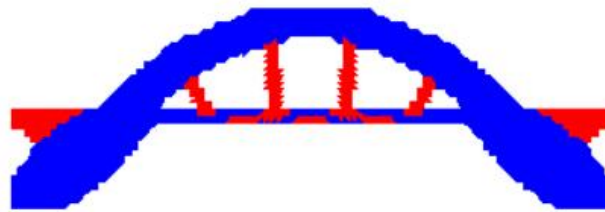
O algoritmo implementado impede a retirada de elementos nos quais o carregamento externo está aplicado bem como de elementos onde são impostas as condições de contorno.

Na Figura 3.23a é apresentada a configuração final alcançada após 192 iterações do algoritmo. Os seguintes parâmetros foram adotados:  $RR=1\%$ ,  $ER=1,5\%$ , volume final  $VF=35\%$ , volume retirado por iteração  $VI=1,2\%$  e  $it=0$  (logo,  $RR_c=0$  e  $ER_c=0$ ).

Redefinindo os dados iniciais, foi possível obter a topologia ótima ilustrada na Figura 3.23b. Nesse caso,  $it=1$ ,  $RR_c=2\%$  e  $ER_c=3\%$  e os demais valores foram mantidos, ou seja:  $RR=1\%$ ,  $ER=1,5\%$ , volume final  $VF=35\%$  e volume retirado por iteração  $VI=1,2\%$ . Nesse caso, o processo evolucionário encerrou após 139 iterações. Os campos de compressão (bielas) são representados em azul e os campos de tração (tirantes) em vermelho. Através da Figura 3.23c é possível perceber que esse resultado se aproxima da configuração de uma ponte real e como o modelo de bielas e tirantes é útil na fase de concepção estrutural.



(a)



(b)



(c)

Figura 3.23 (a) Iteração 192,  $RR=19\%$ ,  $VF=35\%$  (b) Iteração 139,  $RR=10\%$ ,  $VF=35\%$

(c) Projeto existente de uma ponte

### 3.6.5 Viga parede com furos

A Figura 3.24 ilustra o domínio inicial do problema, cujas dimensões estão em milímetros.

A viga parede de espessura igual a 100 mm foi discretizada numa malha refinada de 4660 elementos triangular. O material utilizado apresenta módulo de Young  $E=30088\text{MPa}$  e coeficiente de Poisson  $\nu=0,15$ .

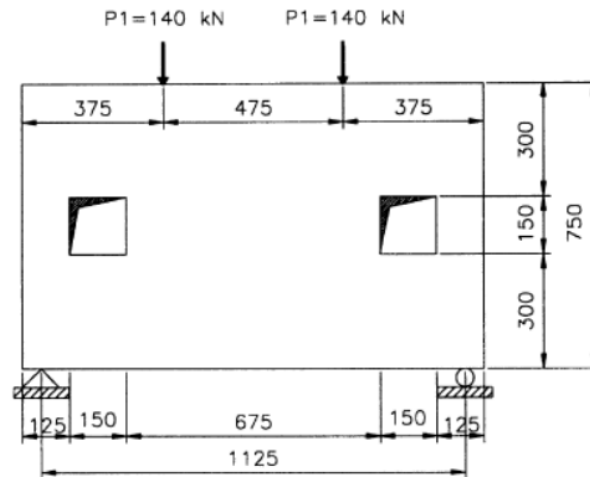


Figura 3.24 Viga parede biapoada com dois furos (Liang *et al.*, 2000).

O processo evolucionário teve início com uma razão de rejeição ( $RR$ ) igual a 1% e uma razão de evolução ( $ER$ ) de 1%. O volume final desejado igual a 42% do volume inicial e taxa de retirada de material por iteração ( $VI$ ) igual a 1,75%. Nesse exemplo,  $it=0$ ,  $RR_c=0$  e  $ER_c=0$ . A estrutura evoluiu para a seguinte forma ótima, veja Figura 3.25.

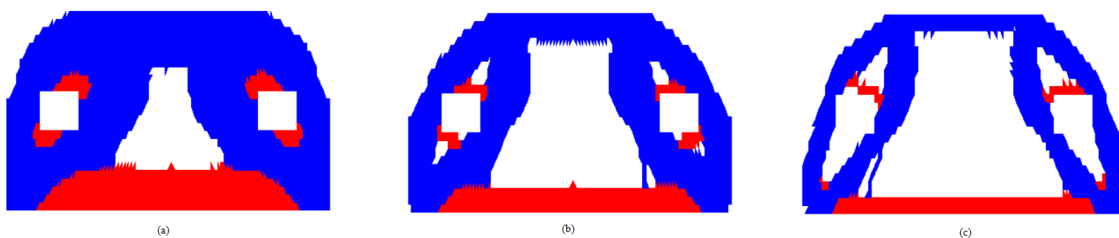


Figura 3.25 (a) Iteração 47,  $RR = 6,0\%$ ,  $VR = 18,0\%$  (b) Iteração 102,  $RR = 13,0\%$ ,  $VR = 40,0\%$  (c) Iteração 184,  $RR = 23,0\%$ ,  $VR = 58,0\%$

Simonetti (2009) resolveu este mesmo problema utilizando duas técnicas distintas, ESO e SESO. As formas ótimas são apresentadas na Figura 3.26.



Figura 3.26 (a) Topologia ótima via ESO (b) Topologia ótima via SESO (Simonetti, 2009)

Mais uma vez convém destacar que foram feitos testes alterando-se os parâmetros de entrada e que, embora o algoritmo seja bastante sensível a essas variações, nessa aplicação isso não ficou evidenciado. Por exemplo, foram observadas pequenas modificações na topologia ótima em relação à configuração da Figura 3.25c com os seguintes parâmetros:  $RR= 1\%$ ,  $ER=1\%$ ,  $VF=42\%$ ,  $VI=1,75\%$ ,  $it=1$ ,  $RR_c=2\%$  e  $ER_c=1\%$ . Já para  $it=1$ ,  $RR_c=2\%$  e  $ER_c=3\%$  a diferença é um pouco mais visível. A Figura 3.27 ilustra essa situação.

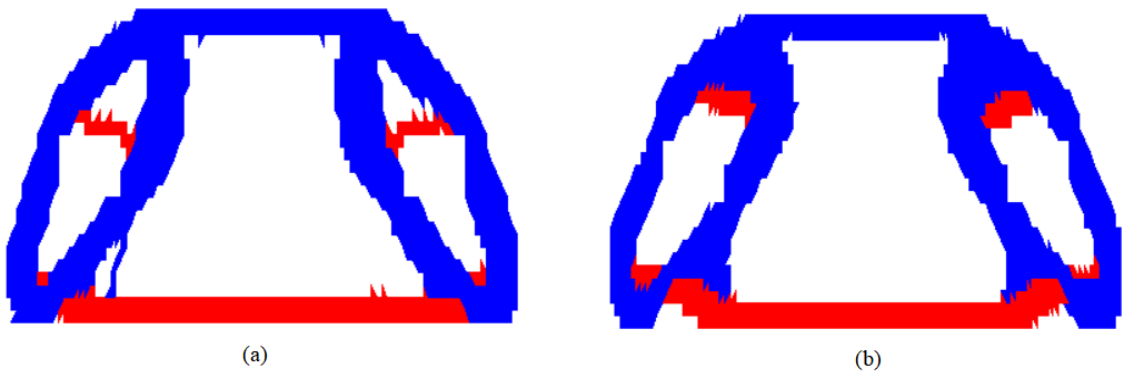


Figura 3.27 Topologias ótimas obtidas com  $RR= 1\%$ ,  $ER=1\%$ ,  $VF=42\%$ ,  $VI=1,75\%$ ,  $it=1$ ,  $RR_c=2\%$  (a)  $ER_c=1\%$ . (b)  $ER_c=2\%$

## 4 DIMENSIONAMENTO ESTRUTURAL

### 4.1 Introdução

Neste capítulo é apresentada uma estratégia para dimensionamento estrutural de elementos de concreto armado submetidos a estado plano de tensão. O algoritmo ESO descrito no capítulo anterior permite obter o modelo de bielas e tirantes considerando material isotrópico e uma análise elástico linear via Método dos Elementos Finitos. De posse desse modelo, pode ser feita uma verificação do concreto nas bielas comprimidas e o cálculo da armadura necessária para suportar os esforços de tração apresentados nos tirantes.

Sendo a forma da estrutura mantida igual ao domínio inicial da análise do algoritmo ESO, o modelo de dimensionamento descrito no parágrafo anterior pode gerar resultados conservadores. Dessa forma, nesse capítulo o resultado obtido do algoritmo ESO é utilizado para definir uma configuração inicial da quantidade e disposição da armadura.

Em seguida, a partir de uma análise não linear considerando essa configuração inicial de aço percebe-se que, em geral, a curva carga-deslocamento ultrapassa o esforço solicitante para um nível de deslocamento aceitável, e que, portanto, é possível otimizar a quantidade de armadura. Isso é feito através de uma adaptação do algoritmo ESO, que é chamado neste trabalho de algoritmo ESO-RC (*Evolutionary Structural Optimization-Reinforced Concrete*).

A aplicação do procedimento ESO-RC em estruturas que apresentam não linearidade não difere em relação às estruturas lineares, sendo que a análise não linear de elementos finitos deve ser utilizada. Nesse caso, entretanto, o cálculo das tensões passa a ser dependente dos modelos constitutivos adotados para os materiais. Dessa forma, na análise não-linear de estruturas em concreto armado por elementos finitos é fundamental um modelo constitutivo capaz de representar as não-linearidades do concreto e do aço de forma que o comportamento da formação e propagação de fissuras, esmagamento e perda de encaixe dos agregados e escoamento do aço sejam descritos realisticamente ao longo da história de carregamento da estrutura.

Além disso, ao adotar uma relação constitutiva não-linear entre as tensões e as deformações, caso do concreto armado, o vetor das forças internas passa a depender não

linearmente do vetor de deslocamentos  $\mathbf{q}$ , logo, a equação  $\mathbf{f}_{int} - \mathbf{f}_{ext} = \mathbf{0}$  apresentada na seção 3.2 será não linear, tornando necessário a implementação de um método eficiente para solução das equações de equilíbrio.

São apresentados três exemplos para ilustrar a formulação empregada e, para o terceiro exemplo, os resultados são comparados com o dimensionamento via NBR 6118 (2014). A primeira etapa, portanto, é a implementação do elemento triangular não linear que será descrita no item a seguir.

## 4.2 Formulação do Elemento Triangular Não Linear

O elemento triangular apresentado nesta seção para análise não linear de estruturas planas de concreto armado difere do elemento triangular do capítulo anterior apenas na definição da matriz constitutiva e no cálculo dos esforços internos e suas derivadas.

A curva tensão-deformação para o material concreto usado nesse trabalho é apresentada nas Figura 4.1 e 4.2. Os modelos dessas curvas foram definidos pelo Comitê Europeu de Concreto (CEB, 2010) e são praticamente coincidentes com os modelos adotados pela NBR 6118 (2014) diferenciando apenas no comportamento após o início do esmagamento do concreto, onde o modelo do CEB considera um amolecimento do concreto, enquanto que no modelo da NBR 6118 a tensão se mantém constante para um aumento de deformação até a deformação limite de compressão.

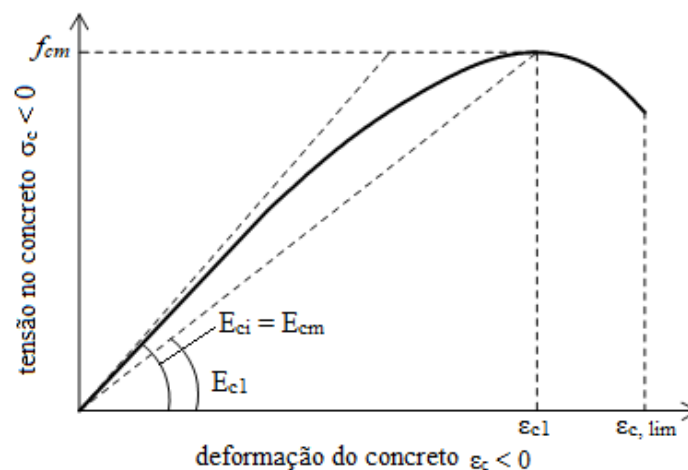


Figura 4.1 Curva tensão-deformação para o concreto comprimido (CEB/FIP, 2010).



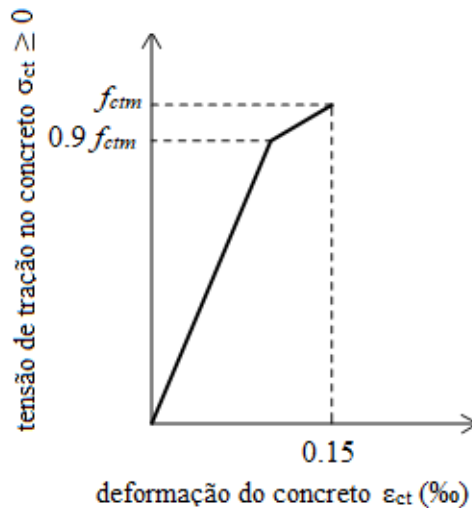


Figura 4.2 Curva tensão-deformação para o concreto tracionado (CEB/FIP, 2010).

Conforme sugerido por Rots *et al.* (1984) e usado também por Huang *et al.* (2003) é empregado um modelo bi-linear para a degradação do módulo de elasticidade do concreto após a fissuração. Já para o aço das barras de reforço, o comportamento é considerado elástico perfeitamente plástico.

Para solução do problema não linear, é usado um método incremental de análise no qual a cada passo considera-se material com comportamento linear, cujo módulo de elasticidade é dado pela tangente à curva tensão-deformação. Assim, é possível avaliar a matriz constitutiva para as situações do concreto após a fissuração e esmagamento aplicando a lei de Hooke.

Após a fissuração ou esmagamento o comportamento do concreto é considerado ortotrópico, apresentando características diferentes para cada direção principal. Neste trabalho, os subscritos 1 e 2 são utilizados para indicar as direções principais, em que a direção 1 é a de maior deformação principal. O critério de falha proposto pela NBR 6118 (2014) para o concreto é adotado para o desenvolvimento deste trabalho. Segundo este critério, o concreto é considerado ortotrópico quando as deformações principais ( $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$ ) estiverem dentro da região de falha. Nesse caso, a relação tensão-deformação é desacoplada para as direções principais e a matriz constitutiva do material é representada pela Equação 4.4.

O concreto apresenta comportamento ortotrópico após a fissuração ou esmagamento, ou seja, apresenta características diferentes para cada direção principal. As direções principais são calculadas, sendo indicadas nesse trabalho pelos subscritos 1

e 2, em que a direção 1 é a de maior deformação principal. Para o desenvolvimento deste trabalho é considerado o critério de falha sugerido pela NBR 6118 (2014) para o concreto. Se as deformações principais ( $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$ ) estiverem dentro da região de falha, o concreto é considerado ortotrópico com a relação tensão-deformação desacoplada para as direções principais, dessa forma a matriz constitutiva do material é dada pela Equação 4.1.

$$\mathbf{D}_{12} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(G_1 + G_2) \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Na Equação 4.1, as tangentes à curva tensão-deformação do concreto nos pontos  $\varepsilon = \varepsilon_1$  e  $\varepsilon = \varepsilon_2$  representam  $E_1$  e  $E_2$ , respectivamente. Já o módulo de elasticidade transversal é dado por:  $G_1 = \frac{E_1}{2(1+\nu)}$  e  $G_2 = \frac{E_2}{2(1+\nu)}$ . É possível expressar a matriz de rigidez na direção dos eixos ortogonais  $x$  e  $y$  a partir de  $\mathbf{D}_{12}$ , como descrito a seguir.

As tensões e deformações principais podem ser relacionadas com as tensões e deformações em relação aos eixos  $x$  e  $y$  quaisquer da forma:

$$\boldsymbol{\tau}_{12} = \mathbf{R}_{\sigma} \boldsymbol{\tau}_{xy} \quad (4.2)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{12} = \mathbf{R}_{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}_{xy} \quad (4.3)$$

onde:

$$\mathbf{R}_{\sigma}(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi & \sin^2 \varphi & \sin(2\varphi) \\ \sin^2 \varphi & \cos^2 \varphi & -\sin(2\varphi) \\ -\frac{1}{2} \sin(2\varphi) & \frac{1}{2} \sin(2\varphi) & \cos(2\varphi) \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

$$\mathbf{R}_\varepsilon(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi & \sin^2 \varphi & \frac{1}{2} \sin(2\varphi) \\ \sin^2 \varphi & \cos^2 \varphi & -\frac{1}{2} \sin(2\varphi) \\ -\sin(2\varphi) & \sin(2\varphi) & \cos(2\varphi) \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

O ângulo  $\varphi$  é o ângulo de rotação dos eixos principais em relação aos eixos  $x$  e  $y$ . Substituindo as Equações 4.2 e 4.3 na relação tensão-deformação dada em relação às direções principais,  $\boldsymbol{\tau}_{12} = \mathbf{D}_{12} \boldsymbol{\varepsilon}_{12}$ , e como as matrizes de rotação são ortogonais, ou seja,  $\mathbf{R}_\sigma^{-1} = \mathbf{R}_\varepsilon^T$ , tem-se:

$$\boldsymbol{\tau}_{xy} = \mathbf{R}_\varepsilon^T \mathbf{D}_{12} \mathbf{R}_\varepsilon \boldsymbol{\varepsilon}_{xy} \quad (4.6)$$

logo,

$$\mathbf{D}_{xy} = \mathbf{R}_\varepsilon^T \mathbf{D}_{12} \mathbf{R}_\varepsilon \quad (4.7)$$

Expandindo a Equação 4.7 chega-se à matriz constitutiva para a relação tensão-deformação dada no sistema de referência  $xy$ , cujos termos são dados pelas Equações 4.9 à 4.14.

$$\mathbf{D}_{xy} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ & D_{22} & D_{23} \\ Sim & & D_{33} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

$$D_{11} = E_1 \cos^4 \phi + E_2 \sin^4 \phi + \frac{1}{2} (G_1 + G_2) \sin^2(2\phi) \quad (4.9)$$

$$D_{12} = \frac{1}{4} \sin^2(2\phi) (E_1 + E_2 - 4(G_1 + G_2)) \quad (4.10)$$

$$D_{13} = \frac{1}{2} \sin^2 \phi (E_1 \cos^2 \phi - E_2 \sin^2 \phi - (G_1 + G_2) \cos(2\phi)) \quad (4.11)$$

$$D_{22} = E_1 \sin^4 \phi + E_2 \cos^4 \phi + \frac{1}{2} (G_1 + G_2) \sin^2(2\phi) \quad (4.12)$$

$$D_{23} = \frac{1}{2} \sin^2 \phi (E_1 \sin^2 \phi - E_2 \cos^2 \phi + (G_1 + G_2) \cos(2\phi)) \quad (4.13)$$

$$D_{33} = \frac{1}{4} \text{sen}^2(2\phi)(E_1 + E_2) + \frac{1}{2}(G_1 + G_2) \cos^2(2\phi) \quad (4.14)$$

No caso particular de material isotrópico, quando as deformações principais estiverem fora da região de falha do concreto, tem-se  $E_1 = E_2 = E$ ,  $G_1 = G_2 = G$  e a matriz  $\mathbf{D}_{xy}$  da Equação 4.8 assume a forma reduzida dada pela Equação 4.15.

$$\mathbf{D}_{xy} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

A relação entre as constantes de Lamé e o módulo de elasticidade do material e o coeficiente de Poisson são:  $\lambda = \nu E / (1-\nu^2)$  e  $G = 0,5E / (1+\nu)$ . Para o caso geral da relação tensão-deformação para o elemento analisado tem-se a Equação 4.16 dada a seguir.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ & D_{22} & D_{23} \\ Sim & & D_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.16)$$

De forma análoga ao elemento triangular linear apresentado no capítulo 3 desse trabalho chega-se ao vetor de força interna (Equação 4.17) e à matriz de rigidez tangente para o elemento não linear (Equação 4.18).

$$\mathbf{f}_{int} = \iint_A \begin{bmatrix} N_x \Phi_{,x} + N_{xy} \Phi_{,y} \\ N_y \Phi_{,y} + N_{xy} \Phi_{,x} \end{bmatrix} dA \quad (4.17)$$

$$\mathbf{K} = t \iint_A \begin{bmatrix} \Phi_{,x} \left( \frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \Phi_{,y} \left( \frac{\partial N_{xy}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi_{,y} \left( \frac{\partial N_y}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \Phi_{,x} \left( \frac{\partial N_{xy}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \end{bmatrix} dA \quad (4.18)$$

Os esforços internos ( $N_x$ ,  $N_y$  e  $N_{xy}$ ) que aparecem no vetor de forças internas são definidos nas Equações 4.19 a 4.21. Como as deformações são constantes ao longo da espessura do elemento as tensões também serão exceto nos pontos de mudança de material. A taxa de armadura é transformada numa camada equivalente de aço como

descrito no parágrafo seguinte e contribui apenas nas deformações lineares na direção das barras.

$$N_x = t\sigma_x^c + \sum_{i=1}^{nx} \frac{A_{xi}}{S_{xi}} (\sigma_x^s - \sigma_x^c) \quad (4.19)$$

$$N_y = t\sigma_y^c + \sum_{i=1}^{ny} \frac{A_{yi}}{S_{yi}} (\sigma_y^s - \sigma_y^c) \quad (4.20)$$

$$N_{xy} = t\tau_{xy} \quad (4.21)$$

Na definição dos esforços internos devem ser consideradas as barras de reforço. Sendo a espessura equivalente de aço dada pela área da barra dividida pelo espaçamento entre as barras, nas Equações 4.19 e 4.20, é feito o somatório do número de camadas de barras na seção, levando em conta a área da barra ( $A_{yi}$ ) disposta na direção  $y$  e distribuída com um espaçamento ( $S_{yi}$ ) ao longo da direção  $x$ , conforme ilustrado na Figura 4.3. O mesmo vale para barras dispostas na direção  $x$ . Na Equação 4.19,  $\sigma_x^s$  e  $\sigma_x^c$  são, respectivamente, as tensões no aço e no concreto na direção  $x$ . Nos somatórios das Equações 4.19 e 4.20, as tensões são consideradas positivas ou negativas para acrescentar área de aço e retirar área de concreto (desconsiderar a contribuição do concreto). Como não é considerado efeito de flexão no elemento triangular para análise de estado plano de tensões as armaduras devem ser dispostas de forma simétrica em relação ao plano médio do elemento, ou seja,  $z_1 = z_2$  na Figura 4.3.

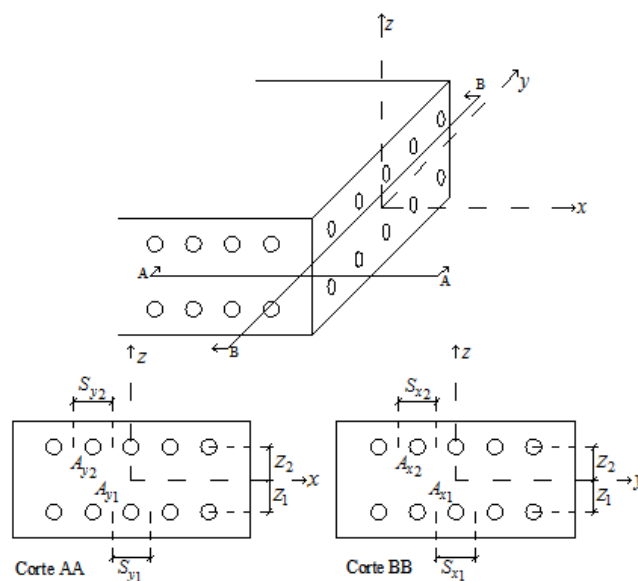


Figura 4.3 Área das barras de aço e largura de influência para duas camadas(Dias, 2016)

Na Equação 4.18, a derivada do esforço normal na direção  $x$  em relação aos deslocamentos nodais é dada por:

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} &= t \frac{\partial \sigma_x}{\partial \mathbf{q}} + \sum_{i=1}^{nx} \frac{A_{xi}}{S_{xi}} \left( \frac{\partial \sigma_x^s}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \sigma_x^c}{\partial \mathbf{q}} \right) \\ \frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} &= t \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_x} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_y} \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial \gamma_{xy}} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial \mathbf{q}} \right) + \sum_{i=1}^{nx} \frac{A_{xi}}{S_{xi}} (E_s - E_c) \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \mathbf{q}}\end{aligned}\quad (4.22)$$

Para facilitar a notação os produtos  $\frac{A_{xi}}{S_{xi}}(E_s - E_c)$  e  $\frac{A_{yi}}{S_{yi}}(E_s - E_c)$  serão substituídos, respectivamente, por  $\beta_{xi}$  e  $\beta_{yi}$  nas próximas expressões. Da Equação 4.16 tem-se  $\sigma_x = D_{11}\varepsilon_x + D_{12}\varepsilon_y + D_{13}\gamma_{xy}$ , logo, as derivadas em relação às deformações  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  e  $\gamma_{xy}$ , presentes na Equação 4.22, são dadas por  $D_{11}$ ,  $D_{12}$  e  $D_{13}$ , respectivamente. Para a segunda parcela da equação, são consideradas tensões apenas na direção longitudinal ao eixo da barra, ou seja, estado uniaxial de tensões, logo as derivadas serão dadas pelos módulos de elasticidade longitudinais obtidos pelas tangentes à curva tensão-deformação dos materiais. Já as derivadas das deformações em relação aos deslocamentos nodais são dadas pelas Equações 4.23 à 4.25.

$$\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial u_{,x}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \Phi_{,x} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}\quad (4.23)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial v_{,y}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \Phi_{,y} \end{bmatrix}\quad (4.24)$$

$$\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \Phi_{,y} \\ \Phi_{,x} \end{bmatrix}\quad (4.25)$$

Substituindo as Equações 4.24 e 4.25 na derivada dos deslocamentos nodais (Equação 4.22), tem-se:

$$\frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} = t \begin{bmatrix} \Phi_{,x} D_{11} + \Phi_{,y} D_{13} \\ \Phi_{,y} D_{12} + \Phi_{,x} D_{13} \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{nx} \beta_{xi} \begin{bmatrix} \Phi_{,x} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}\quad (4.26)$$

De forma análoga à descrita para tensão normal na direção  $x$ , pode-se chegar às Equações 4.27 e 4.28 para as derivadas em relação aos deslocamentos nodais das outras tensões atuantes no elemento.

$$\frac{\partial N_y}{\partial \mathbf{q}} = t \begin{bmatrix} \Phi_{,x} D_{12} + \Phi_{,y} D_{23} \\ \Phi_{,y} D_{22} + \Phi_{,x} D_{23} \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{nx} \beta_{yi} \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \Phi_{,y} \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \Phi_{,x} D_{13} + \Phi_{,y} D_{33} \\ \Phi_{,y} D_{23} + \Phi_{,x} D_{33} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

A seguir são determinadas as derivadas das funções de forma em relação aos eixos  $x$  e  $y$ .

$$\Phi_{,x} = \Phi_{,\xi} \xi_{,x} + \Phi_{,\eta} \eta_{,x} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \frac{y_2 - y_3}{2A} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \frac{y_3 - y_1}{2A} = \frac{1}{2A} \begin{Bmatrix} y_2 - y_3 \\ y_3 - y_1 \\ y_1 - y_2 \end{Bmatrix} \quad (4.29)$$

$$\Phi_{,y} = \Phi_{,\xi} \xi_{,y} + \Phi_{,\eta} \eta_{,y} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \frac{x_3 - x_2}{2A} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \frac{x_1 - x_3}{2A} = \frac{1}{2A} \begin{Bmatrix} x_3 - x_2 \\ x_1 - x_3 \\ x_2 - x_1 \end{Bmatrix} \quad (4.30)$$

Para mudança do domínio de integração  $dA = dx dy$  para  $d\xi d\eta$  utiliza-se a relação  $dA = \det \mathbf{J} d\xi d\eta$  onde  $\mathbf{J}$  é a matriz jacobiano da transformação das coordenadas  $x$  e  $y$  para as coordenadas paramétricas  $\xi$  e  $\eta$  dada pela equação seguir. Dessa forma,  $\det \mathbf{J} = 2A$ .

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

### 4.3 ESO-RC

Como dito anteriormente, a técnica ESO-RC desenvolvida neste trabalho é utilizada para otimizar a quantidade de armadura obtida através do MBT gerado pela análise elástico-linear via ESO. O ESO-RC adota o mesmo princípio do algoritmo ESO, entretanto, com uma aplicação diferente, qual seja: eliminação da armadura dos elementos que não atendam a um critério de eficiência. O processo de otimização topológica do ESO-RC conduz a uma distribuição de armadura ótima, a partir da qual é possível propor a configuração final procurada.

Dessa forma, já que para armadura é considerado estado uniaxial de tensão e sua capacidade resistente é definida por limites de deformação, optou-se no ESO-RC por identificar o nível de eficiência de cada elemento em termos de deformações, que no

caso são obtidas por análises não lineares via MEF. Então, elementos com baixo nível de deformação, terão sua armadura sistematicamente removida. A cada iteração novos elementos poderão ter aço retirado e o processo se repete até que seja atingido o critério de parada do algoritmo.

Inicialmente, portanto, é feita uma análise não linear da estrutura em estado plano de tensões, na qual é utilizado um método incremental com controle de deslocamento de um grau de liberdade de um determinado nó definido pelo usuário. Assim, é possível construir uma curva carga-deslocamento durante o processo, que é finalizado quando o fator que define a proporção do carregamento externo aplicado atingir 100%. Se para esse carregamento total aplicado o nível de deslocamento na estrutura é aceitável, pode-se dizer que a estrutura suporta o carregamento aplicado, caso contrário, não. O processo incremental também pode ser interrompido antes de se alcançar o carregamento total, o que ocorre quando se atinge o número máximo de passos fornecido pelo usuário ou quando há singularidade na matriz de rigidez. Esse último caso pode ocorrer quando se tem plastificação total de parte da estrutura.

Para os deslocamentos obtidos na última análise do processo incremental descrito no parágrafo anterior, isto é, quando 100% do carregamento externo é aplicado, são calculadas as deformações nos elementos nas direções em que podem existir armadura, ou seja, direções  $x$  e  $y$ . Essas deformações, como dito anteriormente, são utilizadas como tomada de decisão para verificar quais elementos terão suas armaduras retiradas na próxima iteração do método ESO-RC. Evidentemente, se essas deformações forem negativas ou muito pequenas, implica em uma possível retirada total dessas armaduras. Assim, a razão entre a deformação na direção  $x$  do elemento pela deformação máxima na direção  $x$  entre todos os elementos da malha tem que ser menor que a razão de rejeição,  $RR_i$ . O mesmo se aplica para deformação na direção  $y$ . Matematicamente, o critério de remoção da armadura pode ser escrito como:

$$\varepsilon_e < RR_i \cdot \varepsilon_{\max} \quad (4.32)$$

onde:

$\varepsilon_e$  = deformação no elemento analisado (na direção  $x$  ou  $y$ );

$RR_i$  = razão de rejeição na  $i$ -ésima iteração ( $0 < RR_i < 1,0$ );

$\varepsilon_{\max}$  = máxima deformação da iteração (na direção  $x$  ou  $y$ ).



Semelhante ao ESO, a razão rejeição é usada para retardar o processo de remoção da armadura, que ocorre até que não possa mais ser removido aço do elemento para um dado valor de  $RR_i$ . O processo evolucionário é redefinido adicionando-se à  $RR_i$  uma razão de evolução,  $ER$ . A razão de rejeição é atualizada de acordo com a Equação 4.33.

$$RR_{i+1} = RR_i + ER \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (4.33)$$

No algoritmo ESO-RC os elementos podem ser de 4 tipos:

- Tipo 1: elementos com armadura nas direções  $x$  e  $y$ ;
- Tipo 2 : elementos com armadura apenas na direção  $x$ ;
- Tipo 3 : elementos com armadura apenas na direção  $y$ ;
- Tipo 4: elementos de concreto apenas.

Durante o processo evolucionário, dependendo da relação entre a deformação nas direções  $x$  e  $y$  e da deformação máxima nas direções  $x$  e  $y$ , os elementos do Tipo 1 podem ser alterados para o Tipo 2 ou 3 ou 4, os elementos do Tipo 2 por sua vez podem se tornar do Tipo 4 e elementos do Tipo 3 podem se tornar do Tipo 4. Assim, a cada iteração do ESO-RC uma quantidade de elementos dos tipos 1, 2 ou 3 podem ser alterada. Essa quantidade depende do parâmetro de entrada ‘ $VS$ ’, que limita o volume de armadura retirada por iteração e também da taxa de rejeição  $RR_i$ .

No contexto do ESO-RC elemento de interior é aquele elemento com armadura e que esteja conectado por meio de suas arestas a elementos que também têm armadura. Já elemento de contorno é o elemento com armadura e que pelo menos uma de suas arestas não esteja conectada a outro elemento ou que esteja conectada a um elemento sem armadura nas duas direções. Assim como no ESO, nesse algoritmo pode-se optar por retirar armadura de elementos de contorno ou de interior ou de ambos. O usuário controla essa retirada de elementos através da variável de entrada ‘ $VC$ ’ que define a razão do volume inicial de armadura a partir do qual o algoritmo passa a retirar aço apenas dos elementos de contorno. Em outras palavras: enquanto a relação entre o volume retirado de armadura e o volume total inicial de armadura for menor que ‘ $VC$ ’, o aço pode ser retirado tanto de elementos de contorno quanto de interior, caso contrário, apenas de contorno. Por exemplo, para  $VC=0,6$  indica que após a retirada de 60% do volume de armadura, o algoritmo passa a retirar aço exclusivamente dos elementos de contorno. O objetivo desse controle foi evitar ao final do processo o surgimento de

regiões muito fragmentadas de área de aço, o que dificultaria a definição final prática para disposição final das armaduras.

Resumidamente, o algoritmo ESO-RC pode ser dividido na seguinte sequência de passos, representada esquematicamente pelo fluxograma da Figura 4.4.

1º Passo: discretização do domínio e aplicação das condições de contorno e ações prescritas. No domínio discretizado são identificados os diferentes tipos de elementos (Tipo 1, 2, 3, e 4). Para isso pode ser utilizado uma configuração inicial da distribuição de aço definida a partir da resposta obtida da análise linear do algoritmo ESO.

2º Passo: análise não linear da estrutura via MEF. É utilizado um método incremental com controle de deslocamento até se ter 100% do carregamento externo aplicado.

3º Passo: Se obteve sucesso no 2º Passo são calculadas as deformações nas direções  $x$  e  $y$  para cada elemento. Caso contrário, o algoritmo é encerrado definindo a última configuração de aço como sendo a configuração ótima.

4º Passo: Retirar a armadura dos elementos que satisfaçam a Inequação 4.32 (direção  $x$ ,  $y$  ou ambas), dentro de um limite pré-definido de volume ( $VS$ ) e para a razão de rejeição ( $RR_i$ ) para aquela iteração;

5º Passo: Voltar ao 2º passo até que não se possa retirar a armadura de mais nenhum elemento para a razão de rejeição considerada;

6º Passo: Atualizar a razão de rejeição conforme a Equação 4.33 e iniciar nova retirada de aço dos elementos.

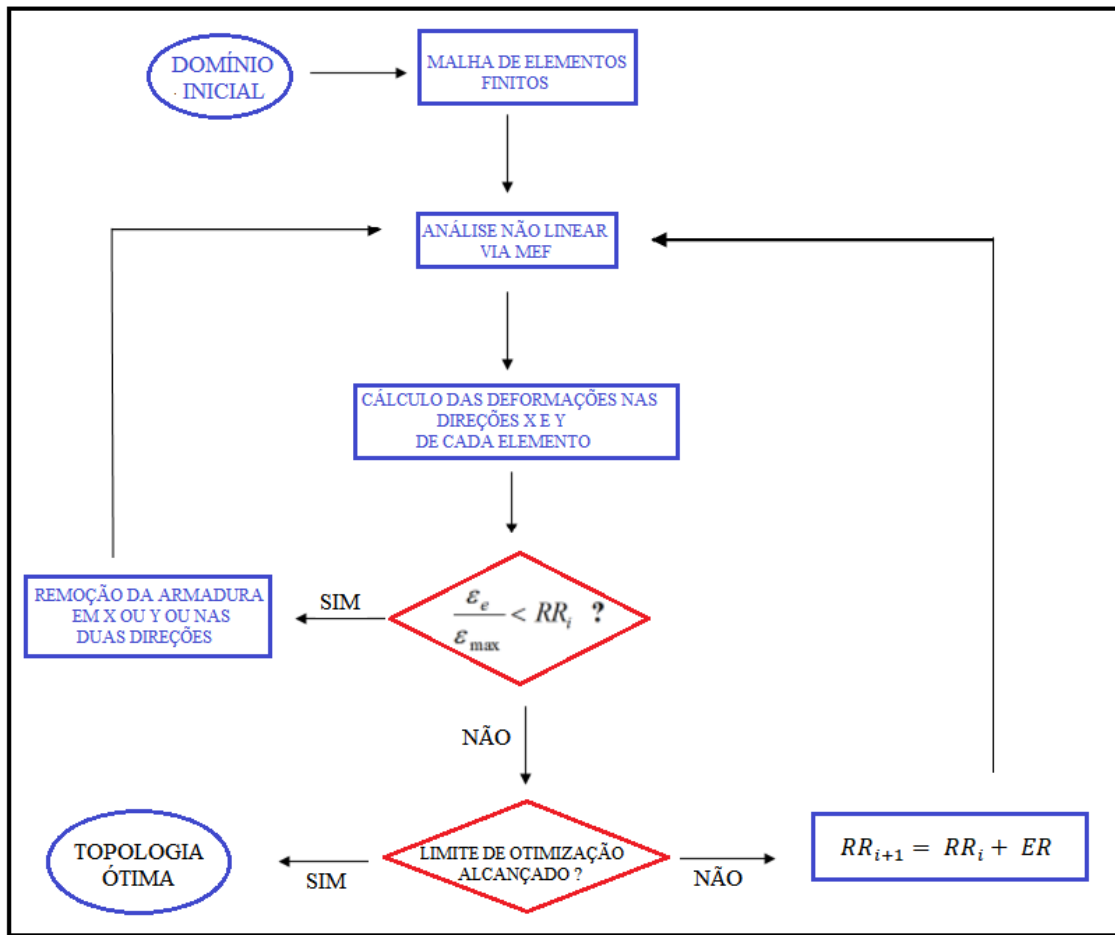


Figura 4.4 Fluxograma ESO-RC

Durante o 4º passo do algoritmo descrito acima é construída a lista de elementos com ordem prioritária de retirada das armaduras. Essa ordem é definida pela ordem crescente da razão entre a deformação no elemento pela deformação máxima na estrutura plana (direções  $x$  e  $y$ ). Com exceção para os valores negativos dessas razões, onde a ordem é invertida. Ou seja, a lista de elementos é composta primeiro pelos valores negativos das razões  $\epsilon_e / \epsilon_{max}$  em ordem decrescente, e posteriormente pelos valores positivos dessas razões em ordem crescente.

Considerando que as estruturas analisadas estão sempre submetidas a carregamentos que geram tensões de tração e compressão, então  $\epsilon_{max}$  (maior deformação linear na direção  $x$  ou  $y$  da estrutura plana) é positiva. Dessa forma, o critério de prioridade definido no parágrafo anterior implica na retirada primeiro das armaduras comprimidas com deformações muito pequenas, depois nas barras comprimidas de maior deformações, e por último nas barras tracionadas de menores deformações.

## 4.4 Exemplos Numéricos

Neste item são apresentadas algumas aplicações considerando o método ESO-RC implementado neste trabalho. São feitas análises não lineares e o dimensionamento de estruturas submetidas a estado plano de tensões.

Para cada exemplo são definidas as propriedades mecânicas do material e o domínio inicial de projeto. Além disso, são especificados os seguintes parâmetros: *RR* (razão de rejeição), *ER* (razão de evolução), *VS* (volume máximo de armadura que pode ser retirado por iteração), *VC* (razão do volume inicial de armadura a partir do qual o algoritmo passa a retirar aço apenas dos elementos no contorno), número da iteração e malha de elementos finitos adotada.

### 4.4.1 Viga parede biapoiada com uma abertura

O primeiro exemplo de aplicação é um elemento estrutural extraído de Schläich *et al.* (1987). Esse exemplo também é estudado em Almeida *et al.* (2013a).

Trata-se de uma viga parede biapoiada com um furo, de 400mm de espessura, submetida a uma carga concentrada de 3000kN, cuja geometria (em milímetros) e condições de contorno estão apresentados na Figura 4.5.

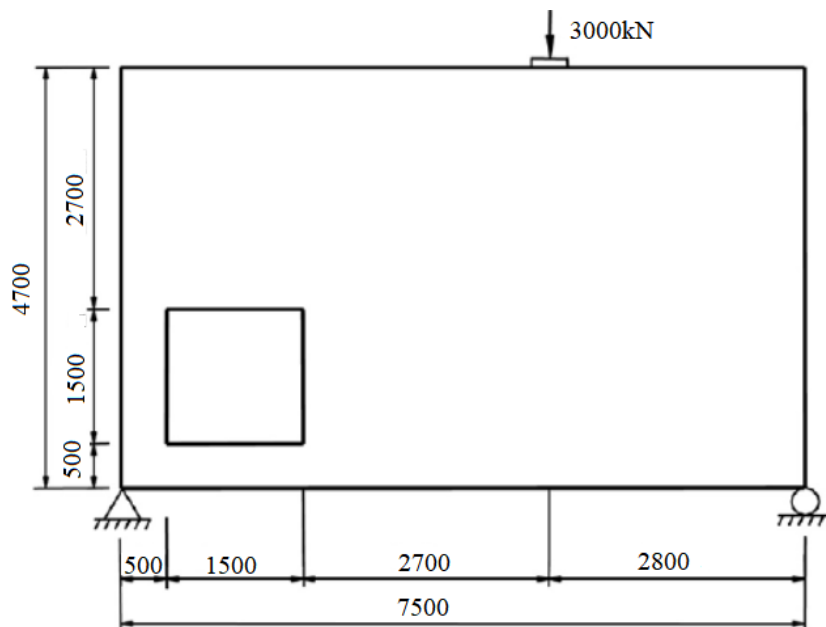


Figura 4.5 Viga biapoiada com abertura (Adaptado de Schläich *et al.*, 1987)

Primeiramente é feita uma análise linear considerando módulo de elasticidade  $E_{cs} = 20820 \text{ MPa}$  e coeficiente de Poisson  $\nu = 0,15$ . Nas Figuras 4.6 e 4.7 são apresentadas as tensões principais na viga parede.

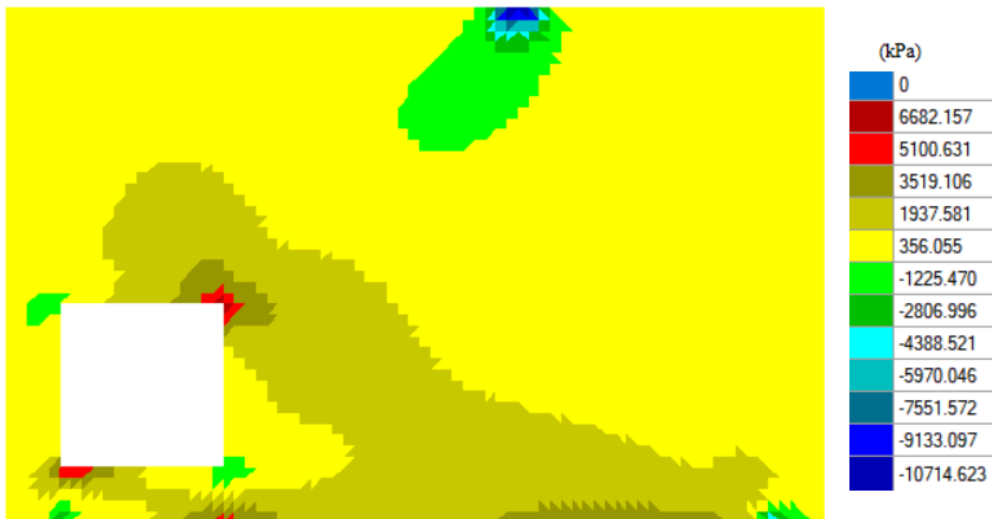


Figura 4.6 Tensão principal máxima para análise linear

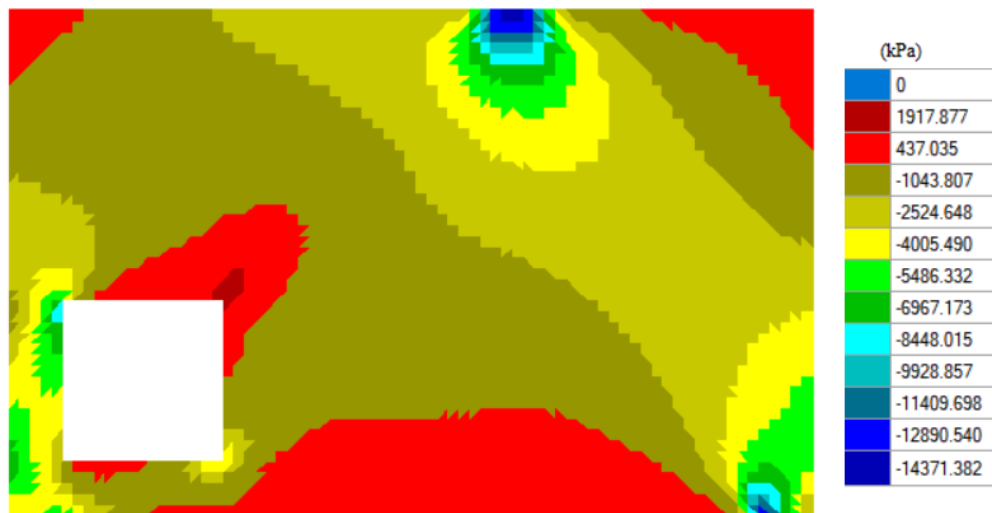


Figura 4.7 Tensão principal mínima para análise linear

É possível observar da Figura 4.6 que as tensões máximas de tração (maior tensão principal) concentram-se na parte inferior da viga parede e também no contorno do furo. Nessas regiões a tensão de tração é superior à resistência de tração do concreto havendo a necessidade de armadura para ajudar o concreto.

Já na Figura 4.7, observa-se que as tensões máximas de compressão (menor tensão principal) atingem valores próximos ao da resistência à compressão do concreto somente no ponto de aplicação da carga. Quase toda a viga apresenta tensões de

compressão abaixo de 4,0 MPa, valor esse bem inferior ao limite de resistência à compressão do concreto.

De uma forma geral, o nível de tensões principais observados pela análise linear é baixo indicando que a viga está com folga em termos de espessura e que precisaria de pouca armadura em lugares específicos.

Para obter o modelo de bielas e tirantes aplicando o algoritmo baseado no método ESO descrito no capítulo precedente, a viga foi discretizada em uma malha refinada de 6600 elementos triangulares. Além disso, os parâmetros adotados para se chegar à topologia ótima foram: razão de rejeição ( $RR$ ) igual a 1% e uma razão de evolução ( $ER$ ) de 1%. O volume final desejado igual a 48% do volume inicial e taxa de retirada de material por iteração ( $VI$ ) igual a 1,75%. Nesse exemplo,  $it=0$ ,  $RR_c=0$  e  $ER_c = 0$ . A estrutura evoluiu para a configuração mostrada na Figura 4.8a. As regiões em vermelho e azul indicam, respectivamente, regiões de tração, tirantes, e regiões de compressão, bielas. A Figura 4.8b apresenta o modelo de bielas e tirantes proposto por Almeida *et al.* (2013a) e a Figura 4.8c o respectivo esquema e distribuição das armaduras.

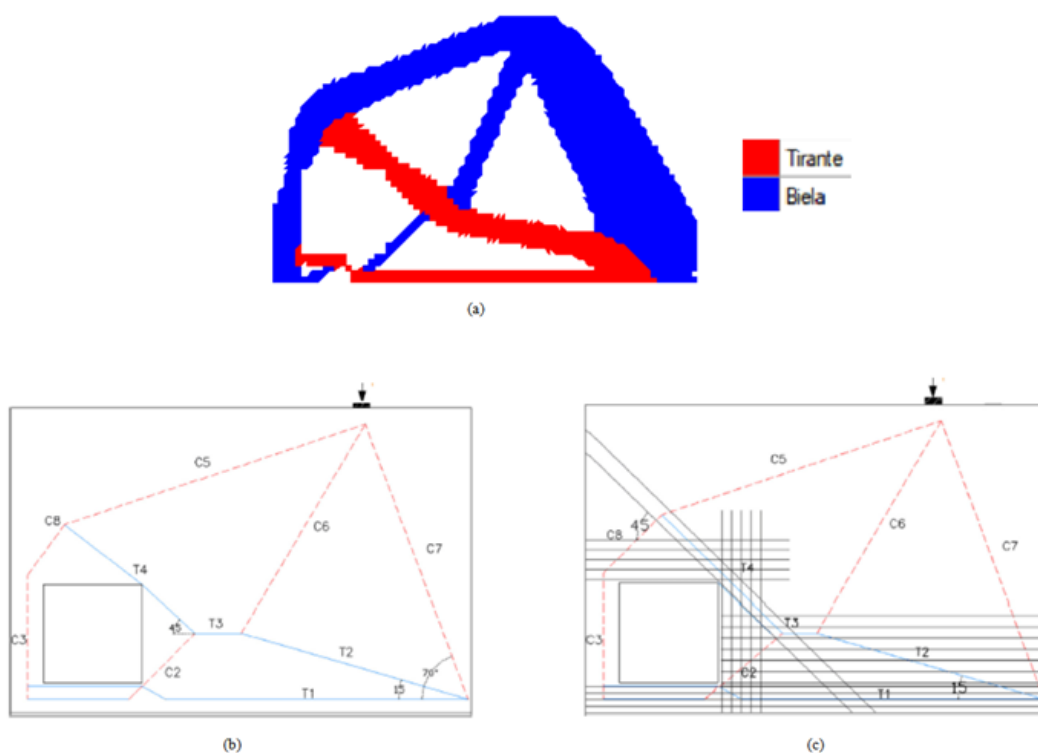


Figura 4.8 (a) Topologia ótima obtida no presente trabalho (Iteração 155,  $RR=10,0\%$ ,  $VR=51,3\%$ ) (b) Modelo de bielas e tirantes sugerido por Almeida *et al.* (2013a) (c) Distribuição de armadura proposta por Almeida *et al.* (2013a)

O esforço em cada tirante (ou biela) pode ser calculado multiplicando-se a tensão média de cada membro pela correspondente área da seção transversal, a qual é dada pelo produto da espessura da viga pela altura média do membro. Desse modo, é possível calcular as áreas de aço necessárias nas regiões dos tirantes e avaliar a resistência do concreto em cada biela.

Neste exemplo, para aplicação do algoritmo ESO-RC implementado neste trabalho, será adotada uma taxa de armadura baseada no dimensionamento dos tirantes apresentado por Almeida *et al.* (2013a), qual seja:

Tabela 4.1 Dimensionamento da armadura dos tirantes (Almeida *et al.*, 2013a)

Tirante	Esforço (MN)	$A_{s,nec}$ (cm <sup>2</sup> )	Esforço no tirante (MN)	Área de aço (cm <sup>2</sup> )	Nº de barras
T1	1,50	34,60	1,50	$A_{s1} = 34,60$	2 x 5 $\phi$ 20
T2	2,24	51,53	0,966 . T2	$A_{s2} = 49,75$	2 x 7 $\phi$ 20
T4 <sub>aux</sub>			0,01	$A_{s4}$	2 x 2 $\phi$ 20
T4	2,20	50,70	0,707 . T4	$A_{s3} = 35,85$	2 x 5 $\phi$ 20
			0,707 . T4	$A_{s3} = 35,85$	2 x 5 $\phi$ 20

A Tabela 4.1 apresenta a média dos esforços obtidos em cada tirante da Figura 4.8c. Os tirantes T2 e T4 são inclinados de 15<sup>0</sup> e 45<sup>0</sup>, respectivamente, em relação à horizontal. Assim, as barras longitudinais,  $A_{s2}$ , que representam o tirante T2 são calculadas a partir da componente horizontal do esforço. O tirante T4 é representado pela malha ortogonal,  $A_{s3}$ , que se estende pelas arestas superior e à direita da cavidade. Os autores sugerem, ainda, um reforço adicional,  $A_{s4}$ , inclinado de 45<sup>0</sup>.

Na Figura 4.9 é mostrada a discretização da viga parede em uma malha estruturada de elementos triangulares de três nós e 100mm para as dimensões dos seus catetos. Os retângulos coloridos na figura definem os elementos que foram considerados com armadura. A quantidade de barras de aço foi transformada em uma espessura equivalente de aço em toda área do elemento. Por exemplo, o retângulo vermelho inferior corresponde à configuração do tirante T1. De acordo com a Tabela 4.1, esse tirante é formado por 5 barras de 20mm e é distribuído ao longo da altura de 500mm entre o lado inferior da viga e o furo, em ambas as faces laterais da viga parede. Assim, a espessura equivalente é calculada da seguinte forma:  $2 \times 5 \times \pi \times 2^2 / 4 = 31,41 \text{ cm}^2$

distribuídos em 500mm junto a cada face, logo,  $31,41/50 = 0,628\text{cm}^2/\text{cm}$  ou  $0,00628\text{m}^2/\text{m}$ . Ou seja, as 10 barras de 20mm são substituídas por uma chapa de aço de espessura de 0,628cm, altura de 50cm e comprimento igual ao comprimento das barras.

A distribuição de aço apresentada na Figura 4.9 é, portanto, equivalente às armaduras distribuídas horizontal e verticalmente da Figura 4.8c, com exceção da armadura inclinada que não consta, já que o elemento triangular para análise não linear física de concreto armado implementado nesse trabalho considera apenas armadura nas direções  $x$  e  $y$  global da estrutura plana.

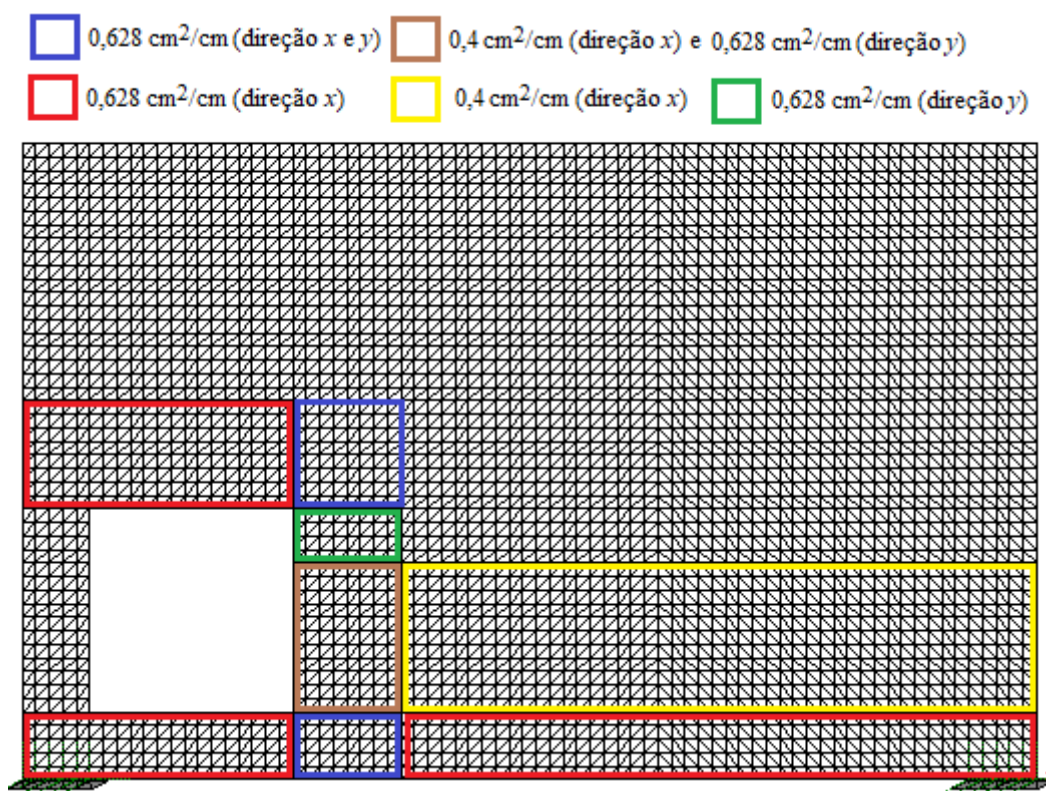


Figura 4.9 Discretização da viga parede em elementos triangulares de concreto simples e armado

O gráfico da Figura 4.10 mostra a curva carga-deslocamento da viga parede para distribuição de armadura da Figura 4.9 considerando análise não linear. Para o concreto foi admitida resistência à compressão de 19MPa. Já para a armadura foi considerado aço CA50, com tensão limite de escoamento de 434MPa e  $E_s = 210\text{GPa}$ . Observa-se dessa curva que a viga parede da Figura 4.9 suporta um carregamento bem maior do que o carregamento de 3000kN utilizado por Almeida *et al.* (2013a) para definir sua taxa de aço.



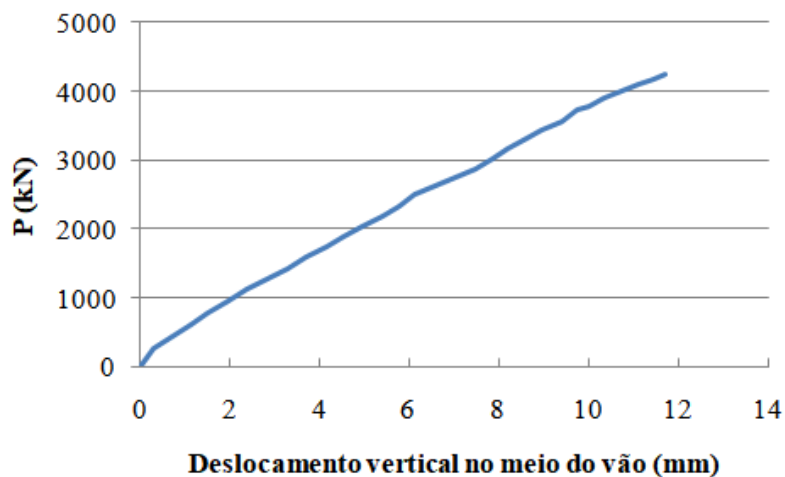


Figura 4.10 Curva carga-deslocamento da viga parede para configuração de aço da Figura 4.9

As Figuras 4.11 e 4.12, apresentam os campos de tensões principais máximas e mínimas, respectivamente, gerados pela análise não linear da viga parede. Esses campos de tensões foram impressos para o último passo do processo incremental que gerou a curva carga-deslocamento mostrada na Figura 4.10. Ou seja, para uma carga  $P$  concentrada de 4300kN.

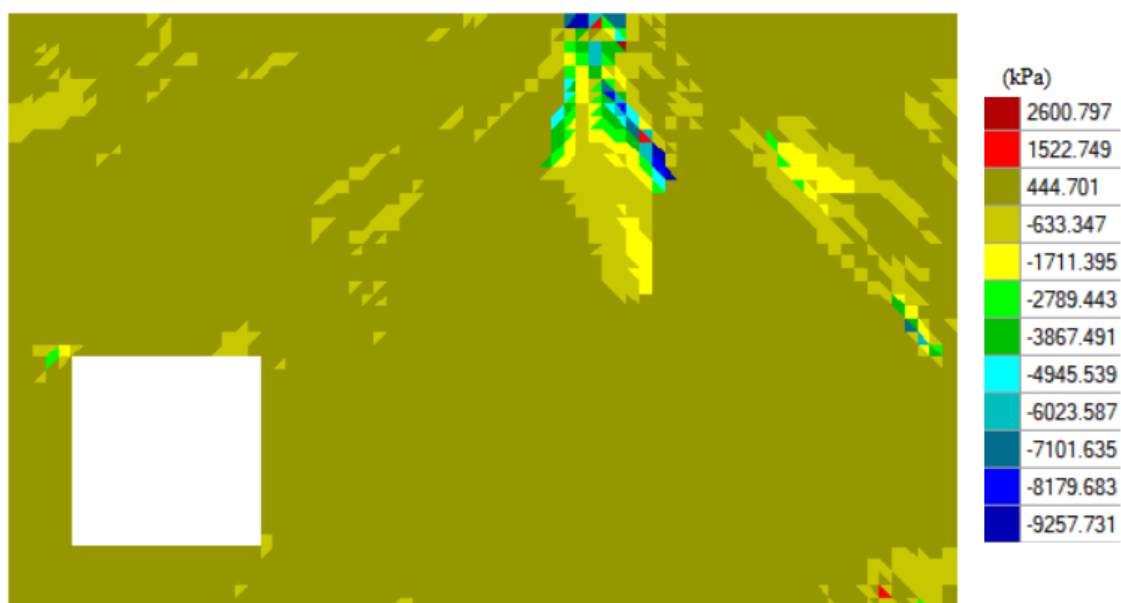


Figura 4.11 Tensões principais máximas no concreto da viga parede considerando análise não linear

Como pode ser observado nas Figura 4.11 e 4.12, a análise não linear gera tensões principais de tração na maior parte da viga parede. Além disso, é possível perceber que regiões no contorno do furo e a parte inferior da viga parede estão sob estado duplo de tensões principais de tração, indicando regiões problemáticas para o concreto. O canto superior esquerdo da viga parede também está submetido a estado duplo de tensões principais de tração, no entanto, essa região não faz parte das regiões de bielas e tirantes da viga parede mostrada na Figura 4.8a. Ou seja, não são tão necessárias no caminho da carga até os apoios. Também é possível constatar que o concreto está com certa folga, já que em nenhum ponto tem-se tensão normal de compressão maior ou igual à resistência do concreto à compressão.

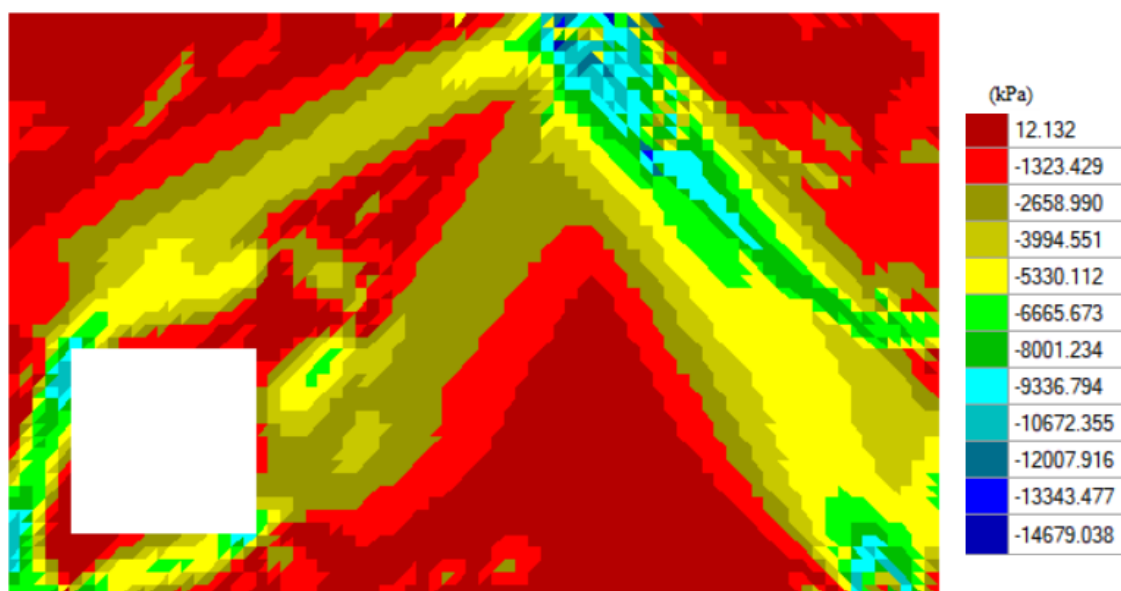


Figura 4.12 Tensões principais mínimas no concreto da viga parede considerando análise não linear

Nas Figuras 4.13 e Figura 4.14 são mostradas as tensões nas armaduras na direção  $x$  e  $y$ , respectivamente. Observa-se nas duas figuras que, para uma força atuante de 4300kN, a armadura trabalha com certa folga nas duas direções apesar de já apresentar em alguns pontos tensão próxima à tensão de escoamento do aço.

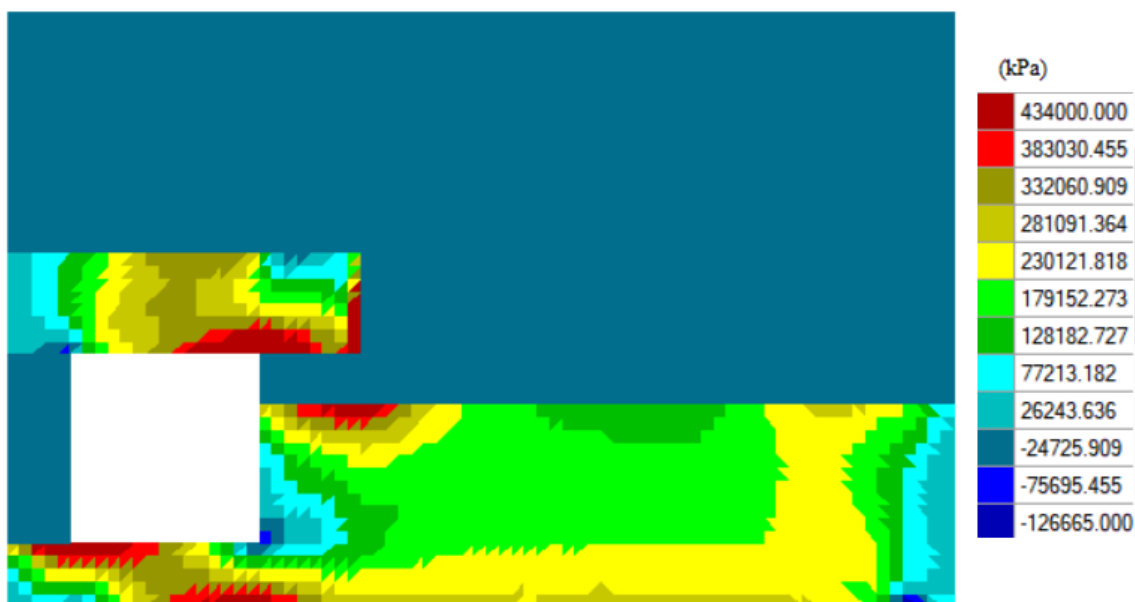


Figura 4.13 Tensões nas armaduras horizontais para configuração de aço da Figura 4.9

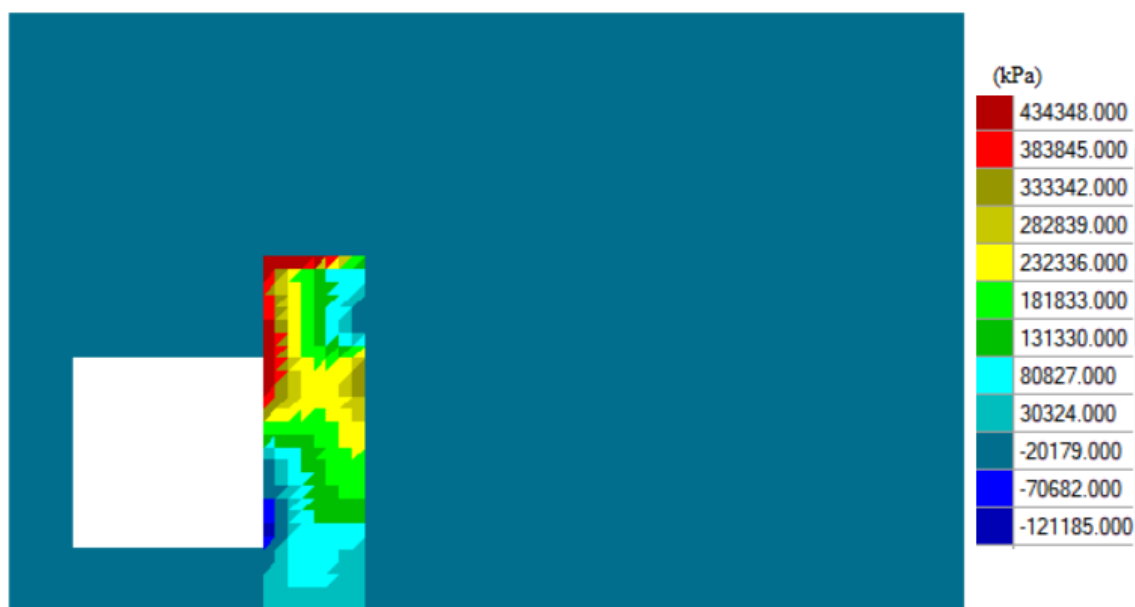


Figura 4.14 Tensões nas armaduras verticais para configuração de aço da Figura 4.9

Uma análise é feita na viga parede desse exemplo utilizando o código ESO-RC de otimização da armadura implementado nesse trabalho. Os parâmetros adotados foram os seguintes: a razão de rejeição,  $RR$  teve início com 1,5% e sua taxa de evolução,  $ER$ , de 1,5%, o volume limite de retirada de armadura por iteração,  $VS$ , de 2% e  $VC= 70\%$ . A partir de uma configuração inicial para armadura que apresenta curva carga-deslocamento que ultrapasse o esforço solicitante para um nível de deslocamento aceitável, o algoritmo vai eliminando as armaduras nas direções  $x$  e  $y$  dos elementos

menos solicitados. Essa verificação é feita através das deformações nas direções das armaduras no elemento.

Foi considerada inicialmente que todos os elementos triangulares da viga parede apresentassem uma taxa de armadura de  $0,628\text{cm}^2/\text{cm}$  para as duas direções (horizontal e vertical). Na Figura 4.15 é apresentada a configuração da armadura após a retirada de 66% da armadura inicial, nessa figura Mat1 representa elementos triangulares de concreto armado com taxas de armadura de  $0,628\text{cm}^2/\text{cm}$  nas duas direções, Mat2 representa elementos triangulares de concreto armado com taxa de armadura de  $0,628\text{cm}^2/\text{cm}$  na direção x, Mat3 representa elementos triangulares de concreto armado com taxa de armadura de  $0,628\text{cm}^2/\text{cm}$  na direção y, e Mat4 representa elementos triangulares de concreto simples.

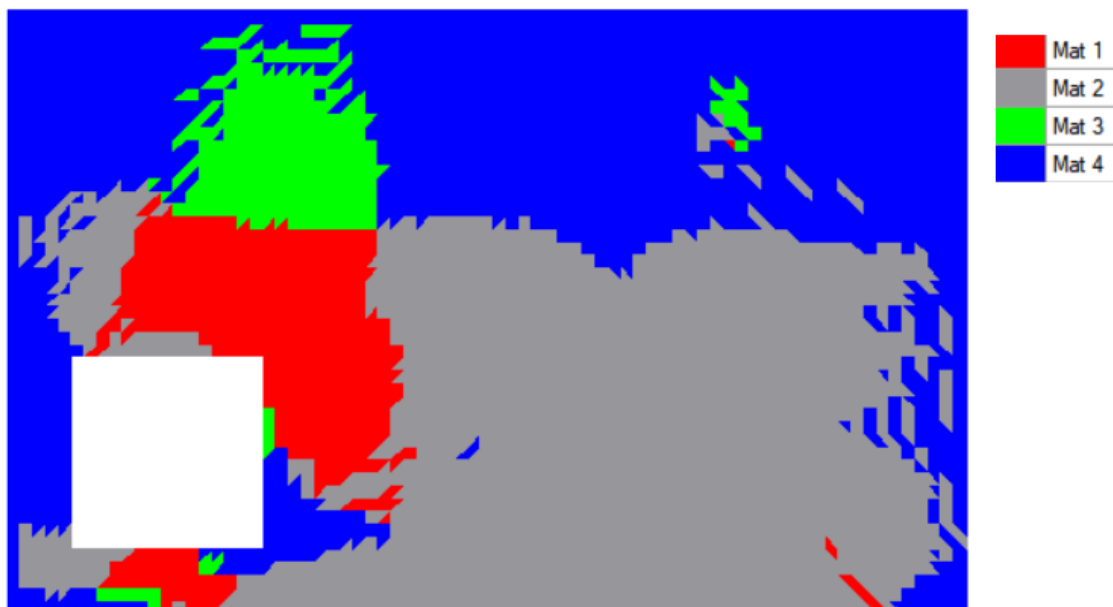


Figura 4.15 Distribuição das armaduras após a retirada de 66% da armadura inicial

Na Figura 4.16 é apresentada a configuração final obtida pelo algoritmo. Essa configuração representa uma redução de 93,5% da armadura inicial considerada.

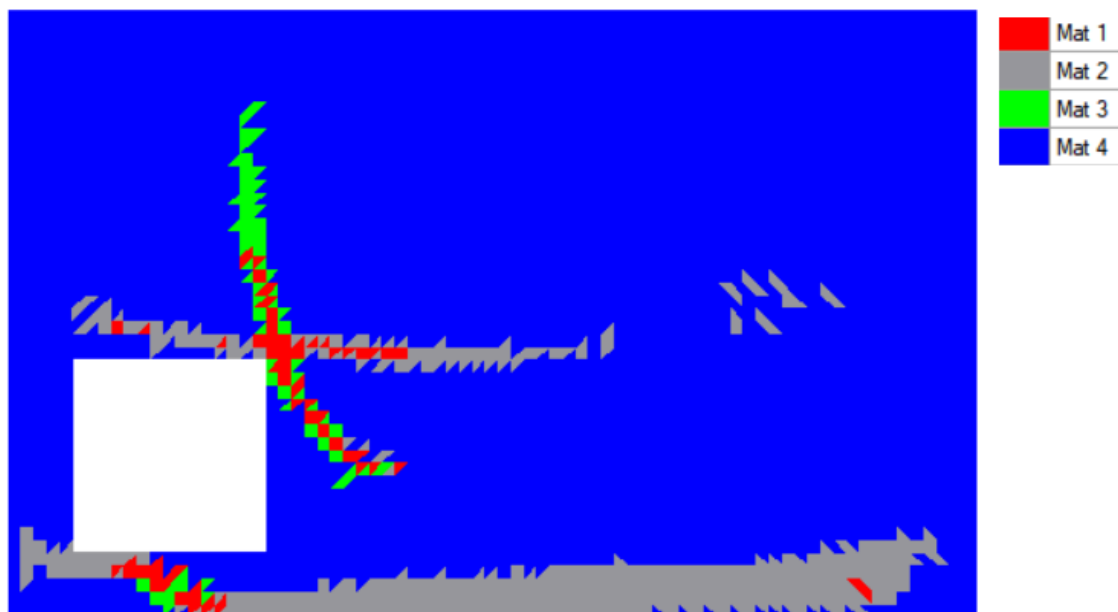


Figura 4.16 Distribuição final das armaduras após retirada de 93,5% da armadura inicial

Na Figura 4.17 são apresentadas curvas carga-deslocamentos para diferentes níveis de retirada de armadura durante o processo de otimização. Constata-se que as curvas obtidas para uma configuração com 90% e 50% do total da armadura atingem a carga de 3000kN para uma flecha no meio do vão da viga parede de 4,2mm e 4,6mm, respectivamente; enquanto que para 6,5% do total da armadura o deslocamento foi de 9,1mm.

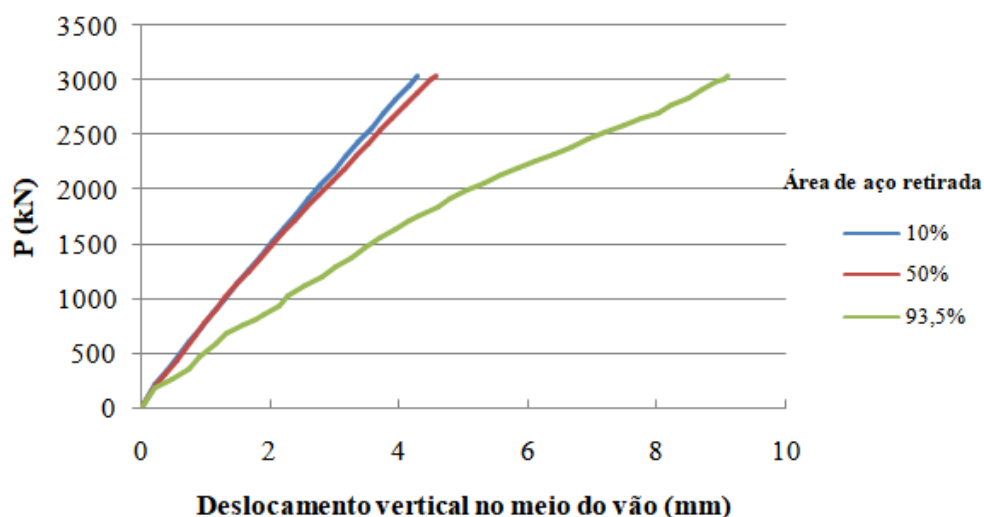


Figura 4.17 Curvas carga-deslocamento obtidas durante o processo de otimização da armadura

A partir da resposta obtida pelo algoritmo ESO-RC implementado nesse trabalho (Figura 4.16) definiu-se a distribuição de armadura mostrada na Figura 4.18. De maneira análoga ao que foi feito na Figura 4.9, a quantidade de barras de aço foi transformada em uma espessura equivalente de aço em toda área do elemento. Por exemplo, duas barra de 20mm espaçada a cada 100mm fornecem uma espessura equivalente de  $0,628\text{cm}^2/\text{cm}$ . Assim, nessa figura Mat1, Mat2 e Mat3 representam, respectivamente, um material de concreto armado com  $0,628\text{cm}^2/\text{cm}$  na direção  $x$  e  $y$ ,  $0,628\text{cm}^2/\text{cm}$  na direção  $x$  e  $0,628\text{cm}^2/\text{cm}$  na direção  $y$ . Já Mat4 representa um material de concreto simples. A discretização da malha de elementos finitos adotada é a mesma mostrada na Figura 4.9.

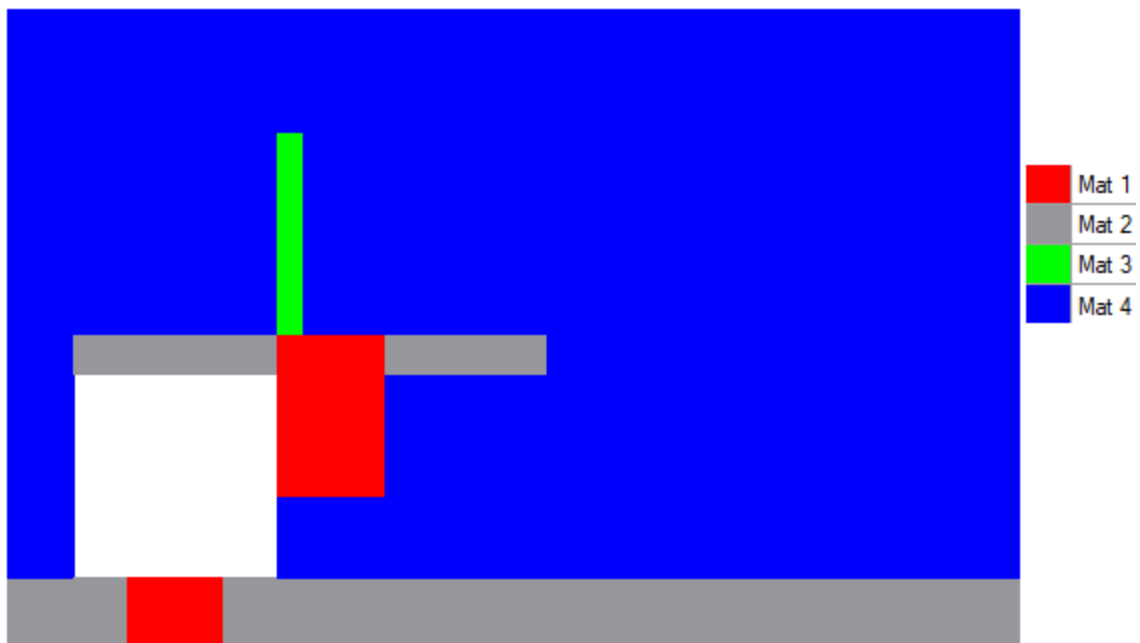


Figura 4.18 Discretização da viga parede em elementos triangulares de concreto simples e armado

Na Figura 4.19 é mostrada a curva carga-deslocamento para a configuração da armadura mostrada na Figura 4.18. Observa-se que a configuração analisada apresenta nível de deslocamento aceitável (8,9mm) para a carga de 3000kN (carregamento analisado) sendo que o processo incremental avançou até o limite de 12,3mm de flecha no meio do vão da viga parede para uma carga de 3800kN.

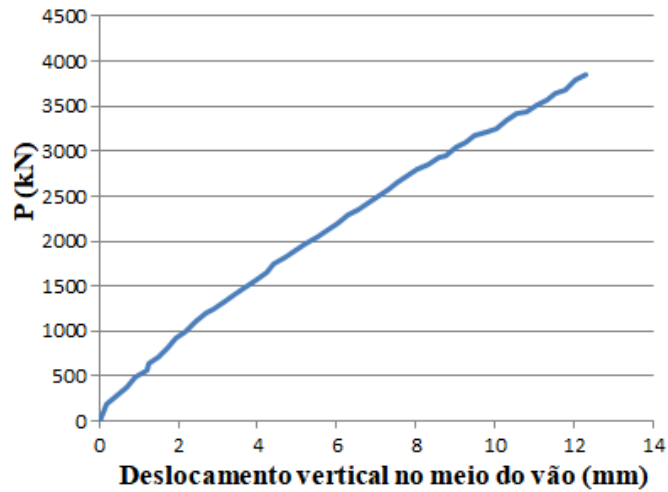


Figura 4.19 Curva carga-deslocamento da viga parede para configuração de aço da Figura 4.18

Na Figura 4.20 e na Figura 4.21 são apresentadas as tensões nas armaduras horizontais e verticais da configuração mostrada na Figura 4.18 para carga de 3800kN.

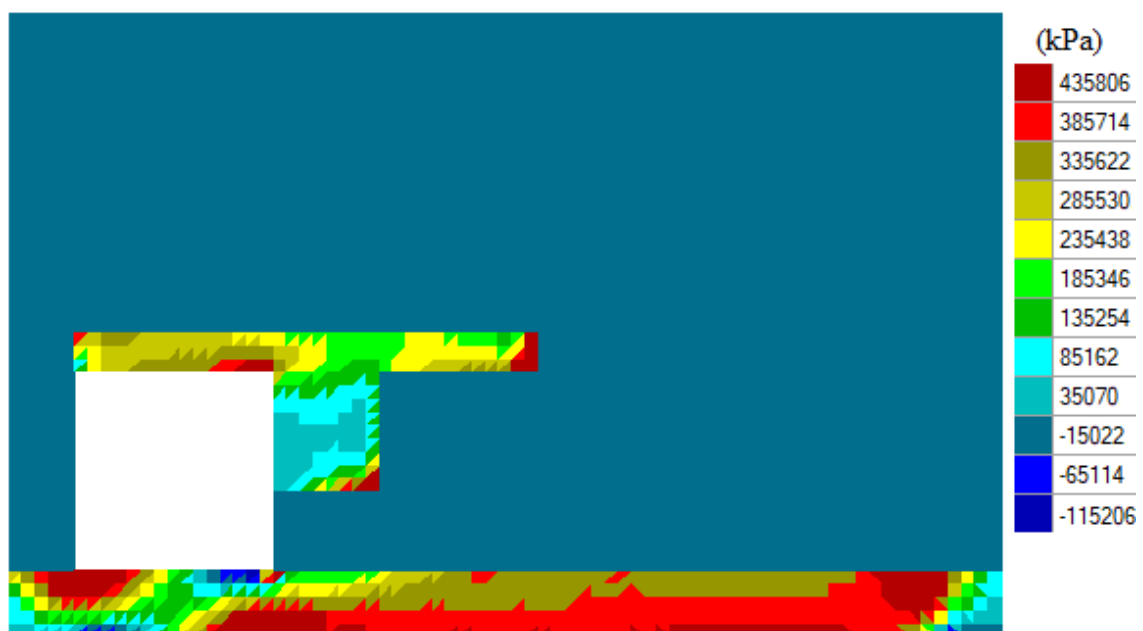


Figura 4.20 Tensões nas armaduras horizontais para configuração de aço da Figura 4.18

Observa-se um nível de tensões nas armaduras bem maior que o apresentado para a configuração da Figura 4.9, mostrando um melhor aproveitamento dessa armadura.

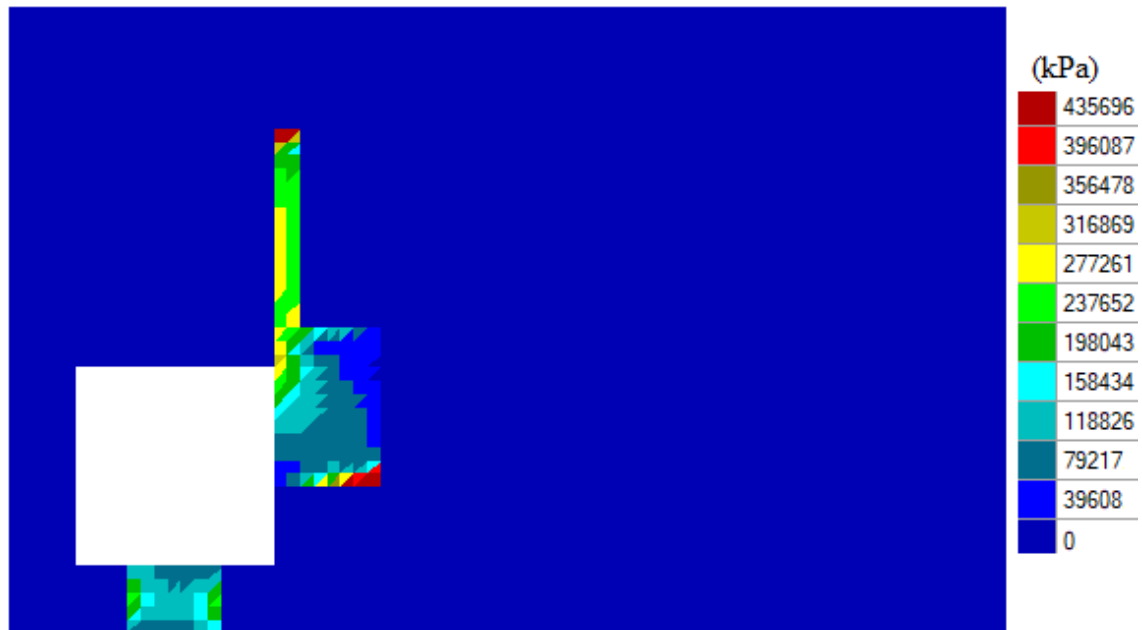


Figura 4.21 Tensões nas armaduras verticais para configuração de aço da Figura 4.18

Portanto, comparando-se as curvas carga-deslocamento e as tensões nas armaduras para configuração de aço antes e após a aplicação do algoritmo ESO-RC, é possível notar que o resultado obtido pelo ESO-RC apresenta um menor consumo de aço sem que houvesse um aumento exagerado na flecha do nó analisado para o carregamento de 3000kN. Isso foi possível já que se aumenta a quantidade de armadura trabalhando mais próxima do seu limite de escoamento.

#### 4.4.2 Pilar de Ponte

Este exemplo foi proposto por Liang *et al.* (2002b) e estudado também por Almeida *et al.* (2013b). Trata-se de um pilar de ponte projetado para suportar quatro cargas concentradas de 2750kN transferidas por quatro vigas de aço-concreto. O pilar tem espessura de 1,5m e é admitido como sendo engastado na fundação. A geometria, condições de contorno e ações do problema estão indicados na Figura 4.22, com dimensões em milímetros e kN.



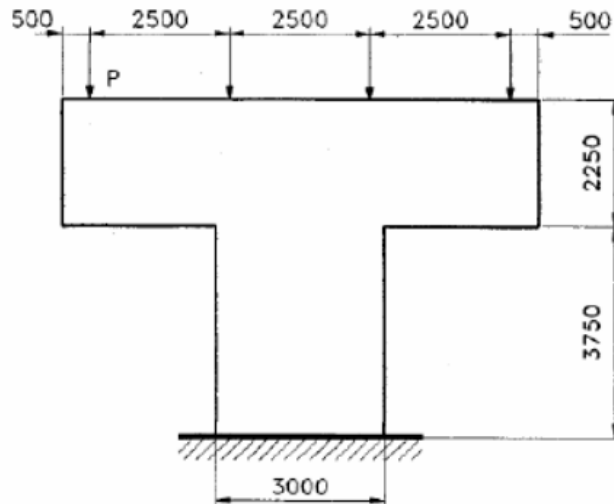


Figura 4.22 Domínio de projeto do pilar de ponte (Liang *et al.*, 2002b)

Num primeiro momento é feita uma análise linear para obter o modelo de bielas e tirantes. Para tanto, será utilizado o algoritmo ESO conforme descrito no Capítulo 3.

O domínio foi discretizado numa malha refinada com 12260 elementos finitos triangulares. As propriedades do material isotrópico utilizado são módulo de elasticidade  $E = 28,6\text{GPa}$  e coeficiente de Poisson  $\nu = 0,15$ .

O processo evolucionário teve início com uma razão de rejeição ( $RR$ ) igual a 4% e uma razão de evolução ( $ER$ ) de 2%. O volume final desejado igual a 48% do volume inicial e taxa de retirada de material por iteração ( $VI$ ) igual a 1,75%. Nesse exemplo,  $it=0$ ,  $RR_c=0$  e  $ER_c = 0$ . A Figura 4.23 apresenta o MBT alcançado. As regiões em vermelho e azul indicam, respectivamente, regiões de tração, tirantes, e regiões de compressão, bielas.

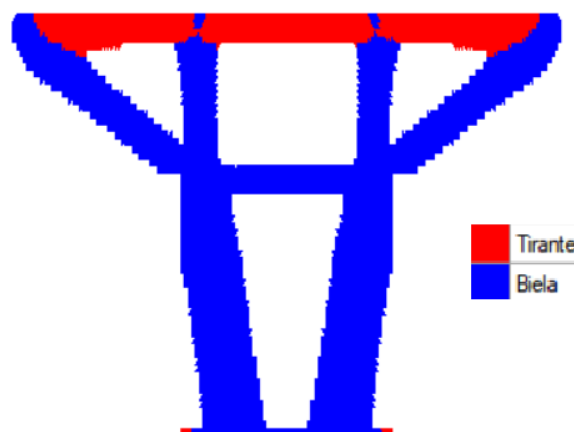


Figura 4.23 Modelo de bielas e tirantes obtido. Iteração 164,  $RR=18\%$ ,  $VR=52\%$

Na Figura 4.24a e b são apresentadas as tensões principais máximas e mínimas, respectivamente, no MBT da viga analisada considerando comportamento linear do material. Também na Figura 4.24a está assinalada a região retangular utilizada para definir as dimensões e força média de tração no tirante T1.

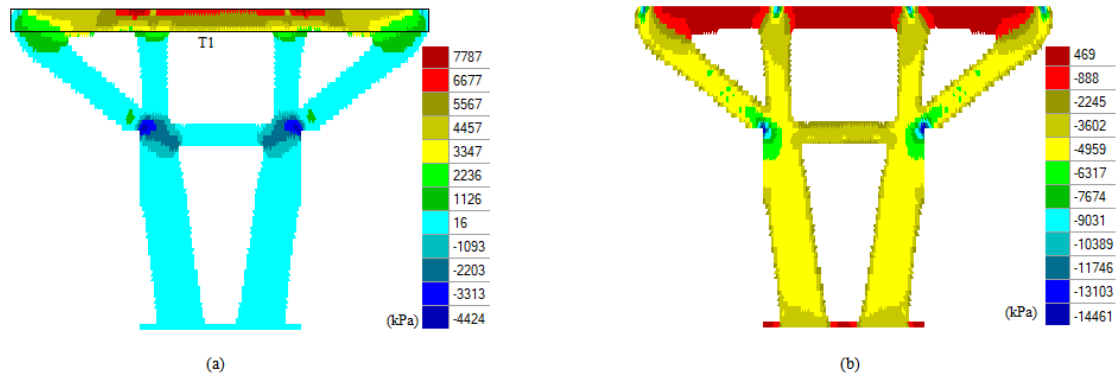


Figura 4.24 (a) Máximas tensões principais no modelo de bielas e tirantes e definição das barras tracionadas (tirante T1) (b) Mínimas tensões principais no modelo de bielas e tirantes

Na Tabela 4.2 são apresentadas as áreas da seção transversal, as tensões médias de tração e as forças axiais no tirante mostrado na Figura 4.24a. É indicada também a área das barras de aço CA50 obtidas considerando que estejam trabalhando sob tensão menor ou igual à tensão de escoamento de cálculo.

Tabela 4.2 Dimensionamento da armadura dos tirantes

Tirante	Área seção transversal (m <sup>2</sup> )	Tensão média de tração (kPa)	Força axial (kN)	Área de aço CA50 (cm <sup>2</sup> )
T1	0,5865	5500	3226	74,2

Na Figura 4.25 é apresentada a curva carga-deslocamento do nó A (ponto inferior da aba esquerda do pilar) para distribuição de armadura apenas na direção  $x$  dentro da região do tirante T1 mostrado na Figura 4.24a. Para obter essa taxa de armadura longitudinal, a área de aço calculada na Tabela 4.2 foi transformada em uma espessura equivalente de aço em toda área do tirante T1 do pilar. Ou seja, 74,2 cm<sup>2</sup> distribuídos ao longo da altura de 39,1 cm do tirante T1 resulta em 1,898cm<sup>2</sup>/cm. Na análise não linear usando o método incremental descrito na Seção 4.2 foi considerado aço CA50 ( $f_{yd}=434\text{MPa}$  e  $E_s=210\text{GPa}$ ) e concreto com  $f_{ck}=26\text{MPa}$ .

Observa-se do gráfico da Figura 4.25 que o pilar apresenta um deslocamento aceitável (8,1mm) para o carregamento de 2750kN aplicado. O método incremental prosseguiu até a carga de 3600kN para uma flecha de 14 mm.

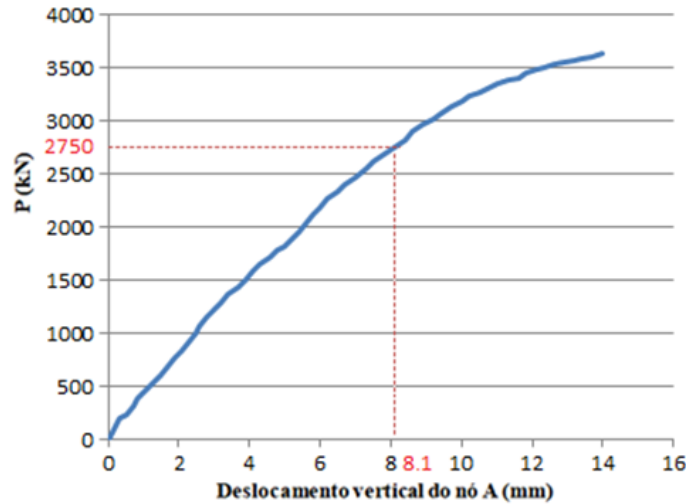


Figura 4.25 Curva carga-deslocamento do pilar no ponto A

Na Figura 4.26 é apresentada a tensão na armadura do tirante T1 para o carregamento de 2750 kN. Observa-se que para esse nível de carregamento boa parte da armadura encontra-se com tensões bem abaixo da tensão de escoamento do aço, indicando que possa ser feita uma redução da área de aço obtida pela análise linear.

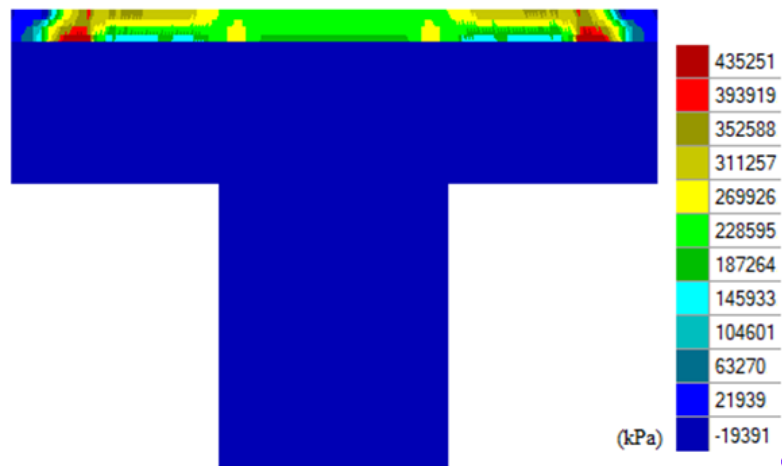


Figura 4.26 Tensões na armadura para P=2750kN

Na Figura 4.27 é proposta a configuração inicial da distribuição da armadura definida a partir do modelo biela tirante obtido da análise linear. Para a taxa de armadura longitudinal, foi utilizado o valor  $1,898\text{cm}^2/\text{cm}$ , como definido anteriormente.

Para armadura transversal foi considerado um terço da taxa longitudinal. Assim, na Figura 4.27 Mat1 representa um material de concreto armado com  $0,01898\text{m}^2/\text{m}$  na direção  $x$  e  $0,00632\text{m}^2/\text{m}$  na direção  $y$ . Mat2 apresenta armadura na direção  $x$  ( $0,01898\text{m}^2/\text{m}$ ) e Mat3 na direção  $y$  ( $0,00632\text{m}^2/\text{m}$ ). Já Mat4 representa os elementos apenas de concreto, cujo  $f_{ck}=26\text{MPa}$ .



Figura 4.27 Configuração inicial para o pilar de ponte e identificação do nó A

A partir da Figura 4.27 e aplicando o algoritmo ESO-RC com  $RR = 2\%$ ,  $ER = 2\%$ ,  $VS = 2\%$ ,  $VC = 60\%$  é possível definir uma nova configuração eliminando a armadura menos solicitada. A distribuição final foi obtida após a retirada de 87% da armadura e está indicada na Figura 4.28b. Na Figura 4.28a é mostrada a configuração obtida após a retirada de 60% da armadura.

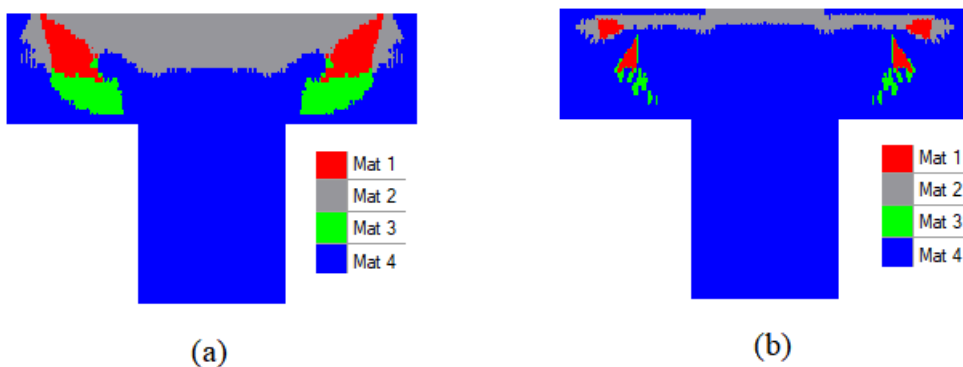


Figura 4.28 Configuração obtida após aplicação do algoritmo de otimização da armadura ESO-RC (a) 60% da armadura retirada (b) 87% da armadura retirada

Com base no resultado gerado pelo ESO-RC é possível propor a configuração final mostrada na Figura 4.29, onde Mat1, Mat2, Mat3, Mat4 são os mesmos materiais descritos para Figura 4.27. Nessa configuração existe um consumo de aço de  $51974\text{cm}^3$ . Esse valor é obtido multiplicando a taxa de armadura na direção  $x$  ( $1,898\text{cm}^2/\text{cm}$ ) pela altura da camada de aço na direção  $x$  ( $29,3\text{cm}$ ) e pelo comprimento das barras na direção  $x$  ( $8,5\text{m}$ ), somado ao valor obtido multiplicando a taxa de armadura na direção  $y$  ( $0,632\text{cm}^2/\text{cm}$ ) pela largura da camada de aço na direção  $y$  ( $45\text{cm}$ ) e pelo comprimento das barras na direção  $y$  ( $1,66\text{m}$ ). Esse consumo é razoavelmente menor que o consumo de  $63070\text{cm}^3$  ( $72,4\text{cm}^2$  vezes  $8,5\text{m}$ ) obtido conforme dimensionamento utilizando os resultados da análise linear do MBT.

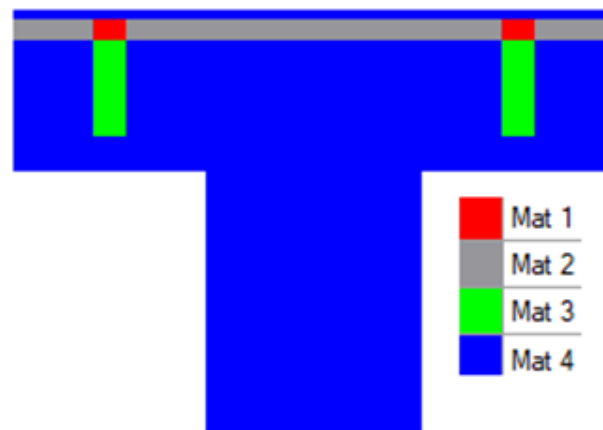


Figura 4.29 Configuração da armadura adotada para análise não linear

Na Figura 4.30 são mostradas as curvas carga-deslocamento obtidas da análise não linear do pilar durante a análise do algoritmo de retirada das armaduras, considerando curvas para 20%, 74% e 87% da armadura retirada.

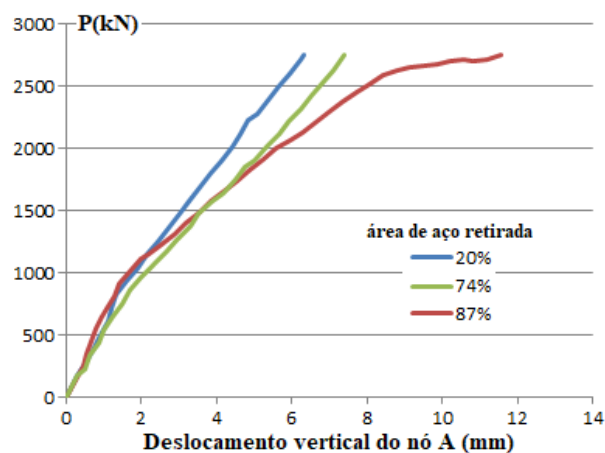


Figura 4.30 Curvas carga-deslocamento para diferentes níveis de retirada de armadura

Na Figura 4.31 é mostrada a curva carga-deslocamento obtida na análise não linear do pilar com a configuração apresentada na Figura 4.29. Observa-se na figura que o pilar apresenta um deslocamento vertical do nó A de 10,8mm para o carregamento de 2750kN.

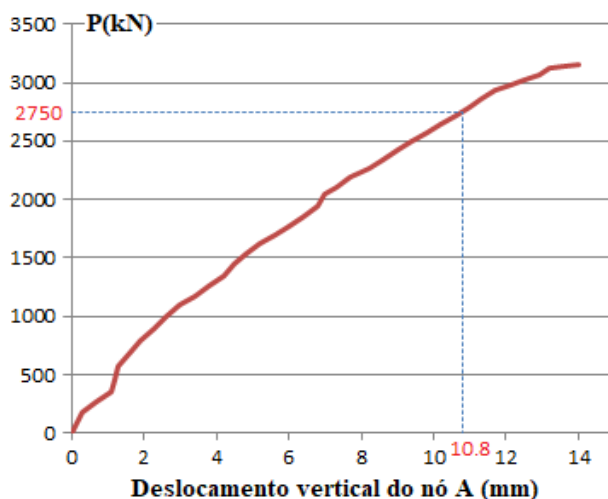


Figura 4.31 Curva carga-deslocamento para configuração da armadura mostrada na Figura 4.29

A Figura 4.32 apresenta análise de tensões principais mínimas (máxima tensão de compressão) no concreto para a configuração da armadura mostrada na Figura 4.29 após análise não linear. Essa figura foi construída a partir do campo de tensão obtido para o passo do método incremental referente ao carregamento de 2750kN. Observa-se nesta figura que as tensões máximas de compressão no concreto se encontram bem abaixo da tensão limite ( $0,85f_{cd}$ ), exceto nos pontos de aplicação dos carregamentos concentrados e nas interseções das bielas comprimidas.

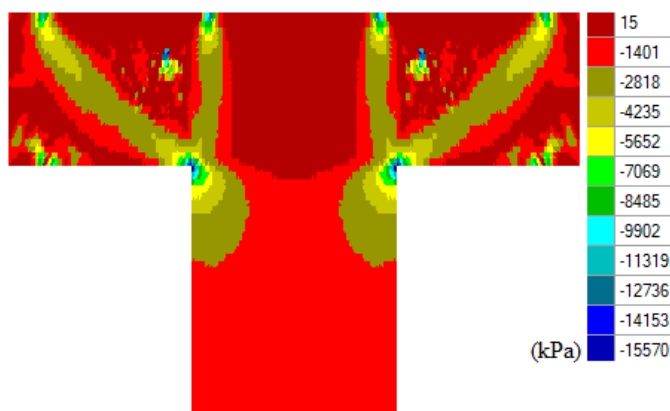


Figura 4.32 Tensão principal mínima para análise não linear da configuração da Figura 4.29

A Figura 4.33 é análoga à Figura 4.32 considerando agora a análise de tensões nas armaduras horizontal e vertical para a configuração mostrada na Figura 4.29 após análise não linear. Observa-se nesta figura que as tensões na armadura são bem maiores que aquelas obtidas para configuração definida a partir do modelo biela tirante. Isso é um indicativo que armadura está otimizada para a configuração obtida pelo ESO-RC, o que foi provado pelo cálculo da quantidade de aço apresentado anteriormente nesse item.

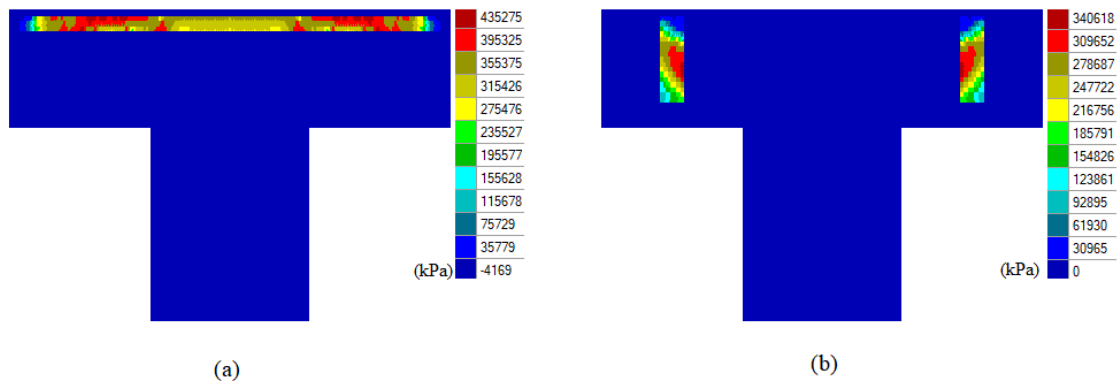


Figura 4.33 (a) Tensão na armadura horizontal para análise não linear da configuração da Figura 4.29 (b) Tensão na armadura vertical para análise não linear da configuração da Figura 4.29

Comparando-se o dimensionamento considerando análise linear e não linear é possível afirmar que a análise não linear conduziu a um menor consumo de aço. Isso foi possível devido ao melhor aproveitamento das armaduras, isto é, essas passaram a trabalhar com níveis mais elevados de tensão.

#### 4.4.3 Viga Contínua

Nesse exemplo é estudada uma viga contínua com três apoios, carregada na metade de seus vãos por cargas concentradas de 600kN, conforme indicado na Figura 4.34. A viga é de concreto armado ( $f_{ck} = 25\text{MPa}$ ) tem seção transversal retangular 15x70cm. É utilizado aço CA50 para as armaduras longitudinal e transversal a serem determinadas. Devido à simetria, somente o vão da esquerda da viga é analisado.

Inicialmente é apresentado o dimensionamento considerando o algoritmo ESO-RC implementado neste trabalho e o resultado será comparado com o dimensionamento seguindo as prescrições da NBR 6118 (2014).

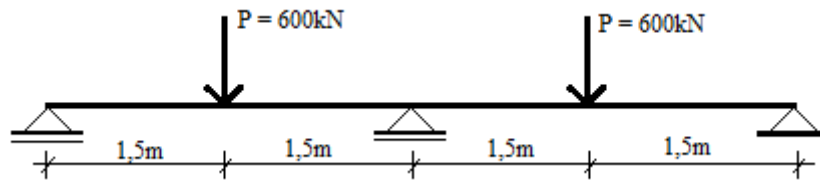


Figura 4.34 Viga Contínua

Na Figura 4.35 é apresentado o MBT obtido usando o algoritmo ESO descrito nesse trabalho. As propriedades do material isotrópico utilizado são módulo de elasticidade  $E = 30,0\text{GPa}$  e coeficiente de Poisson  $\nu = 0,20$ . O domínio foi discretizado numa malha refinada de 9600 elementos triangulares. Para obter a topologia ótima, foram adotados os seguintes parâmetros: razão de rejeição ( $RR$ ) igual a 1% e uma razão de evolução ( $ER$ ) de 1%, o volume final desejado igual a 40% do volume inicial e taxa de retirada de material por iteração ( $VI$ ) igual a 1%.

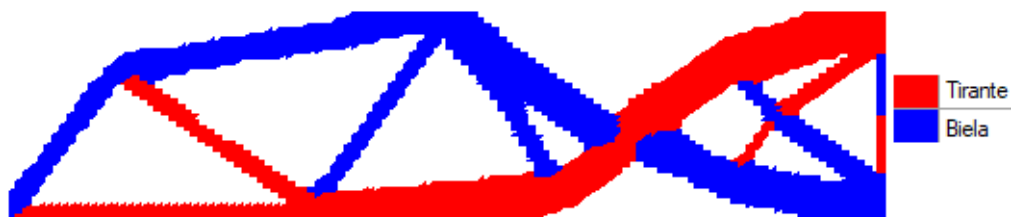


Figura 4.35 Modelo de bielas e tirantes obtido via ESO

Na Figura 4.36 são apresentadas as máximas tensões principais no modelo de biela e tirante da viga analisada considerando comportamento linear do material.

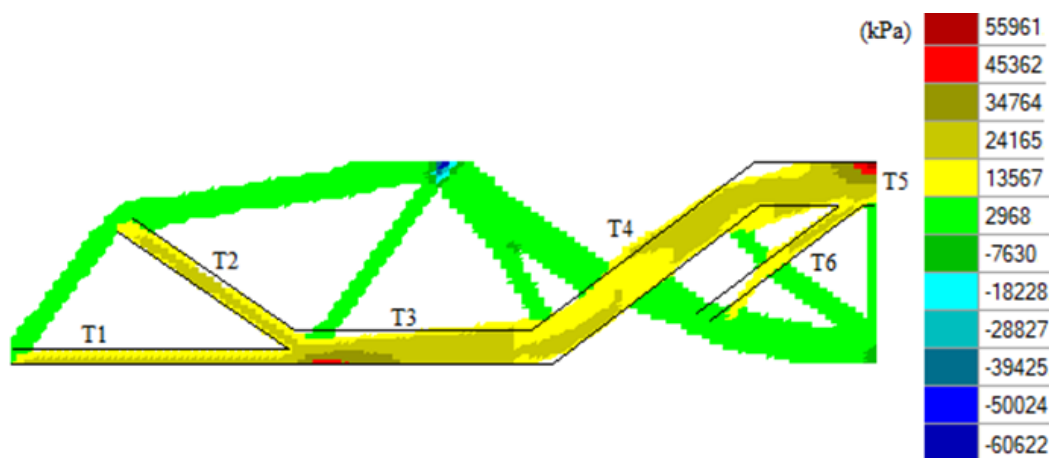


Figura 4.36 Máximas tensões principais no modelo de bielas e tirantes obtido e identificação dos tirantes T1 a T6



Na Figura 4.37 são apresentadas as mínimas tensões principais no MBT da viga analisada considerando comportamento linear do material. Observa-se nesta figura que as áreas em amarelo, ou cores abaixo de amarelo na escala de cores, apresentam tensões de compressão acima da tensão limite considerada para o material (25MPa). No entanto, como a viga tem seção cheia provavelmente essa configuração para o modelo de biela e tirante seja confiável para a determinação das áreas de aço para os tirantes. Isso só será evidenciado após a análise não linear considerando alma cheia e armadura calculada e posicionada conforme os tirantes do MBT.

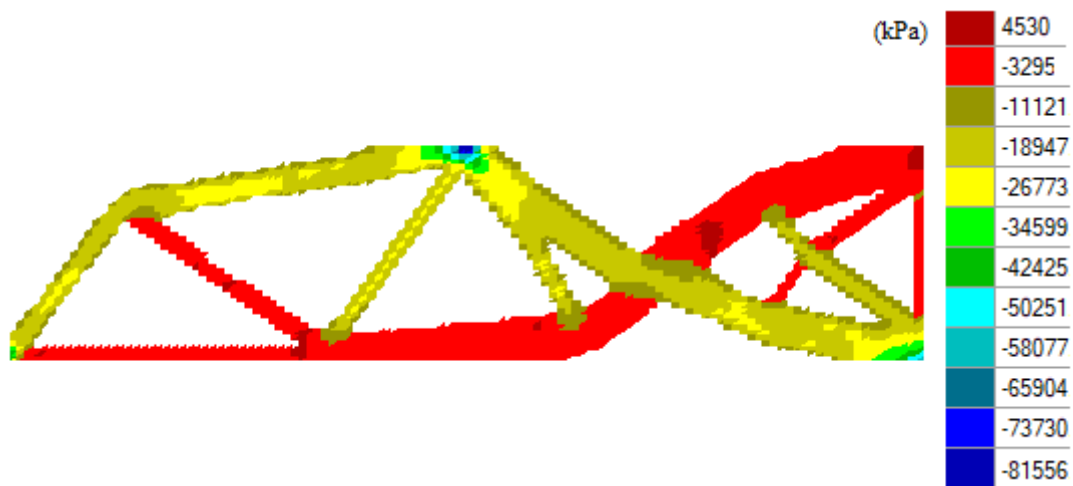


Figura 4.37 Mínimas tensões principais no modelo de bielas e tirantes obtido

A Tabela 4.3 apresenta as áreas da seção transversal, as tensões médias de tração e as forças axiais nos tirantes da Figura 4.37. É indicada também a área das barras de aço CA50 obtidas considerando que estejam trabalhando sob tensão menor ou igual à tensão de escoamento de cálculo ( $f_{yd} = 434$  MPa).

Tabela 4.3 Dimensionamento da armadura dos tirantes

Tirante	Área seção transversal (cm <sup>2</sup> )	Tensão média de tração (kPa)	Força axial (kN)	Área de aço CA50 (cm <sup>2</sup> )
T1	78,7	16000	126	2,9
T2	91,5	19000	174	4,0
T3	183,7	24000	441	10,1
T4	172,0	18000	310	7,1
T5	210,0	30000	630	14,5
T6	45,7	14000	64	1,5

Na Figura 4.38 é mostrada a configuração inicial da distribuição da armadura definida a partir do MBT obtido da análise não linear. À exemplo do que foi feito no exemplo precedente, a área de aço calculada na Tabela 4.3 foi transformada em uma espessura equivalente de aço em toda área do elemento. Por exemplo, para o tirante T5 tem-se, da análise linear,  $14,5\text{cm}^2$  de aço. Dividindo-se esse valor pela altura de T5 (14cm), chega-se à taxa de  $0,01036\text{m}^2/\text{m}$ . A partir desse valor adotaram-se duas barras de 16mm espaçadas de 3,6cm (diâmetro da barra mais 2cm), o que fornece:  $(2 \times \pi \times 1,6^2 / 4) / 3,6 = 1,116\text{cm}^2/\text{cm} = 0,01116\text{m}^2/\text{m}$ . Para armadura transversal adotou-se duas barras de 16mm espaçadas de 12cm (estribos com dois ramos verticais). Assim, na Figura 4.38, Mat1 representa um material de concreto armado com  $0,01116\text{m}^2/\text{m}$  na direção  $x$  e  $0,00335\text{m}^2/\text{m}$  na direção  $y$ . Mat2 apresenta armadura na direção  $x$  ( $0,01116\text{m}^2/\text{m}$ ) e Mat3 na direção  $y$  ( $0,00335\text{m}^2/\text{m}$ ). Já Mat4 representa os elementos apenas de concreto.



Figura 4.38 Distribuição inicial de armadura para viga contínua

Aplicando o modelo implementado para avaliação não linear da configuração inicial mostrada na Figura 4.38 e definindo uma nova configuração eliminando a armadura menos solicitada de acordo com o algoritmo ESO-RC apresentado nesse trabalho, chega-se à configuração final mostrada na Figura 4.39. Os parâmetros de entrada foram: razão de rejeição ( $RR$ ) de 1,5%, taxa de evolução ( $ER$ ) de 1,5%, volume máximo de retirada de aço por iteração ( $VS$ ) de 2% e volume a partir do qual a retirada de armadura ocorre apenas nos elementos de contorno ( $VC$ ) de 45%.



Figura 4.39 Configuração obtida via ESORC após retirada de 69% da armadura

Com base no resultado do ESO-RC é definida uma configuração final regular para armadura, conforme indicado na Figura 4.40, na qual os tirantes T1 correspondem à armadura transversal (12 estribos), T2 corresponde à armadura longitudinal de tração para o momento fletor positivo e T3 representa a armadura longitudinal de tração para o momento fletor negativo. As áreas de aço CA50 dos tirantes T1, T2 e T3 são respectivamente:  $2,9\text{cm}^2$ ,  $7,8\text{cm}^2$  e  $13,6\text{cm}^2$ .

Na Figura 4.40 também está indicado como foi calculada a área de aço para o tirante T1 e a correspondente taxa de armadura, que foi obtida dividindo-se a área pela espessura dos tirantes (2,5cm). Os demais tirantes seguem raciocínio inteiramente análogo. Assim, na Figura 4.40 Mat1 representa um material de concreto armado com  $0,01114\text{m}^2/\text{m}$  na direção  $x$  e  $0,0116\text{m}^2/\text{m}$  na direção  $y$ . Mat2 apresenta armadura apenas na direção  $x$  ( $0,01114\text{m}^2/\text{m}$ ) e Mat3 na direção  $y$  ( $0,0116\text{m}^2/\text{m}$ ). Já Mat4 representa os elementos apenas de concreto.

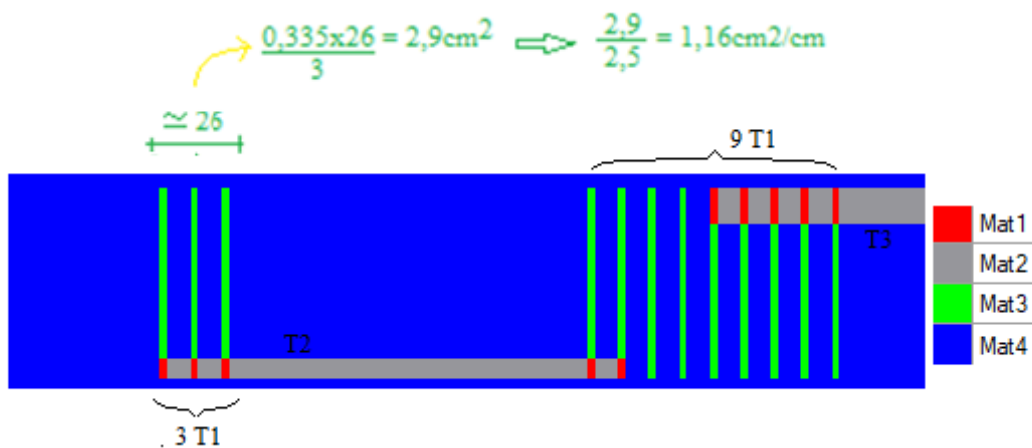


Figura 4.40 Configuração da armadura adotada para análise não linear

Na Figura 4.41 é mostrada a curva carga-deslocamento obtida da análise não linear da viga com configuração apresentada na Figura 4.40. Observa-se que a viga apresenta um deslocamento vertical no meio do vão de 9,3mm para o carregamento de 600kN. O método incremental avançou até a carga de 807kN para um deslocamento de 14mm.

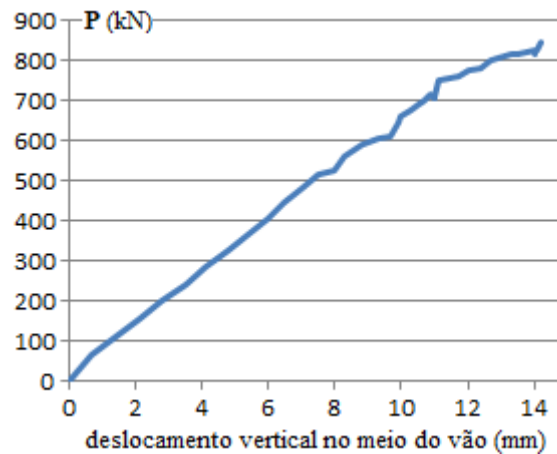


Figura 4.41 Curva carga-deslocamento para configuração mostrada na Figura 4.40

Na Figura 4.42 é apresentada a análise das tensões principais mínimas (máximas tensões de compressão) no material concreto da viga contínua analisada para a configuração de aço mostrada na Figura 4.40. Nesta figura observa-se que poucas regiões do concreto apresentam tensões iguais ou próximas à tensão limite do concreto ( $0,85f_{cd}$ ).

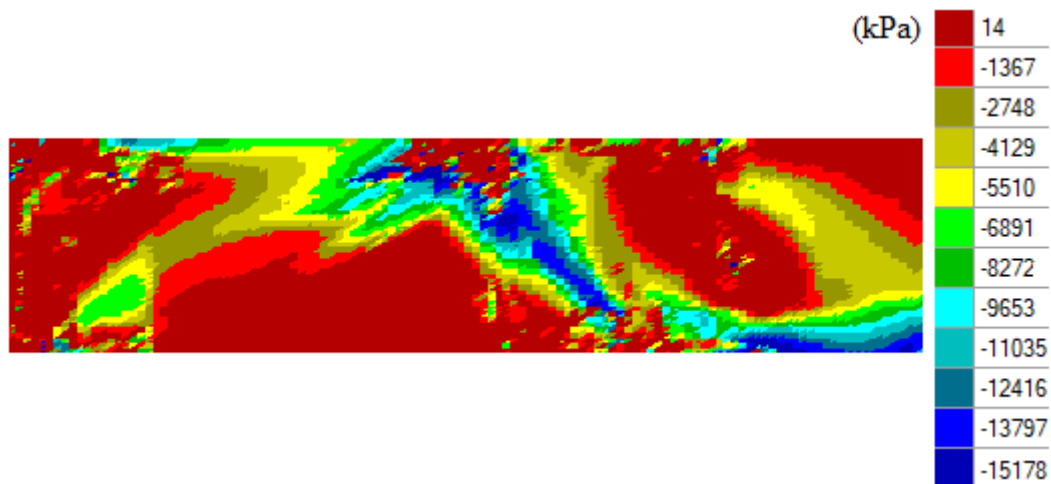


Figura 4.42 Tensão principal mínima para análise não linear da configuração da Figura 4.40

Já as Figura 4.43 e 4.44 apresentam a análise de tensões nas direções das armaduras da viga. Observa-se dessas figuras que boa parte da armadura apresenta tensões iguais ou próximas à tensão limite de escoamento do aço ( $f_{yd}$ ).



Figura 4.43 Tensão na armadura na direção x para análise não linear da configuração da Figura 4.40

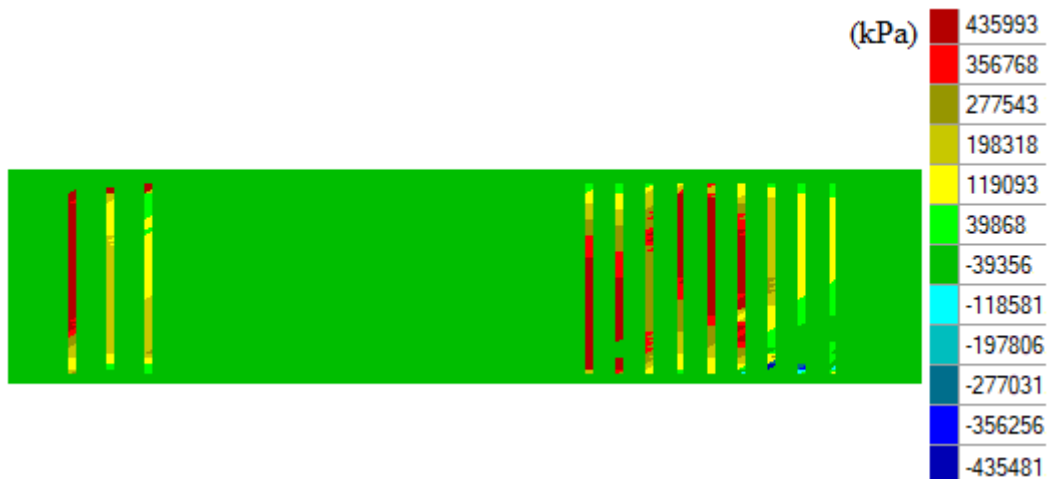


Figura 4.44 Tensão na armadura na direção y para análise não linear da configuração da Figura 4.40

#### 4.4.3.1 Cálculo da armadura longitudinal segundo prescrições da NBR 6118 (2014)

Para o dimensionamento das armaduras da viga segundo a NBR 6118 (2014) serão considerados os seguintes parâmetros: Seção transversal retangular 15x70cm, concreto C25 ( $f_{ck}=25\text{MPa}$ ), aço CA50, coeficientes de ponderação  $\gamma_c=1,4$  e  $\gamma_s = 1,15$ .

Na Figura 4.45 são apresentados os diagramas de cortante e momento para a viga contínua mostrada na Figura 4.34.

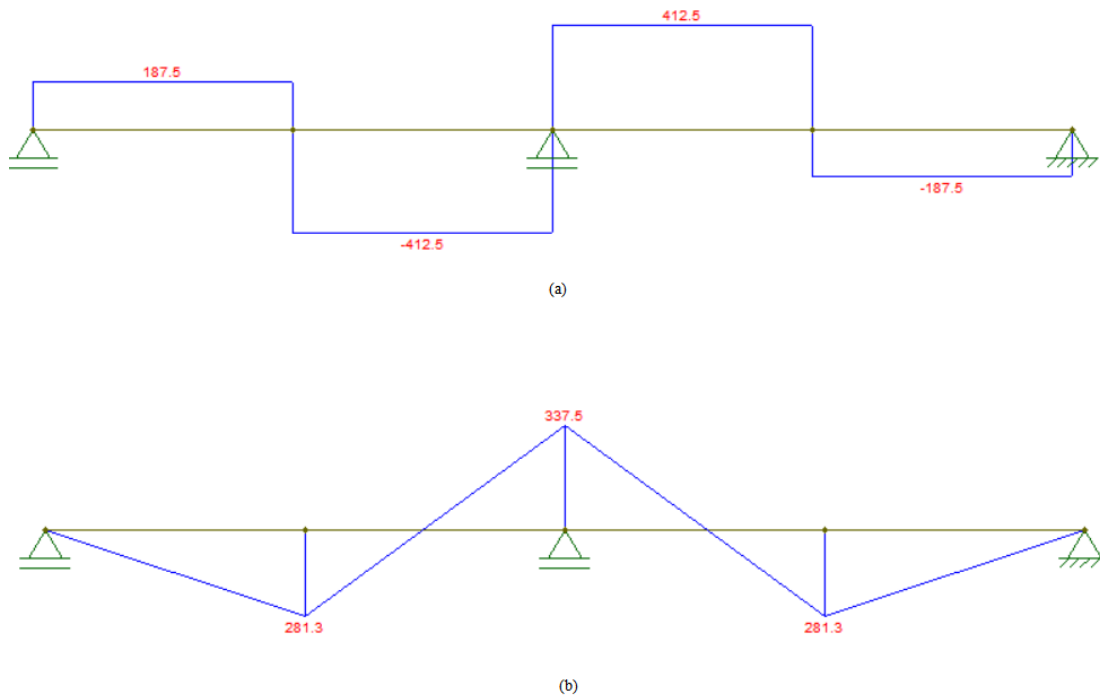


Figura 4.45 (a) Diagrama de esforço cortante (b) Diagrama de momento fletor

Para altura útil, ou seja, altura da viga menos a distância entre o centro de gravidade da armadura tracionada e a face tracionada da seção, será adotado inicialmente  $d=65\text{cm}$ . Já a distância  $d'$ , entre o centro de gravidade da armadura comprimida à face comprimida da seção será adotado o valor de 3cm.

Os limites entre os domínios 2, 3 e 4, considerando aço CA50 e concreto do Grupo I de resistência ( $f_{ck}<50\text{MPa}$ ), são:

$$x_{2,\text{lim}} = 0,26d = 0,26 \cdot 65 = 16,9\text{cm}$$

$$x_{3,\text{lim}} = 0,63d = 0,63 \cdot 65 = 40,95\text{cm}$$

- Cálculo da Armadura Mínima e Máxima de Flexão

A armadura mínima de tração em elementos estruturais armados deve ser determinada pelo dimensionamento da seção a um momento fletor mínimo dado pela expressão a seguir, respeitada a taxa mínima absoluta de 0,15%:

$$M_{d,\text{min}} = 0,8 W_0 f_{ctk,\text{sup}}$$

$$W_0 = \frac{I}{y} = \frac{bh^3 / 12}{y} = \frac{(15) (70^3) / 12}{35} = 12250\text{cm}^4$$

$$f_{ctk,sup} = 1,3 f_{ct,m} = 1,3 \cdot 0,3 \sqrt[3]{25^2} = 3,33 MPa$$

$$M_{d,min} = 0,8 (12250) (0,333) = 3263,4 kN.cm$$

De posse desse valor, é possível determinar da posição  $x$  da linha neutra empregando a equação que segue:

$$M_{d,min} = 0,68 b_w x f_{cd} (d - 0,4x)$$

$$3263,4 = 0,68 (15) x \frac{2,5}{1,4} (65 - 0,4x) \rightarrow x = 2,804 cm$$

$$\text{Portanto: } A_{s,min} = \frac{M_d}{f_{yd} (d - 0,4x)} = \frac{3263}{\frac{50}{1,15} (65 - 0,4 \cdot 2,804)} = 1,15 cm^2$$

Para seção retangular e concreto C25, a taxa mínima definida pela norma deve atender a seguinte restrição:  $A_{s,min} = 0,15\% A_c = 0,0015 \cdot 15 \cdot 70 = 1,58 cm^2 > 1,15 cm^2$

Logo,  $A_{s,min} = 1,58 cm^2$ .

Já para a armadura longitudinal máxima, a soma das armaduras de tração e compressão não pode ter valor maior que  $4\% A_c$ . Assim, para a seção retangular analisada, tem-se:

$$A_{s,máx} = 4\% A_c = 0,04 \cdot 15 \cdot 70 = 42,0 cm^2$$

- Cálculo da Armadura Longitudinal de Flexão

Para o máximo momento fletor negativo, cujo valor de cálculo é dado por:  $M_d = 337,5 kN.m = 33750 kN.cm$ , a posição,  $x$ , da linha neutra pode ser determinada da seguinte forma:

$$M_d = 0,68 b_w x f_{cd} (d - 0,4x) \rightarrow 33750 = 0,68 (15) x \frac{2,5}{1,4} (65 - 0,4x)$$

$$\text{Logo, } x = 36,87 cm$$

Sendo,  $x_{2,lim} = 16,9 < x = 36,87 < x_{3,lim} = 40,95 cm$ , logo, a seção se encontra no domínio 3.

A relação  $\beta_x = x/d$  deve ser verificada:  $\beta_x = 36,87/65 = 0,57 > 0,45$ , portanto, é necessária armadura dupla.

Assumindo  $x = 0,45 d = 0,45 (65) = 29,25 \text{ cm}$  e aplicando esse valor na equação a seguir tem-se a primeira parcela do momento fletor, dada por:

$$M_{1d} = 0,68b_w x f_{cd} (d - 0,4x) = 0,68 \cdot 15 \cdot 29,25 \frac{2,5}{1,4} (65 - 0,4 \cdot 29,25)$$

$$M_{1d} = 28397 \text{ kN.cm}$$

A segunda parcela do momento fletor resistente pode ser determinada da seguinte maneira:

$$M_{2d} = M_d - M_{1d} = 33750 - 28397$$

$$M_{2d} = 5353 \text{ kN.m}$$

Para aço CA50 e  $d/d' = 3/45 = 0,07$  e para  $\sigma'_{sd} = 435 \text{ MPa} = 43,5 \text{ kN/cm}^2$  a armadura comprimida resulta:

$$A'_s = \frac{M_d}{\sigma'_{sd} (d - d')} = \frac{5353}{43,5 (65 - 3)} = 1,98 \text{ cm}^2$$

Considerando que no domínio 3 a  $\sigma_{sd}$  na armadura é igual a  $f_{yd}$ , as áreas de armaduras tracionadas podem ser determinadas como segue:

$$A_{s1} = \frac{M_d}{\sigma_{yd} (d - 0,4x)} = \frac{28397}{\frac{50}{1,15} (65 - 0,4 \cdot 29,25)} = 12,50 \text{ cm}^2$$

$$A_{s2} = \frac{M_d}{\sigma_{sd} (d - d')} = \frac{5353}{43,5 (65 - 3)} = 1,98 \text{ cm}^2$$

Portanto, a área total de armadura tracionada é:

$$A_s = A_{s1} + A_{s2} = 12,50 + 1,98 = 16,50 \text{ cm}^2$$

E ainda:  $A_s = A_{s1} + A_{s2} + A'_s = 12,50 + 1,98 + 1,98 = 16,50 \text{ cm}^2 < A_{s,\text{máx}} = 42,0 \text{ cm}^2$

No caso do máximo momento fletor positivo, seu valor de cálculo é:

$$M_d = 281,25 \text{ kN.m} = 28125 \text{ kN.cm}$$



A posição,  $x$ , da linha neutra pode ser obtida da seguinte forma:

$$M_d = 0,68b_w x f_{cd}(d - 0,4x) \rightarrow 28125 = 0,68 (15) x \frac{2,5}{1,4}(65 - 0,4x)$$

$$\text{Logo, } x = 28,89\text{cm}$$

Sendo  $x_{2,\text{lim}} = 16,9 < x = 28,89 < x_{3,\text{lim}} = 40,95\text{cm}$ , a seção está no domínio 3.

A relação  $\beta_x = x/d$  deve ser verificada:  $\beta_x = 28,89/65 = 0,44 < 0,45$ , portanto, deve ser usada armadura simples. Assim:

$$A_s = \frac{M_d}{f_{yd}(d - 0,4x)} = \frac{28125}{\frac{50}{1,15}(65 - 0,4 \cdot 28,89)} = 12,10\text{cm}^2 (A_{s,\text{mín}} < 12,10 < A_{s,\text{máx}})$$

#### 4.4.3.2 Cálculo da armadura transversal segundo prescrições da NBR 6118 (2014)

Como a seção transversal é retangular, a indicação de Leonhardt e Mönning (1979) é de que o ângulo de inclinação das diagonais de compressão aproxima-se de  $30^\circ$ . Portanto, a armadura transversal pode ser dimensionada com o Modelo de Cálculo II, com  $\theta=30^\circ$ . No entanto, por simplicidade e a favor da segurança, será usado o Modelo de Cálculo I, no qual se supõe a treliça clássica de Ritter-Mörsc com o ângulo  $\theta$  de inclinação das diagonais comprimidas, fixo e igual a  $45^\circ$ ; pois a armadura resultante será maior do que aquela do Modelo de Cálculo II com  $\theta=30^\circ$ .

- Trecho da viga com:  $V_d = 412,25\text{ kN}$

Para não ocorrer o esmagamento do concreto que compõe as bielas comprimidas deve-se ter  $V_{Sd} \leq V_{Rd2}$ , com:

$$V_{Rd2} = 0,27 \left( 1 - \frac{f_{ck}}{250} \right) f_{cd} b_w d, \text{ com } f_{ck} \text{ em MPa.}$$

$$V_{Rd2} = 0,27 \left( 1 - \frac{f_{ck}}{250} \right) f_{cd} b_w d = 0,27 \left( 1 - \frac{25}{250} \right) \frac{2,5}{1,4} 15 \cdot 65 = 419,25\text{ kN}$$

$V_{Sd} = 412,25\text{ kN} \leq V_{Rd2} = 419,25\text{ kN}$ , portanto, não ocorrerá esmagamento das bielas.

Para efeito de comparação com a armadura a ser calculada, primeiramente será determinada a armadura mínima para estribo vertical ( $\alpha=90^\circ$ ) e aço CA50:

$$A_{sw,min} \geq \frac{20f_{ct,m}}{f_{ywk}} b_w \text{ (cm}^2\text{/m)}$$

A resistência média do concreto à tração direta, conforme o item 8.2.5 da NBR 6118 (2014) é:

$$f_{ct,m} = 0,3 \sqrt[3]{f_{ck}^2} = 0,3 \sqrt[3]{25^2} = 2,565 \text{ MPa}$$

$$A_{sw,min} \geq \frac{20 \cdot 0,565}{50} \cdot 15 = 1,95 \text{ cm}^2 / \text{m}$$

Para calcular a armadura transversal devem ser calculadas as parcelas da força cortante que serão absorvidas pelos mecanismos complementares ao de treliça ( $V_c$ ) e pela armadura ( $V_{sw}$ ), de tal modo que:  $V_{Sd} = V_c + V_{sw}$ . Na flexão simples, a parcela  $V_c$  é determinada como segue:

$$V_c = V_{c0} = 0,6 f_{ctd} b_w d$$

$$f_{ctd} = \frac{f_{ctk,inf}}{\gamma_c} = \frac{0,7 f_{ct,m}}{\gamma_c} = \frac{0,7 \times 2,565}{1,4} = 1,28 \text{ MPa} = 0,128 \text{ kN/cm}^2$$

Dessa forma tem-se  $V_c = 0,6 \times 0,128 \times 15 \times 65 = 74,88 \text{ kN}$ , o que nos fornece  $V_{sw} = 412,25 - 74,88 = 337,37 \text{ kN}$ , podendo assim obter a taxa de armadura de cisalhamento como apresentada a seguir.

$$\frac{A_{sw}}{s} = \frac{V_{sw}}{39,2d} = \frac{337,37}{39,2 \cdot 65} = 0,1324 \text{ cm}^2 / \text{cm} = 13,24 \text{ cm}^2 / \text{m} (> A_{sw,min})$$

- Trecho da viga com  $V_d = 187,50 \text{ kN}$  :

O dimensionamento desse trecho segue raciocínio inteiramente análogo ao trecho anterior. Assim, para verificação da compressão nas bielas, tem-se:  $V_{Sd} \leq V_{Rd2}$  ( $187,50 \text{ kN} \leq 419,25 \text{ kN}$ ). Portanto, não ocorrerá esmagamento das bielas. O esforço cortante resistente considerando escoamento da armadura de cisalhamento é  $V_{sw} = V_{sd} - V_c = 187,50 - 74,88 = 112,62 \text{ kN}$ . Dessa forma chega-se a taxa de armadura de cisalhamento dada a seguir.

$$\frac{A_{sw}}{s} = \frac{V_{sw}}{39,2d} = \frac{112,62}{39,2 \cdot 65} = 0,0442 \text{ cm}^2 / \text{cm} = 4,42 \text{ cm}^2 / \text{m} (> A_{sw,min})$$

Dessa forma, após analisar o problema da viga contínua por duas diferentes metodologias, é apresentada a Tabela 4.4 com a comparação entre o dimensionamento da armadura feito através do algoritmo ESO-RC e aquele considerando as prescrições normativas da NBR 6118 (2014).

Tabela 4.4 Comparativo entre o dimensionamento via ESO-RC e via NBR 6118 (2014)

	ESO-RC	NBR 6118
$M_d = - 337,5 \text{ kN.m}$	$T3=13,6\text{cm}^2$	$A_s' = 1,98 \text{ cm}^2$ $A_s = 14,50 \text{ cm}^2$
$M_d = +281,25 \text{ kN.m}$	$T2 = 7,8 \text{ cm}^2$	$A_s = 12,11 \text{ cm}^2$
$V_d = 187,5 \text{ kN}$	$3T1 = 3 \times 1,16 = 3,48 \text{ cm}^2/\text{m}$	$A_{sw} = 4,35 \text{ cm}^2/\text{m}$
$V_d = 412,5 \text{ kN}$	$9T1 = 9 \times 1,16 = 10,44 \text{ cm}^2/\text{m}$	$A_{sw} = 13,17 \text{ cm}^2/\text{m}$

Como pode ser constatado pela Tabela 4.4, o modelo de viga preconizado pela NBR 6118 (2014) conduz à maior quantidade de aço tanto para a armadura longitudinal (tirantes T2 e T3) quanto para os estribos (tirante T1), revelando-se, portanto, em um modelo visivelmente a favor da segurança. Por outro lado, as taxas de armaduras obtidas com a utilização do ESO-RC se aproximam das taxas médias de armaduras frequentemente encontradas nos projetos estruturais de vigas, indicando a viabilidade econômica e segurança do método. Adicionalmente, deve-se ressaltar que essa taxa poderia ser ainda diminuída pelo ajuste do modelo, já que a resposta do ESO-RC, como dito anteriormente, é bastante sensível aos parâmetros de entrada do algoritmo.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

### 5.1 Conclusões

Este trabalho possui basicamente dois objetivos principais: o primeiro consiste no desenvolvimento de um programa para minimização do volume de estruturas contínuas submetidas a restrições de tensão (ou deformação) máxima na estrutura. O outro objetivo trata do dimensionamento estrutural, incorporando teorias que descrevessem o comportamento do material concreto armado o mais próximo da realidade; o que foi possível adotando no processo um modelo constitutivo que considera o comportamento não linear do material, ao invés de modelos de bielas e tirantes comumente empregados para o projeto estrutural. Ambos os objetivos foram alcançados.

Para as aplicações do capítulo 3, observou-se que os modelos de bielas e tirantes obtidos com a formulação implementada são muito próximos daqueles encontrados na literatura e nas considerações normativas vigentes. Logo, verifica-se que a implementação desenvolvida para o elemento finito triangular de três nós e para o algoritmo de otimização evolucionária ESO foi bem sucedida, permitindo realizar análises lineares para estruturas submetidas a estado plano de tensões.

Deve-se ressaltar que a otimização topológica via ESO é bastante sensível aos parâmetros de entrada RR e ER, o que exige testes numéricos preliminares para evitar singularidades na estrutura. Constatou-se também que quanto mais uniforme for a malha de elementos finitos, mais suavidade na forma e na topologia é alcançada. Além disso, as instabilidades numéricas inerentes ao processo evolucionário foram reduzidas através de estratégias que controlam tanto a retirada de elementos ‘soltos’ na malha quanto a avaliação das tensões nos elementos, conforme descrito no Capítulo 3.

Com relação ao dimensionamento, nos três exemplos foi possível otimizar a taxa de aço dos tirantes através do algoritmo ESO-RC, sem que isso acarretasse, entretanto, em aumento excessivo dos deslocamentos e/ou redução da capacidade de carga do elemento estrutural. Portanto, o dimensionamento considerando a não linearidade física dos materiais conduziu a um menor consumo de aço em relação ao dimensionamento considerando as tensões obtidas de uma análise elástico-linear. Isso se deve a um melhor aproveitamento das armaduras, que passam a trabalhar com níveis de tensões mais próximas do seu limite de escoamento.

Para o exemplo da viga contínua, a comparação entre o dimensionamento via ESO-RC e através da NBR 6118 (2014) permite afirmar que a norma brasileira adota parâmetros conservadores que conduzem a uma taxa de aço a favor da segurança. O ESO-RC por sua vez se mostra como uma alternativa viável sob o ponto de vista econômico e de segurança estrutural.

Por fim, considerando as simulações numéricas realizadas, é possível afirmar que a proposta do trabalho e suas soluções são relevantes para a engenharia de estruturas, por dois motivos: fornecer aos projetistas estruturais um melhor entendimento do MBT, simplificando seu processo de concepção e o dimensionamento considerando o comportamento não linear do material torna as soluções mais confiáveis na medida em que está sendo adotado no processo um modelo constitutivo que representa o comportamento do material de maneira mais realista.

## **5.2 Sugestões para trabalhos futuros**

Deve-se ressaltar que este estudo agrupa diferentes linhas de pesquisas existentes no PROPEC: Mecânica Computacional, Comportamento e Dimensionamento de Estruturas e Otimização Estrutural. Dessa maneira, as metodologias propostas e desenvolvidas nesta pesquisa podem servir de base para inúmeras aplicações e investigações, tanto no sentido de generalizar sua funcionalidade em modelos reais de engenharia, quanto de calibrar e confirmar os resultados encontrados.

Com relação ao MBT, seria interessante testar outro tipo de elemento finito bidimensional ou até mesmo estender sua aplicação a elementos sólidos para análise tridimensional da estrutura. Sugere-se também estudar outros critérios para avaliação do desempenho estrutural e a consequente geração do MBT.

Estender a plataforma implementada de modo a permitir o completo dimensionamento e detalhamento do elemento estrutural. Ou seja, verificação dos parâmetros de resistência das bielas de concreto e das regiões nodais, verificação da ancoragem da armadura e atendimento a outros requisitos normativos.

Indica-se também a realização de investigações mais aprofundadas em relação aos parâmetros de entrada para o algoritmo de otimização e em relação aos problemas numéricos associados à obtenção da topologia ótima.

Neste trabalho, os elementos podem apresentar apenas armadura nas direções  $x$  e/ou  $y$ . Outra sugestão, portanto, seria permitir a existência de elementos com armadura inclinada, que podem surgir em casos práticos, como no exemplo da viga parede do Capítulo 4.

Para otimizar e melhorar a funcionalidade do programa FEMOOP, utilizado na implementação computacional deste trabalho, seria interessante o desenvolvimento de uma interface gráfica de pré e pós-processamento em substituição ao arquivo de texto com as informações necessárias para avaliação numérica desejada. Isso tornaria o processo de análise mais rápido e o *software* mais simples de ser manipulado por qualquer usuário.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ACI 318, 2008. *Building Code Requirements for Structural Concrete and Commentary (ACI 318R-08)*. American Concrete Institute. Farmington Hills: Michigan.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118. *Projeto de Estruturas de Concreto – Procedimentos*. Rio de Janeiro, 2014.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 9062. *Projeto e Execução de Estruturas de Concreto Pré-moldado*. Rio de Janeiro, 2006.
- ALMEIDA, V. S.; SIMONETTI, H. L. AND NETO, L. O. Comparative analysis of strut-and-tie models using Smooth Evolutionary Structural Optimization. *Engineering Structures*, 56, 1665-1675, 2013a.
- ALMEIDA, V. S.; SIMONETTI, H. L.; NETO, L. O. *Análise de modelos de bielas e tirantes para estruturas de concreto armado via uma técnica numérica*. *Revista Ibracon de Estruturas e Materiais*, Volume 6, nº1, p. 139-157, ISSN 1983-4195, 2013b.
- ANDRESSEN, E., CLAUSEN, A., SCHEVENELS, M., LAZAROV, B. S., SIGMUND, O. *Efficient Topology Optimization in Matlab Using 88 Lines of Code*. *Struct. Multidisc. Optim, Educational Article*, 2010.
- BATHE, K.J. *Finite element procedures in engineering analysis*. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, N.J. 1982.
- BENDSØE, M. P. *Optimal shape design as a material distribution problem, structural optimization*. v.1, p. 193-202, 1989.
- BENDSØE, M.P. e SIGMUND, O. *Topology Optimization*, Springer, Berlin, 2002.
- BENDSØE, M.P. e SIGMUND, O. *Topology Optimization: theory, methods and applications*. Berlin, Springer-Verlag, ISBN 3-540-42992-1, 2004.
- CEB – FIP MODEL CODE 1990. Comité Euro-International du Béton, Thomas Telford, 1993.

- CEB/FIP MODEL CODE. Fip Bulletin 55: Model Code 2010, First complete draft – vol. 1 Internacional Federation for Structural Concrete, 2010.
- DIAS, L. E. S. *Análise numérica de cascas de concreto ligadas com conexão deformável a vigas de aço usando elementos finitos de casca e interface*. Dissertação (Mestrado). Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto, 2016.
- DÍAZ, A. e SIGMUND, O. *Checkerboard Patterns in Layout Optimization*. Structural Optimization, vol. 10, PP. 40-45, 1995.
- FILHO, A. C. *Detalhamento das estruturas de concreto pelo método das bielas e dos tirantes*. Caderno de engenharia UFRGS, Rio Grande do Sul, Brasil, 1996.
- FISH, J. e BELYTSCHKO, T. *A first Course in Finite Elements*. John Wiley & Sons Ltd, England, 2007.
- FRANCO, M. I. E. *Vigas-parede: Comparação entre diferentes metodologias de cálculo*. Dissertação de Graduação; Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rio Grande do Sul, Brasil, 2015.
- FU, C. C. *The Strut-And-Tie Model of Concrete Structures*. The Maryland State Highway Administratio. /Palestra proferida em 21 de Agosto, 2001.
- GUERRA, M. B. B. F. *Modelos de concepção para estruturas em concreto armado com comportamento não linear obtidos pelo método de bielas e tirantes e otimização topológica*. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil, 2017.
- GUIMARÃES, L. G. S. *Disciplina Orientada a Objetos para Análise e Visualização Bidimensional de Modelos de Elementos Finitos*. Dissertação de Mestrado, PUC-Rio, Departamento de Engenharia Civil, 1992.
- HARDJASAPUTRA, H. *Evolutionary structural optimization as tool in finding strut-and-tie-models for designing reinforced concrete deep beam*. Proceeding of 5th International Conference of Euro Asia Civil Engineering Forum (EACEF-5), 2015.



- HUANG, Z.; BURGESS, I. W.; PLANK, R. J. *Modelling membrane action of concrete slabs in composite buildings in fire. Part I: Theoretical development*. Journal of Structural Engineering, n. 8, v. 129, p. 1093-1102, 2003.
- JOG, C.S. e HABER, R.B. *Stability of finite element models for distributed parameter optimization and topology design*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 130, n. 3-4, pp. 203-226, 1996.
- LANES, R. M. *Investigação de um método de otimização topológica evolucionária desenvolvido em script*. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil, 2013.
- LEONHARDT, F.; MÖNNIG, E. *Construções de Concreto*. v.1, 2 e 3. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 1979.
- LIANG, Q. Q. *Performance-based optimization of Structures: Theory and applications*, Spon Press, London, 2005.
- LIANG, Q. Q. *Automated performance-based optimal design of continuum structures under multiple load cases*. 5<sup>th</sup> Australian Congress on Applied Mechanics, Australia, 2007.
- LIANG, Q. Q. e STEVEN, G.P. *A performance-based optimization method for topology design of continuum structures with mean compliance constraints*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. v.191, pp. 1471-1489, 2002a.
- LIANG, Q. Q., UY, B. e STEVEN, G.P. *Performance-Based Optimization for Strut-and-Tie modeling of Structural Concrete*. Journal of Structural Engineering. v.128, n. 6, pp. 815-823, 2002b.
- LIANG, Q. Q.; XIE Y. M.; STEVEN, G.P. *Topology optimization of strut-and-tie models in reinforced concrete structures using an evolutionary procedure*. ACI Structural Journal. 97(2):322–330, 2000.

- MAXWELL, J. Clerk. *On Reciprocal Figures, Frames, and Diagrams of Forces*. Transactions of the Royal Society of Edinburgh, v. 26, ed. nº 01, January, p. 1-40, 1870.
- MICHELL, A. G. M. *The limits of economy of material in frame-structures*. Philosophy Magazine, 8, p.589–597, 1904.
- NARCISO, S. P. S. *Determinação de Modelos de Escoras e Tirantes para Análise em Estruturas de Betão Armado*. Dissertação de Mestrado, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. Porto, Portugal, 2009.
- MONTOYA, J.P., MESEGUER, G. A., MORÁN, C. F. *Hormigón Armado. Design of Concrete Structures*. McGraw-Hill, 11th edition, New York, 1991.
- NEPOMUCENO, C. L. *Análise de Vigas-Parede aplicando Modelo de Biela e Tirante e Microtreliça*. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, Brasil, 2012.
- NGUYEN, T. H. *A computacional paradigm for multiresolution topology optimization (MTOPT)*. Structural and Multidisciplinary Optimization, vol. 41, n. 4, PP. 525-539, 2009.
- OLIVEIRA, L. D. *Projeto de Estruturas de Concreto Armado pelo Modelo Biela-Tirante via Mínima Norma Euclidiana*. Dissertação de mestrado, Departamento de Engenharia Civil da Universidade de Brasília-UNB, Brasília, 108p, 1995
- PANTOJA, J. C. *Geração Automática via Otimização Topológica e Avaliação de Segurança de Modelos de Bielas e Tirantes*. Tese de Doutorado. PUC-RJ, Rio de Janeiro, 2012.
- QUERIN, O.M., *Evolutionary Structural Optimization stress based formulation and implementation*. PhD dissertation, University of Sydney,1997.
- QUERIN, O. M.; STEVEN, G.P.; XIE, Y. M. *Evolutionary structural optimisation using an additive algorithm*. Finite Elements in Analysis and Design, v. 34, Issues 3–4, p. 291-308, 2000.

- ROTS J. G. *et al.* *The need for fracture mechanics options in finite element models for concrete structures. Proceedings, Int. Conf. On Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures*, F. Damjanic et al., eds., Pineridge Press, Part 1, 19–32, 1984.
- SANCHES, R. P. *Otimização estrutural evolucionária usando malhas hexagonais*. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas – Unicamp, Campinas, 2011.
- SAINT-VENANT, A. J. C. B. *Memoire sur la Torsion des Prismes*, Mem. Divers Savants, vol. 14, pp. 233-560, 1855.
- SANTOS, D. *Análise de vigas de concreto armado utilizando modelos de bielas e tirantes*. Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil, 2006.
- SANTOS, G. G. M. *Análise sistemática de vigas-parede biapoiadas de concreto armado*. Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil, 1999.
- SANTOS, K. F., VIEIRA, D. V. “Software” Para Dimensionamento de Consolos Curtos De Concreto. IX Congresso Brasileiro de Pontes e Estruturas, Rio de Janeiro, Brasil, 2016
- SCHÄFER, K., SCHLÄICH, J. *Consistent Design of Structural Concrete Using Strut-And-Tie Models*. Colóquio sobre Comportamento e Projeto de Estruturas, Rio de Janeiro, Brasil, 1988.
- SCHÄFER, K., SCHLÄICH, J. *Design and Detailing of Structural Concrete Using Strut-and-Tie Models*. *The Structural Engineer*, vol.69, n.6, 1991.
- SCHLAICH, J., SCHÄFER, K., JENNEWEIN, M. *Toward a Consistent Design of Structural Concrete*. *PCI Journal*, vol. 32, n. 3, pp.75-150, 1987.
- SIGMUND, O. *A 99 line topology optimization code written in Matlab*. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Berlin, v. 21, n. 2, pp. 120-127, 2001.

- SIGMUND, O. e PETERSSON, J. *Numerical instabilities in topology optimization: a survey on procedures dealing with checkerboards, mesh dependencies and local mínima*, Structural Optimization, vol. 16, PP. 68-75, 1998.
- SILVA, R. C. e GIONGO, J. S. *Modelos de bielas e tirantes aplicados a estruturas de concreto armado*. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil, 2000.
- SIMÃO, D. W. G. *Análise e dimensionamento de vigas de concreto armado com aberturas na alma*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil e Ambiental, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE, Brasil, 2014.
- SIMONETTI, H. L. *Otimização topológica de estruturas bidimensionais*. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto, MG, Brasil, 2009.
- SOUZA, R. A. *Análise, dimensionamento e verificação de elementos especiais em concreto armado utilizando o método dos elementos finitos e o método das bielas*. Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño em Ingeniería, vol. 22, n.1, pp. 31–44, 2006.
- SOUZA, R. A. *Concreto Estrutural: análise e dimensionamento de elementos com descontinuidades*. Tese de doutorado. USP – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia e Fundações. São Paulo, 2004.
- TJHIN, T. N.; KUCHMA, D. A. *Computer-Based Tools for Design by Strut-and Tie Method: Advances and Challenges*. ACI Structural Journal, v.99, n.5, p.586594, 2002.
- WIGHT, J.K.; MACGREGOR, J.G. *Reinforced Concrete Mechanics and Design*. Ed. Prentice-Hall International (UK) Limited, 3rd. ed., p. 879-972, London, 2012.
- XIE, Y. M.; STEVEN, G. P. *A simple evolutionary procedure for structural optimization*. Computers & Structures, v. 49, Issue5, p. 885-896, 1993.

XIE, Y. M.; STEVEN, G. P. *Evolutionary structural optimization for dynamic problems. Computers&Structures*, v. 58, Issue 6, pp. 1067-1073, 1996.

ZHOU, M., SHYY, Y.K. and THOMAS, H.L. *Checkerboard and minimum member size control in topology optimization*, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 21, pp. 152-158, 2001