



MESTRADO EM CONSTRUÇÃO METÁLICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
ESCOLA DE
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO

EDUARDO NETO MANZI

FORMULAÇÕES DE ELEMENTOS FINITOS
CURVOS PARA ANÁLISE DE ARCOS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

*Orientadores: Ricardo Azoubel da Mota Silveira
Ernani Carlos de Araújo*

Convênio USIMINAS/UFOP/FUNDAÇÃO
Ouro Preto, maio de 2001

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO - ESCOLA DE MINAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
PROGRAMA DE PÓS – GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

FORMULAÇÕES DE ELEMENTOS FINITOS CURVOS
PARA ANÁLISE DE ARCOS

AUTOR: Eduardo Neto Manzi

ORIENTADORES: Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira
Prof. Dr. Ernani Carlos de Araújo

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte integrante dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, área de concentração: Construções Metálicas.

Ouro Preto, maio de 2001.

624.04:624.072.32

N469f Manzi, Eduardo Neto.

Formulações de elementos finitos curvos para análise de arcos / Eduardo Neto Manzi. -- Ouro Preto : UFOP, 2001. xvii, 155p. : il., grafs., tabs.

Orientadores: Ricardo Azoubel da Mota Silveira, Ernani Carlos de Araújo.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Ouro Preto, Departamento de Engenharia Civil.

1. Elementos finitos. 2. Vigas - arcos - análise. I. Título.

*“Quem, de três milênios,
Não é capaz de se dar conta
Vive na ignorância, na sombra,
À mercê dos dias, do tempo.”*

Johann Wolfgang von Goethe

Ao meu pai, mamãe, Leo

Bianka, **Paola** e Ronaldin.

Meus agradecimentos

*“O pesquisador que não souber o
que está procurando não
compreenderá o que encontrar.”*

Claude Bernard, filósofo francês

À minha família, pelo eterno apoio;

Ao professor Ricardo Azoubel, pelos ensinamentos e paciência;

Ao professor Ernani Araújo, pelos ensinamentos e liberdade de trabalho;

Aos professores e funcionários do DECIV, Escola de Minas;

Aos colegas de mestrado, pela convivência;

À CAPES – CNPq e USIMINAS, pela ajuda financeira.

RESUMO

Este trabalho tem como principais objetivos o estudo e a implementação computacional de elementos finitos curvos para análise de arcos planos. Foram desenvolvidos seis elementos finitos unidimensionais, sendo quatro deles de curvatura constante, um de curvatura parabólica e um elemento finito reto.

Atenção especial é dada ao cálculo da matriz de rigidez dos elementos finitos propostos, onde os efeitos das deformações de flexão, cisalhante e de membrana são levados em consideração. O acoplamento desses efeitos permite a análise do comportamento de arcos esbeltos e espessos.

As matrizes de rigidez de três elementos finitos propostos nesse trabalho são obtidas através do Método da Flexibilidade, que utiliza conceitos de energia interna de deformação, 2º Teorema de Castigliano e o Teorema da Reciprocidade de Maxwell. Outras duas formulações são baseadas na aproximação do campo de deslocamentos. As funções de interpolação usadas para aproximar os deslocamentos são formadas por funções algébricas-trigonométricas, cujos parâmetros são obtidos através do uso das três equações diferenciais homogêneas de equilíbrio estático de uma viga curva. Finalmente, a matriz de rigidez do último elemento finito proposto é obtida através de uma formulação híbrida, usando o princípio variacional de Hellinger-Reissner. As funções de interpolação usadas para aproximar o campo de deslocamentos e tensões resultantes são formadas por funções polinomiais.

No final da dissertação, através da análise de problemas estruturais encontrado na literatura, verifica-se a eficiência das formulações dos elementos finitos estudadas neste trabalho. O objetivo é conhecer a melhor modelagem numérica para obtenção dos deslocamentos de sistemas estruturais curvos esbeltos ou espessos, além do traçado de diagramas de esforços.

ABSTRACT

The study and the computational implementation of curved beam elements for plane arches analysis are presented in this work. Six one-dimensional elements were developed, where four are circular, one is parabolic and the other one is straight.

Flexural, axial and shear deformations effects are all taken into account in the derivation of the beam element stiffness matrix. They contain the coupled influences of shear and membrane locking effects.

The beam element stiffness matrix of three formulations is obtained using the Flexibility Method, which apply internal energy concepts, Castigliano's Theorem and Maxwell reciprocal theorem. Two other formulations are based on the displacements field approach. The analytical shape functions describing radial and tangential as well as cross-section rotations are given in algebraic-trigonometric form, whose coefficients are obtained with the use of the three static equilibrium equations of the curved beam. Finally, the last beam element stiffness matrix is obtained through of the hybrid formulation, using the Hellinger-Reissner principle. The shape functions used to the displacement field and stress field approximations are polynomial functions.

At the end of this work, using numerical and analytical responses of the structural problems found in the literature, the formulations efficiency are verified. So, the best numerical models are found and the displacements and the resultant forces are obtained to the thin and thick curved structural systems.

SUMÁRIO

Resumo, **v**

Abstract, **vi**

Lista de Figuras, **x**

Lista de Tabelas, **xiii**

Lista de Símbolos, **xvi**

Capítulo 1 – **INTRODUÇÃO**

1.1 – CONSIDERAÇÕES INICIAIS, **1**

1.2 – OBJETIVO E ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO, **3**

1.3 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA, **4**

Capítulo 2 – **CONCEITOS BÁSICOS**

2.1 – INTRODUÇÃO, **8**

2.2 – TEOREMA DE CLAPEYRON, **8**

2.3 – ENERGIA DE DEFORMAÇÃO, **10**

2.4 – TEOREMA DE MAXWELL, **13**

2.5 – SEGUNDO TEOREMA DE CASTIGLIANO, **15**

2.6 – RELAÇÕES CINEMÁTICAS, **16**

2.7 – RELAÇÕES CONSTITUTIVAS, **17**

2.8 – PRINCÍPIOS VARIACIONAIS, **20**

Capítulo 3 – **ELEMENTO FINITO CURVO: MÉTODO DA FLEXIBILIDADE**

3.1 – INTRODUÇÃO, **22**

3.2 – ROTEIRO DE CÁLCULO DA MATRIZ DE RIGIDEZ, **22**

3.3 – ELEMENTO FINITO UNIDIMENSIONAL RETO, **25**

3.3.1 – Formulação da Matriz de Rigidez, **25**

3.3.2 – Sistema local x global, **31**

- 3.4 – ELEMENTO FINITO DE CURVATURA CONSTANTE, **33**
- 3.5 – ELEMENTO FINITO PARABÓLICO, **37**

Capítulo 4 – **ELEMENTO FINITO CURVO:
FORMULAÇÃO EM DESLOCAMENTOS**

- 4.2 – EQUAÇÕES BÁSICAS, **45**
- 4.3 – FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO, **49**
- 4.4 – MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO, **54**
- 4.5 – MATRIZ DE RIGIDEZ EXATA, **56**

Capítulo 5 – **ELEMENTO FINITO CURVO:
MÉTODO HÍBRIDO**

- 5.1 – INTRODUÇÃO, **62**
- 5.2 – PRINCÍPIO VARIACIONAL DE HELLINGER-REISSNER, **62**
- 5.3 – FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO, **64**
- 5.4 – FORMULAÇÃO DO ELEMENTO FINITO, **66**

Capítulo 6 – **PROGRAMA COMPUTACIONAL**

- 6.1 – INTRODUÇÃO, **71**
- 6.2 – DADOS DE ENTRADA, **72**
 - 6.2.1 – Variáveis globais (Macro-comando dad), **74**
 - 6.2.2 – Modelagem, **75**
 - 6.2.2.1 – Arco parabólico (Macro-comando PAR), **75**
 - 6.2.2.2 – Arco circular (Macro-comando CIR), **77**
 - 6.2.2.3 – Coordenadas aleatórias (Macro-comando COO), **78**
 - 6.2.3 – Seção transversal (Macro-comando SEC), **79**
 - 6.2.4 – Condições de contorno (Macro-comando CNT), **81**
 - 6.2.5 – Casgas externas, **82**
- 6.3 – MONTAGEM E ANÁLISE DO PROBLEMA, **83**

Capítulo 7 - **EXEMPLOS NUMÉRICOS**

- 7.1 – INTRODUÇÃO, **86**
- 7.2 – ARCO PARABÓLICO BI-ENGASTADO, **89**
 - 7.2.1 – Análise de convergência, **89**
 - 7.2.2 – Diagrama de momento fletor, **96**
 - 7.2.3 – Linha de influência, **100**
- 7.3 – SEMI-ARCO PARABÓLICO, **105**
- 7.4 – ESTRUTURAS CIRCULARES ESBELTAS, **109**
 - 7.4.1 – Anel circular, **109**
 - 7.4.2 – Arco bi-apoiado, **115**
- 7.5 – SEMI-ARCO CIRCULAR ENGASTADO-LIVRE, **123**
- 7.6 – ARCO CIRCULAR ESPESSE, **127**
 - 7.6.1 – Análise de convergência, **127**
 - 7.6.2 – Análise da deformação cisalhante, **130**

Capítulo 8 – **CONCLUSÕES E SUGESTÕES**

- 8.1 – CONCLUSÕES, **137**
- 8.2 – SUGESTÕES PARA FUTURAS PESQUISAS, **141**

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS, 143

REFERÊNCIAS ADICIONAIS, 146

LISTA DE FIGURAS

Capítulo 1

Figura 1.1 – Elementos geométricos de um arco, **2**

Capítulo 2

Figura 2.1 – Deformações axiais, cisalhantes e de flexão, **10**

Figura 2.2 – Sistemas de esforços atuando no sólido elástico, **13**

Capítulo 3

Figura 3.1 – Elemento finito de pórtico, **26**

Figura 3.2 – Extração simbólica da matriz de rigidez via Maple, **30**

Figura 3.3 – Montagem da matriz e transformação para C, **30**

Figura 3.4 – Sistema de coordenadas local/global, **31**

Figura 3.5 – Elemento finito de curvatura constante, **33**

Figura 3.6 – Extração simbólica da matriz de rigidez via Maple, **37**

Figura 3.7 – Elemento finito parabólico, **38**

Figura 3.8 – Definição da parábola, **38**

Figura 3.9 – Extração simbólica da matriz de rigidez via Maple, **44**

Capítulo 4

Figura 4.1 – Elemento finito de curvatura constante, **46**

Capítulo 5

Figura 5.1 – Elemento finito de curvatura constante, **63**

Capítulo 6

Figura 6.1 – Fluxograma simplificado do programa, **71**

Figura 6.2 – Modelagem da estrutura, **72**

Figura 6.3 – Exemplo de um arquivo de dados, **73**

Figura 6.4 – Modelagem arco parabólico, **77**

Figura 6.5 – Modelagem arco circular, **78**

Figura 6.6 – Carregamento nodal equivalente, **83**

Figura 6.7 – Matriz de rigidez global, **84**

Capítulo 7

Figura 7.1 – Arco parabólico biengastado, **87**

Figura 7.2 – Arco parabólico: propriedades geométricas, **89**

Figura 7.3 – Arco parabólico: carregamentos atuantes, **90**

Figura 7.4 – Esforços: direção e sentidos positivos, **90**

Figura 7.5 – Modelagem do arco: casos 1, 3 e 4, **91**

Figura 7.6 – Caso 1: reações de apoio P_1 e M_1 , **92**

Figura 7.7 – Caso 2: reações de apoio Q_1 e M_1 , **93**

Figura 7.8 – Caso 4: reação de apoio M_1 , **94**

Figura 7.9 – Relação f/L : reação de apoio P_1 , **95**

Figura 7.10 - Relação f/L : momento fletor M_v , **96**

Figura 7.11 – DMF, Caso 1: carga vertical concentrada, **97**

Figura 7.12 – DMF, Caso 2: carga horizontal concentrada, **98**

Figura 7.13 – DMF, Caso 3: três cargas concentradas verticais, **99**

Figura 7.14 – DMF, Caso 4: carga uniformemente distribuída, **100**

Figura 7.15 – Solução analítica e modelagem, **101**

Figura 7.16 – Linha de influência: reação de apoio P_2 , **102**

Figura 7.17 - Linha de influência: reação de apoio Q_2 , **103**

Figura 7.18 – Linha de influência: reação de apoio M_2 , **104**

Figura 7.19 – Semi-arco parabólico, **105**

Figura 7.20 – Convergência: deslocamento horizontal e deslocamento vertical, **107**

Figura 7.21 – Anel circular, **108**

Figura 7.22 – Modelagem do anel, **109**

Figura 7.23 – Convergência: deslocamento u , **110**

Figura 7.24 – Convergência: momento fletor M_A , **111**

Figura 7.25 – DMF, arco bi-apoiado, **112**

Figura 7.26 – DEN e DEC, arco bi-apoiado, **113**

Figura 7.27 – Arco bi-apoiado, **114**

Figura 7.28 - Convergência: deslocamento u , **116**

Figura 7.29 - Convergência: rotação ϕ , **118**

Figura 7.30 – DMF, arco bi-apoiado, **119**

Figura 7.31 – DEN, arco bi-apoiado, **120**

Figura 7.32 – DEC, arco bi-apoiado, **121**

Figura 7.33 – Semi-arco circular engastado-livre, **122**

Figura 7.34 – Convergência: deslocamento vertical, **123**

Figura 7.35 – Convergência: rotação ϕ , **124**

Figura 7.36 – Arco circular espesso, **126**

Figura 7.37 – Tipos de carregamento, **127**

Figura 7.38 – Modelos numéricos adotados, **127**

Figura 7.39 - Análise de convergência, Caso 1: carga concentrada, **128**

Figura 7.40 - Análise de convergência: Caso 2: Pressão radial uniforme, **129**

Figura 7.41 – Influência do efeito cisalhante, **132**

Figura 7.42 – Ângulo de abertura, Caso 1: carga concentrada, **134**

Figura 7.43 – Ângulo de abertura, Caso 2: pressão radial uniforme, **135**

LISTA DE TABELAS

Capítulo 1

Tabela 1.1 – Classificação dos arcos, Krishnan e Suresh (1998), **2**

Capítulo 2

Tabela 2.1 – Coeficiente de cisalhamento η , **12**

Capítulo 4

Tabela 4.1 – Condições de contorno, **49**

Tabela 4.2 – Coeficientes C_i para o deslocamento tangencial $u_1 = 1$ (N_{uw}^1), **58**

Tabela 4.3 – Coeficientes C_i para o deslocamento radial $v_1 = 1$ (N_{vw}^1), **58**

Tabela 4.4 – Coeficientes C_i para a rotação $\phi_1 = 1$ ($N_{\phi w}^1$), **59**

Capítulo 6

Tabela 6.1 – Declaração dos macro-comandos, **74**

Tabela 6.2 – Variáveis globais, **75**

Tabela 6.3 – Dados de cada nó do Sistema Estrutura em estudo, **79**

Tabela 6.4 – Opções de variação da seção transversal, **80**

Tabela 6.5 – Seção transversal, **81**

Tabela 6.6 – Condições de contorno, **81**

Tabela 6.7 – Deslocamentos de cada ponto nodal, **85**

Tabela 6.8 – Esforços internos em cada elemento finito, **85**

Capítulo 7

Tabela 7.1 – Resumo das formulações, **88**

Tabela 7.2 – Caso 1: carga concentrada vertical, **91**

Tabela 7.3 – Caso 2: carga concentrada horizontal, 92
Tabela 7.4 – Caso 3: três cargas concentradas, 93
Tabela 7.5 – Caso 4: carga uniformemente distribuída, 94
Tabela 7.6 – Influência f/L : reação de apoio P_1 , 95
Tabela 7.7 – Relação f/L : momento fletor M_v , 95
Tabela 7.8 – DMF, Caso 1, 97
Tabela 7.9 – DMF, Caso 2, 98
Tabela 7.10 – DMF, Caso 3, 99
Tabela 7.11 – Linha de influência P_2 , 101
Tabela 7.12 - Linha de influência Q_2 , 102
Tabela 7.13 – Linha de influência M_2 , 103
Tabela 7.14 – Exemplo de modelagem, 106
Tabela 7.15 – Convergência: deslocamento horizontal, 107
Tabela 7.16 – Convergência: deslocamento vertical, 107
Tabela 7.17 - Convergência: deslocamento u , 110
Tabela 7.18 - Convergência: momento fletor M_A , 111
Tabela 7.19 – DMF, arco bi-apoiado, 112
Tabela 7.20 – DEN e DEC, arco bi-apoiado, 113
Tabela 7.21 – Convergência: deslocamento u , 116
Tabela 7.22 – Convergência: rotação ϕ , 117
Tabela 7.23 – Convergência: esforço Q e momento fletor M , 118
Tabela 7.24 - DMF, arco bi-apoiado, 119
Tabela 7.25 – DEN e DEC, arco bi-apoiado, 120
Tabela 7.26 – Convergência: deslocamento vertical, 123
Tabela 7.27 – Convergência: rotação ϕ , 124
Tabela 7.28 – Critério de convergência, 125
Tabela 7.29 – Análise de convergência, Caso 1: carga concentrada, 128
Tabela 7.30 - Análise de convergência, Caso 2: Pressão radial uniforme, 129
Tabela 7.31 – Índice de esbeltez, Caso 1: carga concentrada, 131
Tabela 7.32 – Índice de esbeltez, Caso 2: pressão radial uniforme, 131
Tabela 7.33 – Reações apoio: índice de esbeltez, Caso 1: carga concentrada, 132

Tabela 7.34 – Reações apoio: índice de esbeltez, Caso 2: pressão radial uniforme, **133**

Tabela 7.35 – Ângulo de abertura, Caso 1: carga concentrada, **134**

Tabela 7.36 – Ângulo de abertura, Caso 2: pressão radial uniforme, **135**

LISTA DE SÍMBOLOS

ε_0	Deformação específica normal.
γ_0	Deformação de cisalhamento.
κ	Mudança de curvatura seção transversal.
σ_x	Tensão normal.
τ_{xy}	Tensão de cisalhamento.
u	Deslocamento tangencial.
v	Deslocamento radial.
ϕ	Rotação seção transversal.
u_i	Deslocamento tangencial, nó i .
v_i	Deslocamento radial, nó i .
ϕ_i	Rotação seção transversal, nó i .
N, P	Esforço normal (tangencial).
V, Q	Esforço cortante (radial).
M	Momento fletor.
P_i	Esforço normal, nó i .
Q_i	Esforço cortante, nó i .
M_i	Momento fletor, nó i .
E	Módulo de elasticidade longitudinal.
G	Módulo de elasticidade transversal.
η	Coefficiente de cisalhamento.

A	Área seção transversal.
I	Momento de inércia da seção transversal.
L	Comprimento elemento finito reto.
t	Espessura seção transversal.
r	Raio elemento finito circular.
α	Ângulo de abertura elemento finito circular.
α_1	Ângulo de tangência nó 1, elemento finito parabólico.
α_2	Ângulo de tangência nó 2, elemento finito parabólico.
θ_0	Meio ângulo de abertura elemento finito circular ($\alpha = 2\theta_0$).
U	Energia interna de deformação.
Ω	Energia potencial das forças externas.
w	Vetor de deslocamentos nodais.
p	Vetor de esforços nodais.
K_e	Matriz de rigidez elemento finito.
R	Matriz de rotação.
D	Relação deformação-deslocamento.
J_i	Relação tensão-deformação.
S	Relação deformação-tensão.
σ	Vetor de tensões resultantes.
ϵ	Vetor de deformações.

1

INTRODUÇÃO

1.1 – CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A durabilidade de estruturas antigas é particularmente surpreendente, quando se considera que a escolha de materiais para construção anterior à Revolução Industrial era bem limitada. Metais não podiam ser produzidos em quantidades suficiente para serem colocados em elementos de sustentação de cargas para prédios e pontes. Os principais materiais de construção antes do século XIX eram madeira, tijolos e argamassa. Somente os dois últimos foram usualmente práticos para uso em grandes estruturas, como catedrais, porque árvores de tamanho suficiente para serem usadas como vigas eram raras.

Tijolos e argamassa são relativamente frágeis e são incapazes de suportar tensões de tração. Consequentemente, as estruturas do período pré-Revolução Industrial eram geralmente projetadas para suportar cargas em compressão. O projeto de ponte Romana em forma de arco, por exemplo, causa tensões compressivas no lugar de tensões trativas, para serem transmitidas através da estrutura. O arco é a forma predominante na arquitetura pré-Revolução Industrial.

Hoje utilizam-se materiais que tem a característica de suportar tensões de tração. A estrutura metálica em forma de arco pode vencer grandes vãos. Pontes, galpões, hangares e ginásios são alguns exemplos de construções onde se verifica a aplicação desse elemento estrutural.

Arco funicular é aquele cuja forma é projetada de modo a desenvolver apenas compressão axial mediante determinado tipo de carga. Assim, Austin (1971) classificou os arcos de acordo com essa definição: *parabólico*, submetido a uma carga uniformemente distribuída ao longo da horizontal; *catenária*, submetido a uma carga

uniformemente distribuída ao longo do arco; e *circular*, submetido a uma pressão radial uniforme.

Já Krishnan e Suresh (1998) classificaram os arcos de acordo com a razão de esbeltez e também de acordo com o ângulo de abertura. Na Figura 1.1, t é a espessura do arco, r o valor do raio e α o seu ângulo de abertura.

A Tabela 1.1 apresenta a classificação dos arcos de acordo com a sua razão de esbeltez r / t , e também de acordo com o seu ângulo de abertura α .

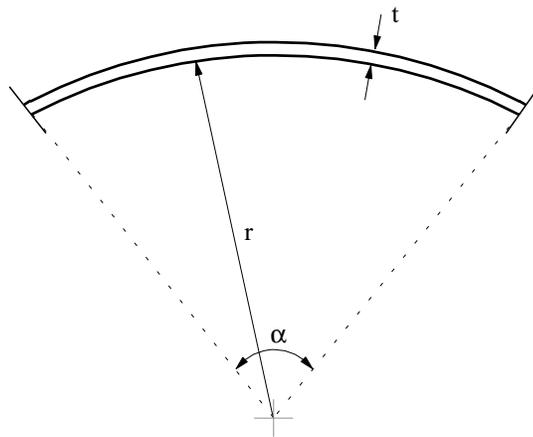


Figura 1.1 – Elementos geométricos de um arco.

Tabela 1.1 – Classificação dos arcos, Krishnan e Suresh (1998)

Razão de esbeltez		Ângulo de abertura	
Tipo de arco	Esbeltez	Tipo de arco	Ângulo
Espesso	$r / t < 40$	Abatido	$\alpha < 40$
Moderado	$r / t = 40$	Pouco abatido	$\alpha = 40$
Fino	$r / t > 40$	Profundo	$40 < \alpha < 180$
		Muito profundo	$\alpha > 180$

A análise de equilíbrio estático de sistemas estruturais pode ser feita via Método dos Elementos Finitos (MEF), que envolve a solução de um sistema de equações algébricas lineares. A modelagem via MEF dos arcos, isostáticos e hiperestáticos, pode

ser feita utilizando uma série de elementos retos para aproximar a forma geométrica real da estrutura. Porém, para algumas situações de carregamento e condições de contorno, resultados com razoável precisão só podem ser obtidos com um número elevado de elementos retos, o que torna a análise ineficiente computacionalmente.

No entanto, os esforços e deslocamentos de um arco podem ser determinados através da divisão do domínio em elementos curvos (circulares e parabólicos). Trabalhos recentes mostram que a convergência dos resultados utilizando elementos curvos para modelagem de arcos é bem mais eficiente do que com elementos retos (Marquis e Wang, 1989; Litewka e Rakowski, 1998; Raveendranath *et al.*, 1999).

Essas considerações iniciais motivaram a adoção desse tema para a presente dissertação de mestrado.

1.2 – OBJETIVO E ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

O presente trabalho é parte integrante da linha de pesquisa *Mecânica Computacional* do programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFOP, com ênfase em Estruturas Metálicas. Essa linha de pesquisa objetiva a aplicação de métodos numéricos na determinação de respostas de sistemas estruturais.

Este trabalho tem como objetivo principal o estudo e a implementação computacional de elementos finitos curvos para análise de arcos planos. Foram desenvolvidos seis elementos finitos unidimensionais, sendo quatro deles de curvatura constante, um de curvatura parabólica e um elemento finito reto.

O Capítulo 2 apresenta os conceitos estruturais básicos usados nesta dissertação. Esses conceitos são de fundamental importância para entendimento das formulações dos elementos finitos curvos apresentados nos Capítulos 3, 4 e 5.

No Capítulo 3 são apresentadas três formulações de elementos finitos unidimensionais: um elemento finito reto, um elemento finito de curvatura constante e um elemento finito de curvatura parabólica. A matriz de rigidez de cada um desses elementos é obtida através do Método da Flexibilidade, que utiliza conceitos de energia interna de deformação, 2^o Teorema de Castigliano e o Teorema da Reciprocidade de Maxwell.

A formulação do elemento finito unidimensional curvo a ser abordada no Capítulo 4 para modelagem de arcos circulares é baseada na aproximação do campo de deslocamentos. As funções de interpolação usadas para aproximar os deslocamentos são formadas por funções algébricas-trigonométricas, cujos parâmetros são obtidos através do uso das três equações de equilíbrio estático de uma viga curva.

No Capítulo 5 é apresentado a formulação do elemento finito unidimensional curvo, cuja matriz de rigidez é obtida através de uma formulação híbrida, usando o princípio variacional de Hellinger-Reissner. As funções de interpolação usadas para aproximar os deslocamentos são formadas por funções polinomiais. São introduzidas também, funções de interpolação polinomiais para aproximar o campo de tensões resultantes.

O Capítulo 6 traz os procedimentos computacionais utilizados na implementação das formulações dos elementos finitos mostrados nos Capítulos 3, 4 e 5.

Através da análise de problemas estruturais encontrado na literatura, pretende-se, no Capítulo 7, verificar a eficiência das formulações de elementos finitos estudadas neste trabalho, juntamente com as respectivas implementações computacionais realizadas.

Finalmente, no Capítulo 8, são apresentadas as conclusões e observações relacionadas ao emprego dos diversos elementos finitos utilizados nos problemas estudados do Capítulo 7. São fornecidas, ainda, algumas sugestões para o desenvolvimento de trabalhos futuros.

1.3 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Nesta seção serão apresentadas algumas pesquisas e trabalhos que são responsáveis pelos fundamentos teóricos da presente dissertação.

Recentemente, muitos pesquisadores têm desenvolvido formulações de elementos finitos unidimensionais curvos para a modelagem de arcos, anéis etc. A aplicabilidade desses elementos unidimensionais pode ser estendida levando-se em consideração a deformação transversal devido ao cisalhamento. As equações que incluem esse tipo de efeito são comumente chamados de Teoria de Viga de

Timoshenko. Nessas equações, a tensão de cisalhamento não é uniformemente distribuída ao longo da seção transversal. Devido a este fato, um fator numérico ou *coeficiente de cisalhamento* (η) é multiplicado pela tensão média de cisalhamento para dar a tensão de cisalhamento no centróide da seção transversal. Esse coeficiente de cisalhamento é definido como a razão entre a tensão de cisalhamento média numa seção transversal e a tensão de cisalhamento no centróide (Timoshenko e Gere, 1982), ou seja, tem valor adimensional e depende somente da geometria da seção transversal.

Cowper (1966) deduziu uma nova fórmula para a obtenção do coeficiente de cisalhamento a partir da integração de equações tri-dimensionais da Teoria da Elasticidade. Nesse caso, o valor de coeficiente de cisalhamento é dependente do coeficiente de Poisson, além da geometria da seção transversal.

Marquis e Wang (1989) elaboraram um elemento finito curvo parabólico, com dois nós, cada um com três graus de liberdade e seção transversal constante. A matriz de rigidez deste elemento foi obtida através do uso do Método da Flexibilidade, onde os efeitos de deformação axial, cisalhante e de flexão foram considerados na sua formulação.

Akhtar (1987) propôs um elemento curvo de raio constante para análise de arcos circulares, onde a matriz de rigidez também foi obtida através do uso do Método da Flexibilidade. No entanto, o efeito da deformação por cisalhamento não foi considerado na sua formulação. Sem esse efeito, o elemento idealizado limitou-se às análises de arcos com R (raio) $\gg t$ (espessura), o que caracteriza os arcos finos ou esbeltos.

Litewka e Rakowski (1997, 1998) desenvolveram um elemento de curvatura constante, com dois nós e seis graus de liberdade. Nesse caso, os pesquisadores obtiveram a matriz de rigidez através do princípio da energia potencial mínima, onde as funções de forma que descrevem os campos de deslocamentos tem formato algébrico-trigonométrico. Os efeitos de deformação axial, cisalhamento e flexão foram todos considerados na elaboração da matriz de rigidez. Ainda nesses trabalhos foram apresentados exemplos numéricos mostrando a influência da deformação cisalhante.

Friedman e Kosmatka (1998) elaboraram um elemento curvo onde as funções de interpolação que definem os deslocamentos também tem formato algébrico-trigonométrico. No entanto, os parâmetros que definem estas funções foram obtidos

através das equações de equilíbrio estático de uma viga curva. A matriz de rigidez também foi obtida através do princípio da energia potencial mínima, onde foram considerados os efeitos de deformação axial, cisalhante e de flexão.

Krishnan e Suresh (1998) desenvolveram um elemento curvo com dois nós, cada um com quatro graus de liberdade: deslocamentos na direção radial (cortante) e tangencial (axial), rotação da seção transversal devido à flexão e rotação devido ao cisalhamento. As funções de interpolação que descrevem o deslocamento tangencial e a rotação devido ao cisalhamento são lineares, enquanto que a função que aproxima o deslocamento radial é polinomial cúbica. Já a rotação devido à flexão é dependente das funções que descrevem o deslocamento radial e a rotação devido ao cisalhamento.

Raveendranath *et al.* (1999) elaboraram um elemento curvo onde a função de interpolação que descreve o deslocamento radial tem formato polinomial cúbico, como o elemento definido no parágrafo anterior. Já as funções de interpolação que descrevem os outros deslocamentos (tangencial e rotação) são derivadas dessa função cúbica. Essa relação de dependência é obtida através das equações de equilíbrio estático de uma viga curva.

Outro método usado para a obtenção da matriz de rigidez é o princípio variacional de Hellinger-Reissner, onde são usadas funções de interpolação para aproximar os campos de deslocamentos e de tensões resultantes. Saleb e Chang (1987) desenvolveram um elemento finito onde a matriz de rigidez foi obtida através deste princípio variacional. As funções de interpolação usadas por esses pesquisadores para aproximar os campos de deslocamentos e de tensões resultantes tinham formato polinomial. As relações cinemáticas e constitutivas, que definem as relações deformação-deslocamento e tensão-deformação, respectivamente, foram obtidas através da teoria geral de cascas de Naghdi e Reissner.

Dorfi e Busby (1994) também utilizaram o princípio de Hellinger-Reissner para a obtenção da matriz de rigidez do seu elemento curvo idealizado. Além disso, apresentaram duas funções de interpolação distintas para aproximar o campo de tensões resultantes. Já a função de interpolação usada para aproximar o campo de deslocamentos tem formato polinomial linear.

A matriz de rigidez do elemento curvo proposto por Kim e Kim (1998) também foi obtida através do princípio de Hellinger-Reissner. Nesse trabalho, no entanto, as

funções de interpolação usadas para aproximar o campo de deslocamentos possuem parâmetros extras, que são deslocamentos fora dos pontos nodais. Durante o processo de obtenção da matriz de rigidez, esses deslocamentos fora dos nós são condensados (eliminados).

Rakowski (1990) propôs um elemento reto de viga, baseado nas hipóteses de Timoshenko, com dois pontos nodais, cada nó com dois graus de liberdade: deslocamento vertical e a rotação da seção transversal. A função de interpolação que define o deslocamento vertical tem formato polinomial cúbico, enquanto que a rotação tem função de interpolação quadrática. A matriz de rigidez foi obtida, mais uma vez, através do princípio da energia potencial mínima.

Paramasivam *et al.* (1992) elaboraram um elemento reto de viga com três pontos nodais. Os pontos nodais nas extremidades do elemento possuem dois graus de liberdade (deslocamento vertical e rotação da seção transversal), enquanto que o ponto nodal intermediário tem somente um grau de liberdade (rotação da seção transversal). A matriz de rigidez foi obtida através do princípio da energia potencial mínima.

Yunhua (1998) propôs um elemento finito reto de viga, com dois pontos nodais, cada um com dois graus de liberdade. As funções de interpolação, usadas para aproximar o campo de deslocamentos, têm formato polinomial. A matriz de rigidez é obtida nesse artigo de três maneiras diferentes: através do princípio da energia potencial mínima, do princípio variacional de Hellinger-Reissner e também através do princípio variacional de Hu-Washizu. Nesse último princípio são definidas funções de interpolação para os campos de deslocamentos, de tensões resultantes e de deformações. Yunhua desenvolve essas formulações através de linguagem matemática simbólica, utilizando o Software Maple.

Outro trabalho recente, Eriksson e Pacoste (1999), também ilustra suas formulações de elementos finitos através de linguagem matemática simbólica, utilizando o Software Maple e Mathematica.

2

CONCEITOS BÁSICOS

2.1 - INTRODUÇÃO

Este capítulo tem como objetivo apresentar os conceitos estruturais básicos usados nesta dissertação. Esses conceitos são de fundamental importância para entendimento das formulações dos elementos finitos curvos apresentados nos Capítulos 3, 4 e 5.

No Capítulo 3, as matrizes de rigidez dos elementos finitos curvos são obtidas através do Método da Flexibilidade, que utiliza os conceitos de energia interna de deformação, 2º Teorema de Castigliano e o Teorema de Maxwell. Esses conceitos são ilustrados aqui nas Seções 2.3, 2.4 e 2.5, respectivamente.

No Capítulo 4, através da aplicação do princípio da energia potencial mínima, chega-se na matriz de rigidez dos elementos finitos curvos. Já no Capítulo 5, a matriz de rigidez é obtida através da aplicação do princípio variacional de Hellinger-Reissner, onde são definidas funções de interpolação para deslocamentos e tensões resultantes.

As relações cinemáticas e as constitutivas para os vários elementos finitos curvos estudados nesta dissertação, são fornecidas nas seções 2.6 e 2.7, respectivamente. Na última seção são definidos os diversos conceitos de princípios variacionais utilizados para a formulação de elementos finitos.

2.2 - TEOREMA DE CLAPEYRON

O teorema de Clapeyron estabelece que a energia de deformação U de um sólido submetido a um sistema de ações P_i é igual à metade do valor da soma dos produtos das

intensidades dessas forças pelas componentes dos deslocamentos de seus pontos de aplicação nas direções das forças.

Considerem-se “n” ações externas P_1, P_2, \dots, P_n (forças ou momentos) e os respectivos deslocamentos finais v_1, v_2, \dots, v_n (translações ou rotações).

Uma vez que o trabalho realizado pelas ações externas é independente da ordem de aplicação das ações e depende apenas de seus valores finais, pode-se admitir que as mesmas variam de seus valores iniciais até os valores finais P_i , assumindo valores intermediários kP_i , onde k é um coeficiente que varia de zero até o valor final 1.

Seja v_i o valor final do deslocamento do ponto i na direção da ação P_i correspondente. Como o sólido é elástico, uma vez que a ação genérica aplicado no ponto i alcançou o valor intermediário kP_i , a componente do deslocamento do ponto i na direção da força atingiu o valor kv_i .

Quando a ação aumenta de kP_i para $(k+dk)P_i$, a correspondente componente do deslocamento aumenta da quantidade $v_i dk$ na direção de P_i e o correspondente trabalho, desprezados os termos de ordem superior, vale:

$$dW = \sum_{i=1}^n kP_i v_i dk = \sum_{i=1}^n P_i v_i k dk \quad (2.1)$$

Integrando-se então entre os limites $k=0$ e $k=1$, chega-se a:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i v_i \quad (2.2)$$

o que demonstra a proposição, já que para sistemas conservativos o trabalho realizado é igual à energia de deformação armazenada no sólido.

2.3 – ENERGIA DE DEFORMAÇÃO

Quando um sólido é deformado no regime elástico diz-se que a ação que provocou a deformação realizou um trabalho que será totalmente transformado em energia quando cessar a ação.

A energia armazenada na estrutura devida à deformação dos elementos estruturais é denominada energia de deformação elástica e é igual ao trabalho realizado pelas forças atuantes.

O valor da energia de deformação elástica de um sólido pode ser obtido através da aplicação do Teorema de Clapeyron apresentado na seção anterior. As Figuras 2.1a, 2.1b e 2.1c ilustram as deformações de membrana ($d\delta$), cisalhante ($d\lambda$) e de flexão ($d\phi$), respectivamente.

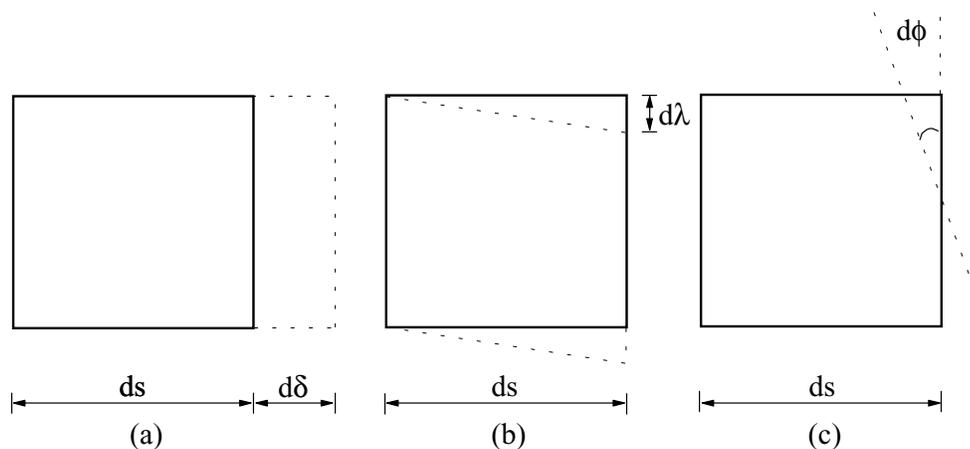


Figura 2.1 – Deformações: (a) axial; (b) cisalhamento; (c) flexão.

O trabalho total realizado pelo esforço normal N , esforço cortante V e pelo momento fletor M , devido às deformações $d\delta$, $d\lambda$ e $d\phi$, respectivamente, é dado, de acordo com a Equação (2.2):

$$dW = \frac{1}{2} N d\delta + \frac{1}{2} V d\lambda + \frac{1}{2} M d\phi \quad (2.3)$$

Sabe-se ainda que as deformações de membrana, cisalhante e de flexão, de um elemento de estrutura de comprimento ds , são dadas por (Timoshenko e Gere, 1982):

$$d\delta = \frac{N}{EA} ds \quad (2.4a)$$

$$d\lambda = \frac{\eta V}{GA} ds \quad (2.4b)$$

$$d\phi = \frac{M}{EI} ds \quad (2.4c)$$

onde E é o módulo de elasticidade longitudinal do material e G é o módulo de elasticidade transversal; I é o momento de inércia e A é a área da seção transversal; η é um fator numérico, ou coeficiente de cisalhamento, pelo qual a tensão média deve ser multiplicada para dar a tensão de cisalhamento no centróide da seção transversal.

O valor do coeficiente de cisalhamento η presente na parcela da deformação cisalhante depende da geometria da seção transversal e também é função do coeficiente de poisson ν . Alguns valores do coeficiente de cisalhamento são dados na Tabela 2.1 (Cowper, 1966).

Substituindo-se (2.4a,b,c) em (2.3), chega-se a:

$$dW = \frac{1}{2} \frac{N^2}{EA} ds + \frac{1}{2} \frac{\eta V^2}{GA} ds + \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} ds \quad (2.5)$$

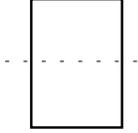
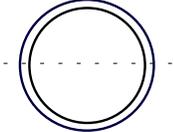
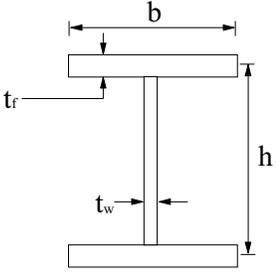
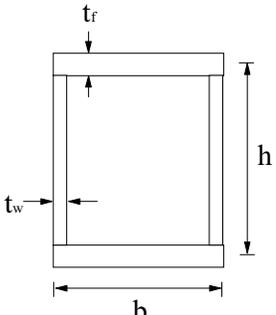
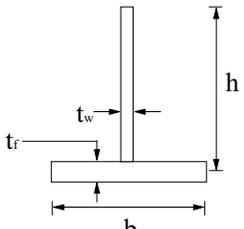
Como a energia de deformação elástica é igual ao trabalho realizado pelas ações atuantes, tem-se então que $U = W$. Assim a energia de deformação elástica total do sólido S é dada por:

$$U = W = \int_s dW \quad (2.6)$$

Substituindo-se agora (2.5) em (2.6), obtém-se:

$$U = \int_s \frac{N^2}{2EA} ds + \int_s \frac{\eta V^2}{2GA} ds + \int_s \frac{M^2}{2EI} ds \quad (2.7)$$

Tabela 2.1 – Coeficiente de cisalhamento η .

Seção	η
	$\eta = \frac{10(1 + \nu)}{12 + 11\nu}$
	$\eta = \frac{2(1 + \nu)}{4 + 3\nu}$
	$\eta = \frac{10(1 + \nu)(1 + 3m)^2}{p + \nu q + 30n^2(m + m^2) + 5\nu n^2(8m + 9m^2)}, \text{ sendo}$ $p = 12 + 72m + 150m^2 + 90m^3$ $q = 11 + 66m + 135m^2 + 90m^3$ $m = 2bt_f/ht; n = b/h$
	$\eta = \frac{10(1 + \nu)(1 + 3m)^2}{p + \nu q + 10n^2((3 + \nu)m + 3m^2)}, \text{ sendo}$ $p = 12 + 72m + 150m^2 + 90m^3$ $q = 11 + 66m + 135m^2 + 90m^3$ $m = bt_f/ht_w$ $n = b/h$
	$\eta = \frac{10(1 + \nu)(1 + 4m)^2}{p + \nu q + 30n^2(m + m^2) + 10\nu n^2(4m + 5m^2 + m^3)}$ $p = 12 + 96m + 276m^2 + 192m^3$ $q = 11 + 88m + 248m^2 + 216m^3$ $m = bt_f/ht_w; n = b/h$

2.4 – TEOREMA DE MAXWELL

Suponha um sólido elástico com vínculos fixos ou elásticos submetidos a dois sistemas de ações A e B (forças ou momentos), como mostrado a Figura 2.2.

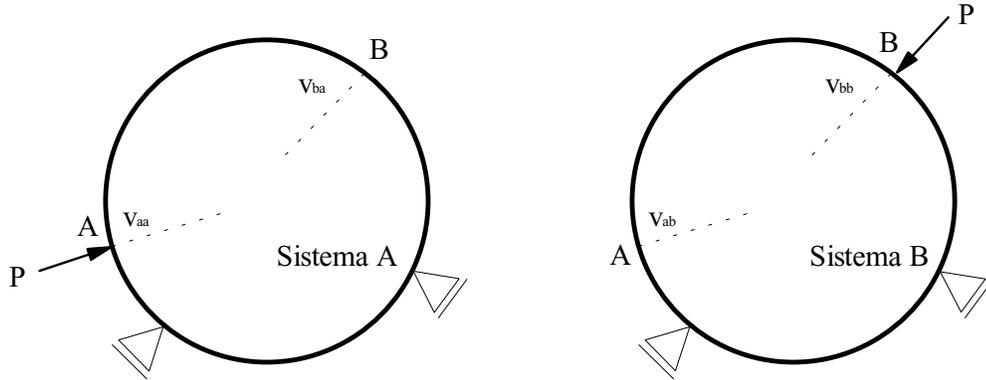


Figura 2.2 – Sistemas de esforços atuando no sólido elástico.

No sistema A uma ação P, cuja linha de atuação é a reta a, variando lentamente de zero até o valor final P, no ponto A, provocou deslocamentos v_{aa} na direção a e v_{ba} na direção b (deve-se entender que v_{aa} significa deslocamento na direção a provocada pela ação atuando na direção a, e v_{ba} é o deslocamentos na direção b produzida pela força atuando na direção a).

O trabalho W_A realizado pela ação P no sistema A vale:

$$W_A = \frac{1}{2} P v_{aa} \quad (2.8)$$

Mantendo-se P aplicada no ponto A, faz-se com que outra ação P atue da mesma maneira no ponto B, com linha de atuação coincidente com a reta b. Dessa forma, o trabalho W_B realizado pelas ações vale:

$$W_B = \frac{1}{2} P v_{bb} + P v_{ab} \quad (2.9)$$

O segundo monômio do lado direito da igualdade (2.9) não leva o coeficiente 1/2 porque a carga P já estava totalmente aplicada no ponto A quando a outra carga P provocou o deslocamento v_{ab} .

O trabalho total realizado pela atuação das duas forças é dado pela soma das igualdades (2.8) e (2.9), valendo:

$$W = \frac{1}{2} P v_{aa} + \frac{1}{2} P v_{bb} + P v_{ab} \quad (2.10)$$

Supõe-se, agora, que se comece aplicando ao sólido, lentamente, a ação P no ponto B, provocando deflexões v_{bb} e v_{ab} , respectivamente, nos pontos B e A. O trabalho realizado por essa força vale:

$$W_B^* = \frac{1}{2} P v_{bb} \quad (2.11)$$

Mantendo-se P atuando no ponto B e aplicando-se lentamente outra ação P no ponto A, direção a, o trabalho realizado pelas forças vale:

$$W_A^* = \frac{1}{2} P v_{aa} + P v_{ba} \quad (2.12)$$

Atuando as duas forças em sequência, o trabalho total realizado vale a soma das igualdades (2.11) e (2.12), ou seja:

$$W^* = \frac{1}{2} P v_{aa} + \frac{1}{2} P v_{bb} + P v_{ba} \quad (2.13)$$

Como as relações (2.10) e (2.13) são iguais, conclui-se que:

$$v_{ab} = v_{ba} \quad (2.14)$$

ou seja, o deslocamento na direção “a” causado pela ação atuando na direção “b” é igual ao deslocamento na direção “b” causado pela ação atuando na direção “a”.

2.5 – SEGUNDO TEOREMA DE CASTIGLIANO

Considere-se uma estrutura sujeita a n ações P_1, P_2, \dots, P_n , que produzem deslocamentos correspondentes, $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$. P e δ representam, respectivamente, as ações e os deslocamentos correspondentes, em sentido generalizado. Sabe-se, que a energia complementar U^* pode ser calculada através da seguinte expressão (Timoshenko e Gere, 1982):

$$U^* = \int \delta dP \quad (2.15)$$

onde U^* é função das ações P_1, P_2, \dots, P_n . Então, imaginando-se que a uma ação P_i , seja dado um pequeno incremento dP_i enquanto as outras não sofrem alteração, a energia complementar terá um pequeno incremento, dU^* , que é:

$$dU^* = \frac{\partial U^*}{\partial P_i} dP_i \quad (2.16)$$

A equação anterior mostra matematicamente que o incremento dU^* é igual à razão de variação de U^* em relação a P_i , multiplicado pelo incremento em P_i .

Outro meio de se obter uma expressão para dU^* consiste em considerar o trabalho complementar das ações, quando a ação P_i sofre uma variação dP_i . A única ação que realiza qualquer trabalho complementar é P_i , porque as outras ações não foram alteradas. Consequentemente, o aumento na energia complementar é produto do deslocamento δ_i pelo incremento dP_i da ação, isto é:

$$dU^* = \delta_i dP_i \quad (2.17)$$

Igualando-se então (2.16) e (2.17) para dU^* , obtém-se:

$$\delta_i = \frac{\partial U^*}{\partial P_i} \quad (2.18)$$

Se a estrutura comporta-se linearmente, tem-se que $U = U^*$. A Equação (2.18) pode ser então reescrita da seguinte forma:

$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i} \quad (2.19)$$

A Equação (2.19) mostra que *a derivada parcial da energia de deformação de um determinado sólido em relação a uma das ações é igual ao deslocamento do ponto de aplicação da ação na direção da ação*, desde que a energia de deformação seja expressa em função das cargas.

2.6 – RELAÇÕES CINEMÁTICAS

A teoria de vigas curvas considerada neste trabalho é baseada na teoria desenvolvida por Naghdi e Reissner para cascas. Para vigas curvas espessas, as componentes de deformação normal e de cisalhamento, designadas respectivamente por ϵ_x e γ_{xy} , localizadas a uma distância y da linha neutra de uma seção transversal genérica, são dadas por (Saleb e Chang, 1987):

$$\epsilon_x = \frac{1}{1 - y/r} (\epsilon_0 - y\kappa) \quad (2.20a)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\gamma_0}{1 - y/r} \quad (2.20b)$$

onde ε_0 e γ_0 são as deformações específica normal e de cisalhamento, respectivamente, localizadas na linha neutra de uma seção transversal genérica; κ é a mudança de curvatura dessa seção transversal. A relação de deformação-deslocamento linear para uma viga curva, é então dada por (Saleb e Chang, 1987):

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{v}{r} \quad (2.21a)$$

$$\gamma_0 = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial x} - \phi \quad (2.21b)$$

$$\kappa = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (2.21c)$$

sendo u , v e ϕ os deslocamentos na direção normal (tangencial), radial e a rotação da seção transversal, respectivamente. Estas relações cinemáticas podem ser escritas de uma forma mais compacta, ou seja:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (2.22)$$

onde, $\boldsymbol{\varepsilon}^T = \{\varepsilon_0 \quad \gamma_0 \quad \kappa\}$, $\mathbf{u}^T = \{u \quad v \quad \phi\}$ e a matriz \mathbf{D} tem a seguinte forma:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \partial/\partial x & -1 & 0 \\ 1 & \partial/\partial x & -r \\ 0 & 0 & \partial/\partial x \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

2.7 – RELAÇÕES CONSTITUTIVAS

As componentes de tensão normal e de cisalhamento, que estão relacionadas com as deformações em (2.20a,b), são dadas por (Timoshenko e Gere, 1982):

$$\sigma_x = E\varepsilon_x \quad (2.24a)$$

$$\tau_{xy} = \eta G \gamma_{xy} \quad (2.24b)$$

Os esforços normal, cortante e momento fletor de uma seção transversal são obtidos integrando as tensões ao longo da área da seção transversal, ou seja:

$$N = \int_A \sigma_x dA \quad (2.25a)$$

$$V = \int_A \tau_{xy} dA \quad (2.25b)$$

$$M = - \int_A \sigma_x y dA \quad (2.25c)$$

Substituindo-se (2.20a,b) e (2.24a,b) em (2.25a,b,c), chega-se a:

$$N = \int_A \frac{E}{1 - y/r} (\epsilon_0 - y\kappa) dA \quad (2.26a)$$

$$V = \int_A \frac{\eta G}{1 - y/r} \gamma_0 dA \quad (2.26b)$$

$$M = - \int_A \frac{E}{1 - y/r} (\epsilon_0 - y\kappa) y dA \quad (2.26c)$$

Admitindo então que $(1 - y/r)^{-1} \approx 1 + y/r + (y/r)^2$, e substituindo essa aproximação em (2.26a,b,c), chega-se às seguintes expressões para N, V e M, já desconsiderados os termos de ordem superior:

$$N = EA \left(1 + \frac{I}{Ar^2} \right) \epsilon_0 - \frac{EI}{r} \kappa \quad (2.27a)$$

$$V = \eta GA \left(1 + \frac{I}{Ar^2} \right) \gamma_0 \approx \eta GA \gamma_0 \quad (2.27b)$$

$$M = EI \kappa - \frac{EI}{r} \epsilon_0 \quad (2.27c)$$

onde as seguintes relações foram consideradas: $\int_A dA = A$, $\int_A y dA = 0$ e $\int_A y^2 dA = I$.

Como no caso das deformações, essas relações podem ser escritas de uma forma mais compacta, ou seja:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{J}_1 \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.28)$$

sendo $\boldsymbol{\sigma}^T = \{N \quad V \quad M\}$ e a matriz \mathbf{J}_1 :

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} EA \left(1 + \frac{1}{Ar^2} \right) & 0 & -\frac{EI}{r} \\ 0 & \eta GA & 0 \\ -\frac{EI}{r} & 0 & EI \end{bmatrix}.$$

Essas relações constitutivas podem ser expressas de uma forma mais simples, considerando-se apenas as deformações normal e de cisalhamento constantes ao longo de toda a extensão da seção transversal. Fazendo-se, então, $y = 0$ em (2.20a,b), chega-se a:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \quad (2.28a)$$

$$\gamma = \gamma_0 \quad (2.28b)$$

Substituindo-se (2.24a,b) e as relações anteriores em (2.25), obtém-se:

$$N = EA\varepsilon_0 \quad (2.29a)$$

$$V = \eta GA\gamma_0 \quad (2.29b)$$

$$M = EI\kappa \quad (2.29c)$$

Mais uma vez, essas relações constitutivas podem ser escritas na forma matricial:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{J}_2 \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.30)$$

onde a matriz \mathbf{J}_2 é organizada da seguinte forma:

$$\mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & \eta GA & 0 \\ 0 & 0 & EI \end{bmatrix}.$$

2.8 – PRINCÍPIOS VARIACIONAIS

A matriz de rigidez dos elementos finitos curvos estudados pode ser obtida através do Método da Flexibilidade, onde são usados os conceitos de energia interna de deformação, teorema de Maxwell e o 2º teorema de Castigliano. Essa metodologia é utilizada neste trabalho nas formulações apresentadas no Capítulo 3.

A matriz de rigidez pode também ser obtida através da aplicação de princípios variacionais. O princípio variacional mais utilizado para a obtenção da matriz de rigidez é o da energia potencial mínima. Nesse caso, o indicador variacional é função dos campos de deslocamentos. A matriz de rigidez do elemento finito curvo proposto no Capítulo 4 é obtida através desse princípio, onde são definidas funções de interpolação para aproximar o comportamento dos deslocamentos nas direções normal e radial, e a rotação da seção transversal.

Outro princípio variacional que pode ser empregado para a obtenção da matriz de rigidez do elemento é o da energia complementar total. Nesse caso, o indicador variacional é função dos campos de tensões resultantes.

O princípio variacional pode ainda ser generalizado de tal modo que o indicador variacional seja função dos campos de deslocamentos, de deformações e de tensões resultantes. Dessa forma, relações constitutivas e cinemáticas podem ser obtidas diretamente do variacional. Esse princípio generalizado é chamado de princípio variacional de Hu-Washizu (Yunhua, 1998).

Outro princípio variacional utilizado para a obtenção da matriz de rigidez é o de Hellinger-Reissner, derivado do princípio de Hu-Washizu. No princípio de Hellinger-Reissner *tipo 1*, o funcional de energia é função dos campos de deslocamentos e de tensões resultantes. As relações constitutivas são obtidas diretamente do indicador variacional. No princípio de Hellinger-Reissner *tipo 2*, o variacional é função dos campos de deslocamentos e de deformações. Nesse caso, as relações cinemáticas são obtidas diretamente do funcional de energia.

Elementos finitos definidos segundo esses princípios são comumente chamados de modelos mistos, devido ao uso de campos mistos no mesmo indicador variacional (deslocamentos, tensões resultantes e deformações).

A matriz de rigidez do elemento finito curvo idealizado no Capítulo 5 será obtida através do princípio variacional de Hellinger-Reissner *tipo 1*, onde são definidas funções de aproximação para os deslocamentos e de tensões resultantes nas direções normal, radial e a rotação da seção transversal.

3

ELEMENTO FINITO CURVO: MÉTODO DA FLEXIBILIDADE

3.1 – INTRODUÇÃO

Neste Capítulo são apresentados três formulações de elementos finitos unidimensionais baseados no Método da Flexibilidade. Todos os elementos possuem dois pontos nodais, cada um com três graus de liberdade. Para a obtenção da matriz de rigidez de cada elemento foram considerados os efeitos de deformação por flexão, esforço axial e cisalhamento.

Na Seção 3.2 é apresentado um roteiro para a formulação da matriz de rigidez de um elemento finito unidimensional genérico, utilizando conceitos de energia interna de deformação, 2º Teorema de Castigliano e o Teorema da Reciprocidade de Maxwell. As formulações apresentadas nas seções seguintes são obtidas seguindo esse roteiro.

Na seção 3.3 é apresentado a formulação da matriz de rigidez do elemento finito unidimensional reto, baseado nas hipóteses de Timoshenko. A Seção 3.4 é responsável pela formulação da matriz de rigidez de um elemento de curvatura constante (Akhtar, 1987). A formulação da matriz de rigidez de um elemento finito parabólico baseado no trabalho de Marquis e Wang (1989) pode ser vista na última seção desse capítulo.

3.2 – ROTEIRO DE CÁLCULO DA MATRIZ DE RIGIDEZ

Seja um elemento finito unidimensional, como ilustrado nas Figuras 3.1a, 3.5a e 3.7, com dois pontos nodais, onde em cada nó são considerados três graus de liberdade. Para esse elemento, a seguinte relação de equilíbrio pode ser definida:

$$\mathbf{p} = \mathbf{K}_e \mathbf{w} \quad (3.1)$$

onde, $\mathbf{p}^T = \{P_1 \quad Q_1 \quad M_1 \mid P_2 \quad Q_2 \quad M_2\}$ caracteriza o vetor de cargas externas, $\mathbf{w}^T = \{u_1 \quad v_1 \quad \phi_1 \mid u_2 \quad v_2 \quad \phi_2\}$ os deslocamentos nodais e \mathbf{K}_e é a matriz de rigidez, que pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{K}_e = \left[\begin{array}{ccc|ccc} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ \hline & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array} \right] \quad (3.2)$$

sendo \mathbf{K}_{11} , \mathbf{K}_{12} , \mathbf{K}_{21} e \mathbf{K}_{22} submatrizes de ordem 3x3. A seguir é descrito um procedimento para determinação dessas submatrizes, e por conseguinte, definição da matriz de rigidez do elemento.

A energia interna de deformação de cada elemento é dada segundo a equação (2.7), ou seja:

$$U = \int_L \frac{M^2}{2EI} ds + \int_L \frac{N^2}{2AE} ds + \int_L \frac{\eta V^2}{2AG} ds \quad (3.3)$$

A submatriz \mathbf{K}_{11} pode ser obtida através da aplicação do 2º Teorema de Castigliano. Dessa forma, escreve-se:

$$u_1 = \frac{\partial U}{\partial P_1}, \quad v_1 = \frac{\partial U}{\partial Q_1} \quad \text{e} \quad \phi_1 = \frac{\partial U}{\partial M_1} \quad (3.4)$$

ou escrevendo-se numa forma matricial, chega-se a:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \phi_1 \end{Bmatrix} = \mathbf{F}_{11} \begin{Bmatrix} P_1 \\ Q_1 \\ M_1 \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

onde \mathbf{F}_{11} é uma submatriz de flexibilidade de ordem 3x3. Considerando-se $\mathbf{w}_1^T = \{u_1 \ v_1 \ \phi_1\}$ e $\mathbf{p}_1^T = \{P_1 \ Q_1 \ M_1\}$ e resolvendo a equação anterior para as forças nodais, chega-se a:

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{K}_{11} \mathbf{w}_1 \quad (3.6)$$

sendo \mathbf{K}_{11} definida como a inversa da submatriz de flexibilidade (\mathbf{F}_{11}^{-1}).

A submatriz \mathbf{K}_{12} pode ser obtida através do equilíbrio das forças e momentos entre os nós 1 e 2. Assim, escreve-se:

$$\begin{Bmatrix} P_2 \\ Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{C} \begin{Bmatrix} P_1 \\ Q_1 \\ M_1 \end{Bmatrix}, \text{ ou } \mathbf{p}_2 = \mathbf{C} \mathbf{p}_1 \quad (3.7)$$

onde \mathbf{C} é uma matriz de ordem 3x3 e $\mathbf{p}_2^T = \{P_2 \ Q_2 \ M_2\}$. Através da substituição de (3.6) em (3.7), chega-se a:

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{C} \mathbf{K}_{11} \mathbf{w}_1 \quad (3.8)$$

Fazendo-se então $\mathbf{K}_{21} = \mathbf{C} \mathbf{K}_{11}$, pode-se escrever:

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{K}_{21} \mathbf{w}_1 \quad (3.9)$$

Observe que através do Teorema de Maxwell, pode-se afirmar que os deslocamentos do nó 1 causados por forças atuando no nó 2, são iguais aos deslocamentos do nó 2 causados por forças atuando no nó 1. Dessa forma, escreve-se:

$$\mathbf{K}_{12} = \mathbf{K}_{21}^T. \quad (3.10)$$

Como no caso da submatriz \mathbf{K}_{11} , \mathbf{K}_{22} é obtida também através da aplicação do 2º Teorema de Castigliano, ou seja:

$$u_2 = \frac{\partial U}{\partial P_2}, \quad v_2 = \frac{\partial U}{\partial Q_2} \quad \text{e} \quad \phi_2 = \frac{\partial U}{\partial M_2} \quad (3.11)$$

Assim, fazendo $\mathbf{w}_2^T = \{u_2 \quad v_2 \quad \phi_2\}$, e seguindo os mesmos procedimentos usados para a obtenção da submatriz \mathbf{K}_{11} , chega-se a:

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{K}_{22} \mathbf{w}_2 \quad (3.12)$$

3.3 – ELEMENTO FINITO UNIDIMENSIONAL RETO

Nesta seção é apresentada a formulação da matriz de rigidez do elemento finito unidimensional reto. Na subseção 3.3.1 é obtida a matriz de rigidez do elemento para vetores de forças e deslocamentos num sistema local de coordenadas. Em seguida essa matriz de rigidez é obtida no sistema global de coordenadas.

3.3.1 – Formulação da Matriz de Rigidez

Como ilustrado na Figura 3.1a, o elemento finito reto proposto possui dois nós, cada um com três graus de liberdade: dois deslocamentos (u_i e v_i) e uma rotação da seção transversal (ϕ_i).

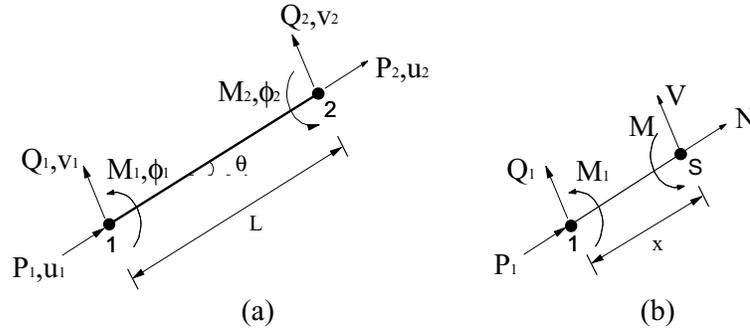


Figura 3.1 – (a) Elemento finito de pórtico; (b) Esforços em ponto genérico S.

A matriz de rigidez do presente elemento tem a forma apresentada na Equação (3.1). A submatriz \mathbf{K}_{11} é então obtida através da relação de equilíbrio entre o ponto nodal 1 e um ponto genérico S (Figura 3.1b):

$$N = -P_1 \quad (3.13a)$$

$$V = -Q_1 \quad (3.13b)$$

$$M = -M_1 + Q_1 x \quad (3.13c)$$

Substituindo-se as Equações (3.13a,b,c) em (3.3) e depois desenvolvendo-se as integrais, chega-se a:

$$U = \frac{M_1^2 L}{2EI} - \frac{M_1 Q_1 L^2}{2EI} + \frac{Q_1^2 L^3}{6EI} + \frac{P_1^2}{2EA} + \frac{\eta Q_1^2 L}{2GA} \quad (3.14)$$

Derivando-se agora a Equação (3.14) em relação aos carregamentos nodais P_1 , Q_1 e M_1 , chega-se a:

$$u_1 = \frac{P_1 L}{EA} \quad (3.15a)$$

$$v_1 = \frac{Q_1 L^3}{3EI} + \frac{\eta Q_1 L}{GA} - \frac{M_1 L^2}{2EI} = \left(\frac{L^3}{3EI} + \frac{\eta L}{GA} \right) Q_1 - \frac{M_1 L^2}{2EI} \quad (3.15b)$$

$$\phi_1 = \frac{M_1 L}{EI} - \frac{Q_1 L^2}{2EI} \quad (3.15c)$$

ou numa forma matricial:

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{F}_{11} \mathbf{p}_1 \quad (3.16)$$

onde a matriz de flexibilidade \mathbf{F}_{11} é definida segundo:

$$\mathbf{F}_{11} = \begin{bmatrix} \frac{L}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^3}{3EI} + \frac{\eta L}{GA} & -\frac{L^2}{2EI} \\ 0 & -\frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} \end{bmatrix}.$$

Resolvendo-se então a expressão anterior para as forças nodais, escreve-se:

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{K}_{11} \mathbf{w}_1 \quad (3.17)$$

sendo a submatriz \mathbf{K}_{11} definida de acordo:

$$\mathbf{K}_{11} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EIGA}{\lambda L} & \frac{6EIGA}{\lambda} \\ 0 & \frac{6EIGA}{\lambda} & \frac{4EI(L^2GA + 3\eta EI)}{\lambda L} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

onde, $\lambda = L^2GA + 12\eta EI$.

A submatriz \mathbf{K}_{22} , como no caso de \mathbf{K}_{11} , pode ser obtida através do equilíbrio entre o nó 2 e um ponto genérico S (Figura 3.1b), ou seja:

$$N = -P_2 \quad (3.19a)$$

$$V = -Q_2 \quad (3.19b)$$

$$M = -M_2 - Q_2x \quad (3.19c)$$

Assim, escreve-se diretamente:

$$\mathbf{K}_{22} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EIGA}{\lambda L} & -\frac{6EIGA}{\lambda} \\ 0 & -\frac{6EIGA}{\lambda} & \frac{4EI(L^2GA + 3\eta EI)}{\lambda L} \end{bmatrix}$$

A submatriz \mathbf{K}_{21} é obtida fazendo o equilíbrio de forças e momento entre o ponto nodal 1 e o ponto nodal 2 (Figura 3.1a):

$$P_2 = -P_1 \quad (3.20a)$$

$$Q_2 = -Q_1 \quad (3.20b)$$

$$M_2 = LQ_1 - M_1 \quad (3.20c)$$

ou, numa forma matricial:

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{C}\mathbf{p}_1 \quad (3.21)$$

onde a matriz \mathbf{C} é dada por:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & L & -1 \end{bmatrix}.$$

Dessa forma, de acordo com a Equação (3.8), chega-se na expressão de \mathbf{K}_{21} :

$$\mathbf{K}_{21} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EIGA}{\lambda L} & \frac{6EIGA}{\lambda} \\ 0 & -\frac{6EIGA}{\lambda} & \frac{2EI(L^2GA + 6\eta EI)}{\lambda L} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Finalmente, escreve-se a matriz de rigidez do elemento finito de pórtico de Timoshenko:

$$\mathbf{K}_e = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EIGA}{\lambda L} & \frac{6EIGA}{\lambda} & 0 & -\frac{12EIGA}{\lambda L} & -\frac{6EIGA}{\lambda} \\ 0 & \frac{6EIGA}{\lambda} & \frac{4EI(L^2GA + 3\eta EI)}{\lambda L} & 0 & \frac{6EIGA}{\lambda} & \frac{2EI(L^2GA - 6\eta EI)}{\lambda L} \\ \hline -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EIGA}{\lambda L} & \frac{6EIGA}{\lambda} & 0 & \frac{12EIGA}{\lambda L} & -\frac{6EIGA}{\lambda} \\ 0 & -\frac{6EIGA}{\lambda} & \frac{2EI(L^2GA - 6\eta EI)}{\lambda L} & 0 & -\frac{6EIGA}{\lambda} & \frac{4EI(L^2GA + 3\eta EI)}{\lambda L} \end{array} \right]$$

A Figura 3.2 apresenta uma rotina desenvolvida no Software Maple (Maple 6, 2000) para a determinação da matriz de rigidez do elemento finito proposto nesta seção. Nessa Figura, k representa o coeficiente de cisalhamento.

```

restart:
with(linalg):

# Equilíbrio nó 1 / ponto genérico S
# Submatriz K11
N:= -P1:
V:= -Q1:
M:= -M1+Q1*x:
U:=int(M^2/2/EI+N^2/2/EA+k*V^2/2/GA,x=0..L):
F11:= hessian(U,[P1,Q1,M1]):
K11:= inverse(F11):

# Equilíbrio nó 1 / nó 2
# Submatriz K21
x:= L:
P2:= N:
Q2:= V:
M2:= M:
p2:= vector([P2,Q2,M2]):
C:= jacobian(p2,[P1,Q1,M1]):
K21:= multiply(C,K11):
unassign('P2','Q2','M2','x'):

# Equilíbrio nó 2 / ponto genérico S
# Submatriz K22
N:= -P2:
V:= -Q2:
M:= -M2-Q2*x:
U:=int(M^2/2/EI+N^2/2/EA+k*V^2/2/GA,x=0..L):
F22:= hessian(U,[P2,Q2,M2]):
K22:= inverse(F22):

```

Figura 3.2 – Extração simbólica da matriz de rigidez via Maple.

Através da rotina apresentada na Figura 3.3, a matriz de rigidez obtida pela rotina anterior é codificada na linguagem C e armazenada no arquivo 'elemento'.

```

# Montagem Matriz do elemento K
K:= matrix(6,6,0):
for i to 3 do
  for j to 3 do
    K[i,j]:= K11[i,j]:
    K[i+3,j]:= K21[i,j]:
    K[i,j+3]:= K21[j,i]:
    K[i+3,j+3]:= K22[i,j]:
  od:
od:
with(codegen):
C(K,filename='elemento');

```

Figura 3.3 – Montagem da matriz e transformação para C.

3.3.2 – Sistema local x global

Os componentes dos vetores mostrados na Equação (3.1) se referem ao sistema local de coordenadas u,v da Figura 3.4. Os vetores dessa equação devem, então, ser rotacionados para o sistema de coordenadas global X,Y .

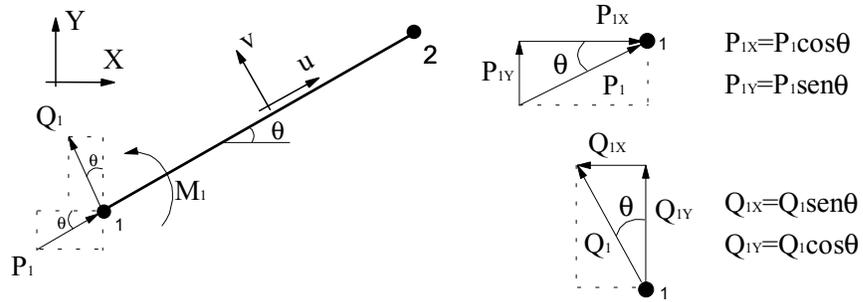


Figura 3.4 – Sistema de coordenadas local/global.

Fazendo-se o equilíbrio de forças nas direções X e Y no ponto 1, tem-se:

$$F_{1X} = Q_1 \text{ sen } \theta + P_1 \text{ cos } \theta \quad (3.23a)$$

$$F_{1Y} = Q_1 \text{ cos } \theta - P_1 \text{ sen } \theta \quad (3.23b)$$

$$M_{1XY} = M_1 \quad (3.23c)$$

com F_{1X} e F_{1Y} sendo a resultante das forças do ponto 1 nas direções horizontal e vertical, respectivamente. Escrevendo-se as expressões anteriores numa forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} F_{1X} \\ F_{1Y} \\ M_{1XY} \end{Bmatrix} = \mathbf{R} \begin{Bmatrix} P_1 \\ Q_1 \\ M_1 \end{Bmatrix} \quad (3.24)$$

chega-se na matriz de rotação, dada por:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta & 0 \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

A Equação (3.24) refere-se à rotação dos vetores do nó 1. Para os dois nós, tem-se:

$$\mathbf{R}_e = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta & 0 & & & \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & \cos \theta & \text{sen } \theta & 0 \\ & & & -\text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Multiplicando-se agora a matriz de rotação do elemento \mathbf{R}_e em ambos os lados da Equação (3.1),

$$\mathbf{R}_e \mathbf{p} = \mathbf{K}_e \mathbf{R}_e \mathbf{w}$$

e resolvendo-se então para as forças nodais, chega-se a:

$$\mathbf{p} = \mathbf{R}_e^{-1} \mathbf{K}_e \mathbf{R}_e \mathbf{w}$$

A Equação anterior pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{p} = \mathbf{K}_e^g \mathbf{w}$$

onde \mathbf{K}_e^g é a matriz de rigidez global do elemento, que é definida segundo:

$$\mathbf{K}_e^g = \mathbf{R}_e^{-1} \mathbf{K}_e \mathbf{R}_e$$

3.4 – ELEMENTO FINITO DE CURVATURA CONSTANTE

Como ilustrado na Figura 3.5a, o elemento finito proposto tem curvatura constante, dois pontos nodais, cada um com três graus de liberdade: um deslocamento na direção radial, outro na direção tangencial e a rotação da seção transversal, e são representados, respectivamente, por v_i , u_i e ϕ_i .

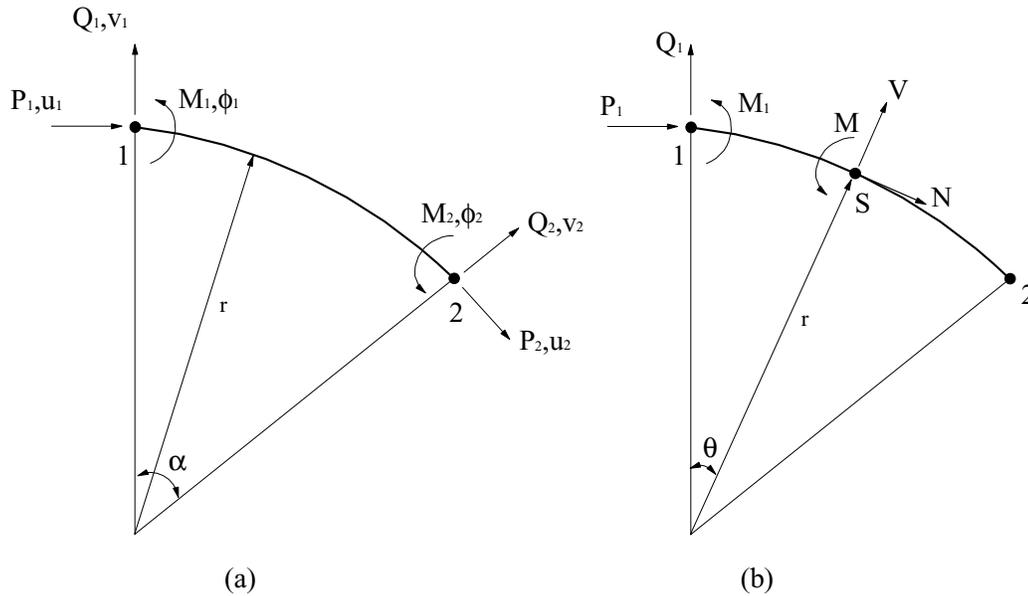


Figura 3.5 – (a) Elemento finito de curvatura constante; (b) Esforços ponto genérico S.

A matriz de rigidez do presente elemento tem a forma apresentada na Equação (3.1). Através do equilíbrio de forças e momentos entre o nó 1 e um ponto genérico S, como ilustrado na Figura 3.5b, escreve-se:

$$N = -P_1 \cos \theta - Q_1 \sin \theta \quad (3.27a)$$

$$V = P_1 \sin \theta - Q_1 \cos \theta \quad (3.27b)$$

$$M = -P_1 r (1 - \cos \theta) - Q_1 r \sin \theta - M_1 \quad (3.27c)$$

Definindo o comprimento infinitesimal do elemento como sendo $ds = r d\theta$ e substituindo as Equações (3.27a,b,c) em (3.3), obtém-se:

$$U = \int_{\alpha} \frac{(P_1 r (\cos \theta - 1) + Q_1 r \sin \theta - M_1)^2}{2EI} r d\theta + \int_{\alpha} \frac{(P_1 \cos \theta + Q_1 \sin \theta)^2}{2AE} r d\theta + \int_{\alpha} \frac{\eta (P_1 \cos \theta + Q_1 \sin \theta)^2}{2AG} r d\theta \quad (3.28)$$

Desenvolvendo-se as integrais da (3.28) e derivando-se em relação a P_1 , Q_1 e M_1 , chega-se nos seguintes valores de u_1 , v_1 , e ϕ_1 , agora definidos de forma matricial:

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{F}_{11} \mathbf{p}_1, \quad (3.29)$$

com a submatriz de flexibilidade \mathbf{F}_{11} sendo

$$\mathbf{F}_{11} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{12} & f_{22} & f_{23} \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} \end{bmatrix}$$

e os termos de flexibilidade f_{11} , f_{12} , ..., f_{32} e f_{33} definidos segundo:

$$f_{11} = \frac{r}{4EA} (\sin 2\alpha + 2\alpha) + \frac{r^3}{4EI} (6\alpha - 8 \sin \alpha + \sin 2\alpha) + \frac{\eta r}{4GA} (2\alpha - \sin 2\alpha)$$

$$f_{12} = -\frac{r^3}{2EI} (1 - \cos \alpha)^2 + \frac{r}{2EA} \sin^2 \alpha - \frac{\eta r}{2GA} \sin^2 \alpha$$

$$f_{13} = \frac{r^2}{EI} (\alpha - \sin \alpha)$$

$$f_{22} = \frac{r^3}{4EI} (2\alpha - \sin 2\alpha) + \frac{r}{4EA} (2\alpha - \sin 2\alpha) + \frac{\eta r}{4GA} (2\alpha + \sin 2\alpha)$$

$$f_{23} = \frac{r^2}{EI} (1 - \cos \alpha)$$

$$f_{33} = \frac{r}{EI} \alpha$$

A submatriz \mathbf{K}_{11} é obtida, de acordo com a Equação (3.6), através da inversa de \mathbf{F}_{11} . A submatriz \mathbf{K}_{22} é obtida de maneira semelhante à submatriz \mathbf{K}_{11} , só que desta vez estabelecendo-se equilíbrio entre o nó 2 e um ponto genérico S. Assim, escreve-se:

$$N = -P_2 \cos \theta + Q_2 \sin \theta \quad (3.30a)$$

$$V = -P_2 \sin \theta - Q_2 \cos \theta \quad (3.30b)$$

$$M = -P_2 r(1 - \cos \theta) - Q_2 r \sin \theta - M_2 \quad (3.30c)$$

e os valores de u_2 , v_2 e ϕ_2 são dados segundo:

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{F}_{22} \mathbf{p}_2, \quad (3.31)$$

com a submatriz de flexibilidade \mathbf{F}_{22} sendo

$$\mathbf{F}_{22} = \begin{bmatrix} f_{44} & f_{45} & f_{46} \\ f_{45} & f_{55} & f_{56} \\ f_{64} & f_{65} & f_{66} \end{bmatrix}$$

e os termos de flexibilidade f_{44} , f_{45} , ..., f_{65} e f_{66} definidos segundo:

$$f_{44} = f_{11}; f_{45} = -f_{12}; f_{46} = f_{13};$$

$$f_{55} = f_{22}; f_{56} = -f_{23}$$

$$f_{66} = f_{33}$$

Através do equilíbrio entre o nó 1 e o nó 2 (Figura 3.5a), chega-se a:

$$P_1 + P_2 \cos \alpha + Q_2 \sin \alpha = 0 \quad (3.32a)$$

$$Q_1 + Q_2 \cos \alpha - P_2 \sin \alpha = 0 \quad (3.32b)$$

$$M_1 + M_2 - Q_1 r \sin \alpha - P_1 (r - r \cos \alpha) = 0 \quad (3.32c)$$

ou, numa forma matricial, isolando-se as variáveis P_2 , Q_2 e M_2 das expressões anteriores, chega-se a:

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{C}\mathbf{p}_1, \quad (3.33)$$

com a matriz \mathbf{C} dada por:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -\cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & -\cos \alpha & 0 \\ r(\cos \alpha - 1) & r \sin \alpha & -1 \end{bmatrix}.$$

A Figura 3.6 apresenta uma rotina desenvolvida no Software Maple para a extração da matriz de rigidez do elemento finito proposto nesta seção. Nesta Figura, k e b representam o coeficiente de cisalhamento e o ângulo de abertura do elemento, respectivamente.

```

restart:
with(linalg):

# Equilíbrio nó 1 / ponto genérico S
# Submatriz K11
N:= -P1*cos(x)-Q1*sin(x):
V:= P1*sin(x)-Q1*cos(x):
M:= -M1-P1*r*(1-cos(x))+Q1*r*sin(x):

U:=int((M^2/2/EI+N^2/2/EA+k*V^2/2/GA)*r,x=0..b):
F11:= hessian(U,[P1,Q1,M1]):
K11:= inverse(F11):

# Equilíbrio nó 1 / nó 2
# Submatriz K21
x:= L:
P2:= N:
Q2:= V:
M2:= M:
p2:= vector([P2,Q2,M2]):
S:= jacobian(p2,[P1,Q1,M1]):
K21:= multiply(S,K11):
unassign('P2','Q2','M2','x'):

# Equilíbrio nó 2 / ponto genérico S
# Submatriz K22
N:= -P2*cos(x)+Q2*sin(x):
V:= -H2*sin(x)-Q2*cos(x):
M:= -M2-P2*r*(1-cos(x))-Q2*r*sin(x):
U:=int((M^2/2/EI+N^2/2/EA+k*V^2/2/GA)*r,x=0..b):
F22:= hessian(U,[P2,Q2,M2]):
K22:= inverse(F22):

```

Figura 3.6 – Extração simbólica da matriz de rigidez via Maple.

Mais uma vez, através da rotina apresentada na Figura 3.3, o resultado da extração simbólica obtida pela rotina anterior é codificada para a linguagem C e armazenada no arquivo 'elemento'.

3.5 – ELEMENTO FINITO PARABÓLICO

De acordo com a Figura 3.7, o elemento finito curvo proposto tem formato parabólico, possui dois nós, cada um com três graus de liberdade: um deslocamento na direção radial, outro na direção tangencial e a rotação da seção transversal, representados, respectivamente, por v_i , u_i e ϕ_i .

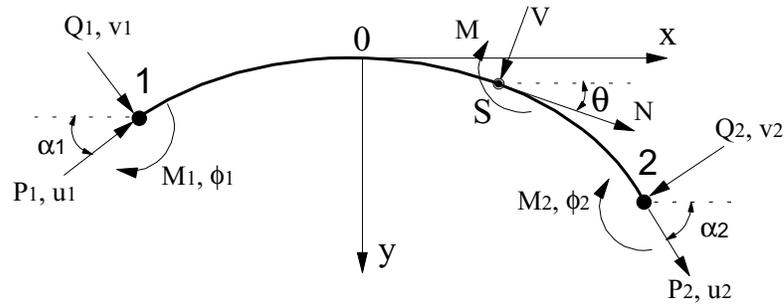


Figura 3.7 – Elemento finito parabólico.

Cada nó do elemento é definido seguindo um sistema de coordenadas global através de suas distâncias aos eixos coordenados e o ângulo entre o eixo horizontal e uma reta tangente ao elemento neste ponto nodal. São esses ângulos de tangência que determinam a curvatura de cada elemento.

Uma parábola é o conjunto de todos os pontos num plano, equidistantes de uma reta e de um ponto fixos (veja a Figura 3.8). O ponto fixo é chamado foco e a reta fixa é chamada diretriz. A equação da parábola pode ser obtida através da definição anterior.

Seja um caso particular de uma reta paralela ao eixo x , de equação $y = a$. O eixo y é perpendicular a reta e contém o foco. A origem do sistema de coordenadas é tomada como o ponto médio entre a reta e o foco. O foco, então, tem as coordenadas $F(0,-a)$. Este ponto médio é definido como o vértice da parábola.

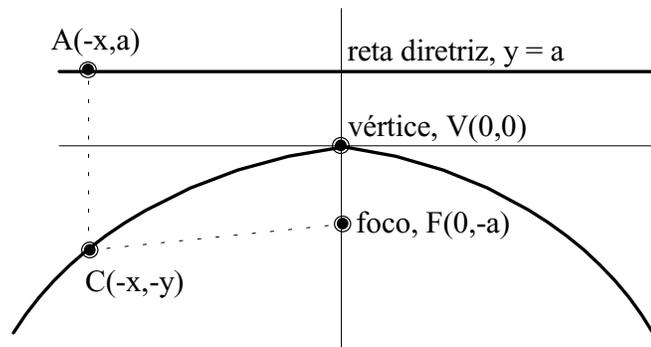


Figura 3.8 – Definição da parábola.

De acordo com a definição, $\overline{AC} = \overline{CF}$, pode-se escrever:

$$\sqrt{(-x+x)^2 + (-y-a)^2} = \sqrt{(-x-0)^2 + (-y+a)^2}, \text{ ou,}$$

$$x^2 = 4ay \tag{3.34}$$

A expressão acima é a equação da parábola. A tangente à curva em coordenadas paramétricas é definida como:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = y' = \tan \theta \tag{3.35}$$

Derivando-se então a Equação (3.34) em relação a x , obtém-se:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{x}{2a} \tag{3.36}$$

e igualando-se as Equações (3.35) e (3.36), chega-se a:

$$x = 2a \tan \theta \tag{3.37}$$

A substituição da Equação (3.37) em (3.34) permite obter a seguinte expressão para y :

$$y = a \tan^2 \theta \tag{3.38}$$

As expressões (3.37) e (3.38) são as equações paramétricas da parábola. Sabe-se, ainda, que o raio de curvatura de uma curva qualquer pode ser expresso como (Leithold, 1982):

$$r = \frac{\sqrt{[1 + y'^2]^3}}{y''} \quad (3.39)$$

Através da substituição da Equação (3.38) em (3.39), chega-se a uma expressão para R em função do ângulo de tangência θ , ou seja:

$$r = 2a \sec^3 \theta \quad (3.40)$$

De acordo com a Figura 3.7, as equações de equilíbrio entre o nó 1 e um ponto genérico S do elemento são dadas por:

$$N = P_1 (\sin \alpha_1 \sin \theta - \cos \alpha_1 \cos \theta) - Q_1 (\cos \alpha_1 \sin \theta + \sin \alpha_1 \cos \theta) \quad (3.41a)$$

$$V = P_1 (\sin \alpha_1 \cos \theta + \cos \alpha_1 \sin \theta) - Q_1 (\sin \alpha_1 \sin \theta + \cos \alpha_1 \cos \theta) \quad (3.41b)$$

$$M = -M_1 + P_1 [2a \sin \alpha_1 (\tan \theta - \tan \alpha_1) + a \cos \alpha_1 (\tan^2 \theta - \tan^2 \alpha_1)] + Q_1 [2a \cos \alpha_1 (\tan \theta - \tan \alpha_1) + a \sin \alpha_1 (\tan^2 \theta - \tan^2 \alpha_1)] \quad (3.41c)$$

O comprimento infinitesimal do elemento é definido segundo:

$$ds = r d\theta = 2a \sec^3 \theta d\theta \quad (3.42)$$

Substituindo então (3.3) e (3.42) em (3.4) e aplicando-se a regra da cadeia, escreve-se:

$$u_1 = \frac{2a}{EI} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} M \frac{\partial M}{\partial P_1} \sec^3 \theta d\theta + \frac{2a}{AE} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} N \frac{\partial N}{\partial P_1} \sec^3 \theta d\theta + \frac{2a}{AG} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} V \frac{\partial V}{\partial P_1} \sec^3 \theta d\theta \quad (3.43a)$$

$$v_1 = \frac{2a}{EI} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} M \frac{\partial M}{\partial Q_1} \sec^3 \theta d\theta + \frac{2a}{AE} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} N \frac{\partial N}{\partial Q_1} \sec^3 \theta d\theta + \frac{2a}{AG} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} V \frac{\partial V}{\partial Q_1} \sec^3 \theta d\theta \quad (3.43b)$$

$$\phi_1 = \frac{2a}{EI} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} M \frac{\partial M}{\partial M_1} \sec^3 \theta d\theta + \frac{2a}{AE} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} N \frac{\partial N}{\partial M_1} \sec^3 \theta d\theta + \frac{2a}{AG} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} V \frac{\partial V}{\partial M_1} \sec^3 \theta d\theta \quad (3.43c)$$

Depois de derivar-se as Equações (3.41a,b,c) em relação a P_1 , Q_1 , M_1 e desenvolver-se as integrais das Equações (3.43a,b,c), chega-se nos seguintes valores para u_1 , v_1 e ϕ_1 , definidos agora na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \phi_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{12} & f_{22} & f_{23} \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ Q_1 \\ M_1 \end{Bmatrix}$$

onde, $f_{11} = f_{11}^m + f_{11}^p + f_{11}^q$; $f_{12} = f_{12}^m + f_{12}^p + f_{12}^q$; $f_{13} = f_{13}^m$; $f_{22} = f_{22}^m + f_{22}^p + f_{22}^q$; $f_{23} = f_{23}^m$; e $f_{33} = f_{33}^m$. Têm-se assim que os termos de flexibilidade $f_{11}^m, f_{11}^p, f_{11}^q, \dots, f_{22}^q$ são dados por:

$$f_{11}^m = \frac{2a}{EI} \left[Da^2 \cos^2 \alpha_1 + 4Ha^2 \sin^2 \alpha_1 - 4Ja^2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 \right]_{\alpha_1}^{\alpha_2};$$

$$f_{12}^m = \frac{2a}{EI} \left[-Da^2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 + 2Ja^2 (\sin^2 \alpha_1 - \cos^2 \alpha_1) + 4Ha^2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 \right]_{\alpha_1}^{\alpha_2};$$

$$f_{13}^m = \frac{2a}{EI} \left[a \cos \alpha_1 (B4 - \tan^2 \alpha_1 B3) - 2a \sin \alpha_1 (B2 - \tan \alpha_1 B3) \right]_{\alpha_1}^{\alpha_2};$$

$$f_{22}^m = \frac{2a}{EI} \left[Da^2 \sin^2 \alpha_1 + 4Ja^2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 + 4Ha^2 \cos^2 \alpha_1 \right]_{\alpha_1}^{\alpha_2};$$

$$f_{23}^m = \frac{2a}{EI} \left[-a \sin \alpha_1 (B4 - \tan^2 \alpha_1 B3) - 2a \cos \alpha_1 (B2 - \tan \alpha_1 B3) \right]_{\alpha_1}^{\alpha_2};$$

$$f_{33}^m = \frac{2a}{EI} [B3]_{\alpha_1}^{\alpha_2};$$

$$f_{11}^p = \frac{2a}{AE} \left[\sin^2 \alpha_1 B6 + \cos^2 \alpha_1 B8 + 2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 B7 \right]_{\alpha_1}^{\alpha_2};$$

$$f_{12}^p = \frac{2a}{AE} \left[\sin \alpha_1 \cos \alpha_1 B9 - (\sin^2 \alpha_1 - \cos^2 \alpha_1) B7 \right]_{\alpha_1}^{\alpha_2};$$

$$f_{22}^p = \frac{2a}{AE} \left[\sin^2 \alpha_1 B8 + \cos^2 \alpha_1 B6 - 2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 B7 \right]_{\alpha_1}^{\alpha_2};$$

$$f_{11}^q = \frac{\eta 2a}{AG} \left[\cos^2 \alpha_1 B6 - 2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 B7 + \sin^2 \alpha_1 B8 \right]_{\alpha_1}^{\alpha_2};$$

$$f_{12}^q = \frac{\eta 2a}{AG} \left[\sin \alpha_1 \cos \alpha_1 (B8 - B6) + (\sin^2 \alpha_1 - \cos^2 \alpha_1) B7 \right]_{\alpha_1}^{\alpha_2}; e$$

$$f_{22}^q = \frac{\eta 2a}{AG} \left[\sin^2 \alpha_1 B6 + 2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 B7 + \cos^2 \alpha_1 B8 \right]_{\alpha_1}^{\alpha_2};$$

sendo D, H, J, B1, B2, ... e B9 definidos de acordo com as expressões abaixo:

$$D = B5 - 2 \tan^2 \alpha_1 B4 + \tan^4 \alpha_1 B3$$

$$H = B4 - 2 \tan \alpha_1 B2 + \tan^2 \alpha_1 B3;$$

$$J = B1 - \tan \alpha_1 B4 - \tan^2 \alpha_1 B2 + \tan^3 \alpha_1 B3;$$

$$B1 = \frac{1}{5} \sec^5 \theta - \frac{1}{3} \sec^3 \theta; B2 = \frac{1}{3} \sec^3 \theta; B3 = \frac{1}{2} \sec \theta \tan \theta + \frac{1}{2} \ln(\sec \theta + \tan \theta);$$

$$B4 = \frac{1}{4} \sec^3 \theta \tan \theta - \frac{1}{8} \sec \theta \tan \theta - \frac{1}{8} \ln(\sec \theta + \tan \theta);$$

$$B5 = -\frac{1}{16} \sec \theta + \frac{1}{6} \tan^5 \theta \sec \theta + \frac{1}{24} \tan^4 \theta \sec \theta + \frac{1}{16} \ln(\sec \theta + \tan \theta);$$

$$-\frac{1}{48} \sec^3 \theta - \frac{1}{48} \tan^2 \theta \sec^3 \theta$$

$$B6 = \frac{1}{2} \sec \theta \tan \theta - \frac{1}{2} \ln(\sec \theta + \tan \theta); B7 = \sec \theta; B8 = \ln(\sec \theta + \tan \theta); e$$

$$B9 = \frac{1}{2} \sec \theta \tan \theta - \frac{3}{2} \ln(\sec \theta + \tan \theta).$$

A submatriz \mathbf{K}_{11} é obtida então através da inversa de \mathbf{F}_{11} . De maneira equivalente obtém-se a submatriz \mathbf{K}_{22} através do equilíbrio entre o ponto nodal 2 e uma seção genérica S. Assim, escreve-se:

$$N = (\cos \alpha_2 \cos \theta - \sin \alpha_2 \sin \theta) P_2 - (\sin \alpha_2 \cos \theta + \cos \alpha_2 \sin \theta) Q_2 \quad (3.44a)$$

$$V = -(\cos \alpha_2 \sin \theta + \sin \alpha_2 \cos \theta)P_2 - (\sin \alpha_2 \sin \theta - \cos \alpha_2 \cos \theta)Q_2 \quad (3.44b)$$

$$M = -M_2 - P_2 [2a \sin \alpha_2 (\tan \alpha_2 - \tan \theta) - a \cos \alpha_2 (\tan^2 \alpha_2 - \tan^2 \theta)] - \quad (3.44c)$$

$$- Q_2 [2a \cos \alpha_2 (\tan \alpha_2 - \tan \theta) + a \sin \alpha_2 (\tan^2 \alpha_2 - \tan^2 \theta)]$$

e os valores de u_2 , v_2 e ϕ_2 são definidos segundo:

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{44} & f_{45} & f_{46} \\ f_{45} & f_{55} & f_{56} \\ f_{46} & f_{56} & f_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_2 \\ Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

onde os termos de flexibilidade são dados por:

$$f_{44} = -f_{11}; f_{45} = -f_{12}; f_{46} = -f_{13};$$

$$f_{55} = -f_{22}; f_{56} = -f_{23}$$

$$f_{66} = -f_{33}$$

Já a submatriz \mathbf{K}_{12} é obtida através do equilíbrio das forças e momentos entre os nós 1 e 2. Dessa forma, introduzindo α_2 para θ nas Equações (3.41a,b,c), chega-se a:

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{Cp}_1$$

$$\text{onde } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_4 & c_5 & c_6 \\ c_7 & c_8 & c_9 \end{bmatrix}.$$

Os coeficientes c_1, c_2, \dots, c_8 e c_9 são definidos de acordo com:

$$c_1 = -\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 - \cos \alpha_1 \cos \alpha_2;$$

$$c_2 = \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 - \cos \alpha_1 \sin \alpha_2; c_3 = 0;$$

$$c_4 = \text{sen } \alpha_2 \cos \alpha_1 - \text{sen } \alpha_1 \cos \alpha_2; c_5 = c_1; c_6 = 0;$$

$$c_7 = 2a \text{sen } \alpha_1 (\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1) - a \cos \alpha_1 (\tan^2 \alpha_2 - \tan^2 \alpha_1);$$

$$c_8 = 2a \cos \alpha_1 (\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1) + a \text{sen } \alpha_1 (\tan^2 \alpha_2 - \tan^2 \alpha_1); c_9 = -1$$

A Figura 3.9 apresenta uma rotina desenvolvida no Software Maple para a extração da matriz de rigidez do elemento finito proposto nesta seção. Nesta Figura, k representa o coeficiente de cisalhamento e a_1 e a_2 representam o ângulo de tangência nos pontos nodais 1 e 2 (α_1 e α_2), respectivamente.

```

restart:
with(linalg):

# Equilíbrio nó 1 / ponto genérico S
# Submatriz K11
N:= (sin(a1)*sin(x)-cos(a1)*cos(x))*P1-
(cos(a1)*sin(x)+sin(a1)*cos(x))*Q1:
V:= (sin(a1)*cos(x)-cos(a1)*sin(x))*P1-
(sin(a1)*sin(x)+cos(a1)*cos(x))*Q1:
M:= -M1+(2*a*sin(a1)*(tan(x)-tan(a1))+a*cos(a1)*(tan(x)^2-
tan(a1)^2))*P1+(2*a*cos(a1)*(tan(x)-tan(a1))+a*cos(a1)*(tan(x)^2-
tan(a1)^2))*Q1:
U:=int((M^2/2/EI+N^2/2/EA+k*V^2/2/GA)*2*a*sec(x)^3,x=a1..a2):
F11:= hessian(U,[P1,Q1,M1]):
K11:= inverse(F11):

# Equilíbrio nó 1 / nó 2
# Submatriz K21
x:= b:
P2:= N:
Q2:= V:
M2:= M:
p2:= vector([P2,Q2,M2]):
S:= jacobian(p2,[P1,Q1,M1]):
K21:= multiply(S,K11):
unassign('P2','Q2','M2','x'):

# Equilíbrio nó 2 / ponto genérico S
# Submatriz K22
N:= (cos(a2)*cos(x)-sin(a2)*sin(x))*P2-
(sin(a2)*cos(x)+cos(a2)*sin(x))*Q2:
V:= -(cos(a2)*sin(x)+sin(a2)*cos(x))*P2+(sin(a2)*sin(x)-
cos(a2)*cos(x))*Q2:
M:= -M2-(2*a*sin(a2)*(tan(a2)-tan(x))-a*cos(a2)*(tan(a2)^2-
tan(x)^2))*P2-(2*a*cos(a2)*(tan(a2)-tan(x))+sin(a2)*(tan(a2)^2-
tan(x)^2))*Q2:
U:=int((M^2/2/EI+N^2/2/EA+k*V^2/2/GA)*2*a*sec(x)^3,x=a1..a2):
F22:= hessian(U,[P2,Q2,M2]):
K22:= inverse(F22):

```

Figura 3.9 – Extração simbólica da matriz de rigidez via Maple.

4

ELEMENTO FINITO CURVO: FORMULAÇÃO EM DESLOCAMENTOS

4.1 - INTRODUÇÃO

A formulação do elemento finito curvo a ser abordada agora para modelagem de arcos circulares é baseada na aproximação do campo de deslocamentos. O Capítulo 2 e os artigos recentes de Friedman e Kosmatka (1998) e Litewka e Rakowski (1997, 1998), fornecem a base teórica necessária para entendimento deste capítulo.

As funções de interpolação usadas para aproximar o campo de deslocamentos são formadas por funções algébricas-trigonométricas, cujos parâmetros são obtidos através do uso das três equações diferenciais homogêneas de equilíbrio estático de uma viga curva.

Na próxima seção são apresentadas as características geométricas do elemento finito proposto, o número de nós, seus graus de liberdade e as direções e os sentidos das forças e deslocamentos. São definidas também as matrizes \mathbf{D} e \mathbf{J}_2 que estabelecem as relações deformação-deslocamento e tensão-deformação, respectivamente. Ainda na Seção 4.2, são obtidas as três equações diferenciais homogêneas de equilíbrio estático de uma viga curva.

A Seção 4.3 apresenta as funções de interpolação adotadas; já na Seção 4.4 é fornecida a expressão da matriz de rigidez do elemento finito curvo proposto.

A última seção deste capítulo tem o objetivo de apresentar outra definição, baseada agora numa aproximação mais refinada do campo de deslocamentos, da matriz de rigidez do elemento curvo.

4.2 – EQUAÇÕES BÁSICAS

O elemento finito circular mostrado na Figura 4.1 tem raio de curvatura inicial r e dois pontos nodais, cada nó com três graus de liberdade. Como no capítulo anterior, os deslocamentos tangencial e normal são definidos como u e v , e a rotação da seção transversal como ϕ . As forças resultantes tangencial e normal são, mais uma vez, definidas como P e Q , e o momento fletor resultante por M . A viga curva tem ângulo de abertura $\alpha = 2\theta_0$.

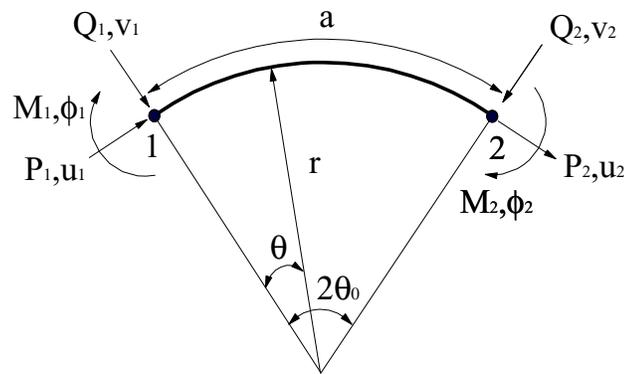


Figura 4.1 – Elemento finito de curvatura constante.

Para o elemento considerado, a relação tensão-deformação é definida pela Equação (2.30), que é reescrita a seguir:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{J}_2 \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.1)$$

onde, novamente, escreve-se $\boldsymbol{\sigma}^T = \{N \quad V \quad M\}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^T = \{\varepsilon_0 \quad \gamma_0 \quad \kappa\}$ e a matriz constitutiva \mathbf{J}_2 :

$$\mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & \eta GA & 0 \\ 0 & 0 & EI \end{bmatrix}$$

Já a relação linear deformação-deslocamento, de acordo com a Equação (2.22), é definida por:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (4.2)$$

onde, mais uma vez, escreve-se $\boldsymbol{\varepsilon}^T = \{\varepsilon_0 \quad \gamma_0 \quad \kappa\}$, $\mathbf{u}^T = \{u \quad v \quad \phi\}$ e a matriz \mathbf{D} :

$$\mathbf{D} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \partial/\partial x & -1 & 0 \\ 1 & \partial/\partial x & -r \\ 0 & 0 & \partial/\partial x \end{bmatrix}$$

As três equações diferenciais homogêneas de equilíbrio estático de uma viga curva podem ser obtidas através da Equação (2.7), que define a energia interna de deformação de um elemento genérico, ou seja:

$$U = \int \frac{M^2}{2EI} dx + \int \frac{N^2}{2EA} dx + \int \frac{V^2}{2GA} dx \quad (4.3)$$

Substituindo-se agora as Equações (4.1) e (4.2) em (4.3), chega-se a:

$$U = \frac{1}{2} \int M \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \int N \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{v}{r} \right) dx + \frac{1}{2} \int Q \left(\frac{u}{r} + \frac{\partial v}{\partial x} - \phi \right) dx \quad (4.4)$$

Observe que a energia interna de deformação U é função da variável independente x , dos deslocamentos e rotação da seção, e de suas derivadas primeiras, ou seja:

$$U = U \left(x, u, v, \phi, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \quad (4.5)$$

Estabelecendo-se então a condição de estacionaridade para a energia interna de deformação U , ou seja, fazendo-se $\delta^{(1)}U = 0$, chega-se a:

$$\begin{aligned}\delta^{(1)}U &= \frac{1}{2} \int M \delta \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx + \frac{1}{2} \int N \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dx - \frac{1}{2} \int \frac{N}{r} \delta v dx + \\ &+ \frac{1}{2} \int \frac{Q}{r} \delta u dx + \frac{1}{2} \int Q \delta \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) dx - \frac{1}{2} \int Q \delta \phi dx = 0\end{aligned}\quad (4.6)$$

Com a integração por partes da expressão anterior, escreve-se:

$$\begin{aligned}\delta^{(1)} &= \int \left(\frac{Q}{2r} - \frac{1}{2} \frac{\partial N}{\partial x} \right) \delta u dx - \int \left(\frac{N}{2r} + \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \delta v dx - \\ &- \int \left(\frac{Q}{2} + \frac{1}{2} \frac{\partial M}{\partial x} \right) \delta \phi dx + \frac{1}{2} N \delta u \Big|_0^L + \frac{1}{2} Q \delta v \Big|_0^L + \frac{1}{2} M \delta \phi \Big|_0^L = 0\end{aligned}\quad (4.7)$$

e como δu , δv e $\delta \phi$ são variações arbitrárias, segue que:

$$\frac{Q}{r} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0 \quad (4.8a)$$

$$\frac{N}{r} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (4.8b)$$

$$Q + \frac{\partial M}{\partial x} = 0 \quad (4.8c)$$

que representam as equações diferenciais homogêneas de equilíbrio estático do elemento em estudo. Sendo o comprimento infinitesimal do elemento definido como $dx = r d\theta$, e substituindo-se (4.1) e (4.2) na Equações (4.8a,b,c), obtém-se:

$$\left(\eta GA - EA \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) u + (\eta GA + EA) \frac{\partial v}{\partial \theta} - \eta GA r \phi = 0 \quad (4.9a)$$

$$(EA + \eta GA) \frac{\partial u}{\partial \theta} + \left(\eta GA \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - EA \right) v - \eta GA r \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0 \quad (4.9b)$$

$$\eta GA u + \eta GA \frac{\partial v}{\partial \theta} + \left(\frac{EI}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta} - \eta GA r \right) \phi = 0 \quad (4.9c)$$

que representam a forma final das equações homogêneas procuradas.

As condições de contorno geométricas e naturais que devem ser satisfeitas nas extremidades do elemento são fornecidas na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Condições de contorno.

Geométrica	Natural
$u = \bar{u}$	$N = \frac{EA}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - v \right)$
$v = \bar{v}$	$Q = \frac{\eta GA}{r} \left(u + \frac{\partial v}{\partial \theta} - r\phi \right)$
$\phi = \bar{\phi}$	$M = \frac{EI}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$

4.3 – FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO

Nesta seção são apresentadas funções de interpolação usadas para aproximar o comportamento dos deslocamentos tangencial, radial e a rotação da seção transversal do elemento em estudo. Friedman e Kosmatka (1998) consideraram que os deslocamentos u e v , e a rotação ϕ , poderiam ser aproximadas da seguinte forma:

$$u = c_1 + c_2 x + c_3 \cos\left(\frac{x}{r}\right) + c_4 x \cos\left(\frac{x}{r}\right) + c_5 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{r}\right) + c_6 x \operatorname{sen}\left(\frac{x}{r}\right) \quad (4.10a)$$

$$v = a_1 + a_2 x + a_3 \cos\left(\frac{x}{r}\right) + a_4 x \cos\left(\frac{x}{r}\right) + a_5 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{r}\right) + a_6 x \operatorname{sen}\left(\frac{x}{r}\right) \quad (4.10b)$$

$$\phi = b_1 + b_2 x + b_3 \cos\left(\frac{x}{r}\right) + b_4 x \cos\left(\frac{x}{r}\right) + b_5 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{r}\right) + b_6 x \operatorname{sen}\left(\frac{x}{r}\right) \quad (4.10c)$$

ou, numa forma matricial:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \begin{Bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} \quad (4.11)$$

onde, $\mathbf{u}^T = \{u \ v \ \phi\}$; $\mathbf{c}^T = \{c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4 \ c_5 \ c_6\}$,

$\mathbf{a}^T = \{a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6\}$ e $\mathbf{b}^T = \{b_1 \ b_2 \ b_3 \ b_4 \ b_5 \ b_6\}$ são parâmetros a serem determinados; já a matriz \mathbf{N} tem a seguinte forma:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N}_1 \end{bmatrix},$$

sendo $\mathbf{N}_1 = \left[1 \quad x \quad \cos\left(\frac{x}{r}\right) \quad x \cos\left(\frac{x}{r}\right) \quad \sin\left(\frac{x}{r}\right) \quad x \sin\left(\frac{x}{r}\right) \right]$.

Deve-se salientar que os parâmetros a_i , b_i e c_i , onde $i=1..6$, não são todos independentes. Eles podem ser determinados partindo-se do princípio que as funções de forma adotadas para aproximar u , v e ϕ satisfaçam exatamente a forma homogênea das equações diferenciais de equilíbrio estático (Equações 4.9a,b,c). Assim, substituindo-se as Equações (4.10a,b,c) nas Equações (4.9a,b,c), e procurando-se satisfazer as condições de igualdade, chegam-se nas seguintes expressões:

$$(EA + \eta GA)a_2 - \eta GArb_1 + \eta GAc_1 = 0 \quad (4.12a)$$

$$-\eta GArb_2 + \eta GAc_2 = 0 \quad (4.12b)$$

$$-\eta GAb_2 + (EA + \eta GA)c_2 - EAa_1 = 0 \quad (4.12c)$$

$$-EAa_2 = 0 \quad (4.12d)$$

$$-\eta GArb_1 + \eta GAc_1 + \eta GAA_2 = 0 \quad (4.12e)$$

$$-\eta GArb_2 + \eta GAc_2 = 0 \quad (4.12f)$$

$$(EA + \eta GA)c_6 - (EA + \eta GA)a_4 - \eta GArb_6 = 0 \quad (4.12g)$$

$$(EA + \eta GA)c_4 + (EA + \eta GA)a_6 - \eta GArb_4 = 0 \quad (4.12h)$$

$$-(EA + \eta GA)a_6 - (EA + \eta GA)c_4 - \eta GArb_4 = 0 \quad (4.12i)$$

$$-(EA + \eta GA)a_4 + (EA + \eta GA)c_6 - \eta GArb_6 = 0 \quad (4.12j)$$

$$\eta GAc_6 - \eta GAa_4 - \left(\eta GAr + \frac{EI}{r} \right) b_6 = 0 \quad (4.12k)$$

$$\eta GAc_4 + \eta GAa_6 - \left(\eta GAr + \frac{EI}{r} \right) b_4 = 0 \quad (4.12l)$$

$$(EA + \eta GA)a_6 - \eta GArb_5 + 2EAa_4 - (EA + \eta GA)a_3 + (EA + \eta GA)c_5 = 0 \quad (4.12m)$$

$$(EA + \eta GA)a_4 - \eta GArb_3 - 2EAa_6 + (EA + \eta GA)c_3 + (EA + \eta GA)a_5 = 0 \quad (4.12n)$$

$$-2\eta GAa_4 + \eta GArb_3 - \eta GArb_6 + (EA + \eta GA)c_6 - (EA + \eta GA)a_5 - (EA + \eta GA)c_3 = 0 \quad (4.12o)$$

$$2\eta GAa_6 - \eta GArb_4 - \eta GArb_5 + (EA + \eta GA)c_4 - (EA + \eta GA)a_3 + (EA + \eta GA)c_5 = 0 \quad (4.12p)$$

$$\eta GAa_6 - \left(\eta GAr + \frac{EI}{r} \right) b_5 - \frac{2EI}{r} b_4 - \eta GAa_3 + \eta GAa_5 = 0 \quad (4.12q)$$

$$\eta GAa_4 - \left(\eta GAr + \frac{EI}{r} \right) b_3 + \frac{2EI}{r} b_6 + \eta GAa_5 + \eta GAa_3 = 0 \quad (4.12r)$$

Com a solução do sistema de Equações (4.12a,b,...,r) obtém-se 6 parâmetros independentes e 12 parâmetros dependentes. Esses parâmetros dependentes podem ser expressos da maneira mais simples se a_1 , a_3 , a_5 , c_1 , c_3 e c_5 forem escolhidos para serem os parâmetros independentes (Friedman e Kosmatka, 1998). Dessa forma:

$$a_2 = 0; \quad a_4 = \frac{k_1}{k_2} (a_5 + c_3); \quad a_6 = \frac{k_1}{k_2} (-a_3 + c_5);$$

$$b_1 = \frac{c_1}{r}; b_2 = \frac{a_1}{r}; b_3 = \frac{2\eta GA}{k_2}(a_5 + c_3); \quad (4.13a-l)$$

$$b_4 = 0; b_5 = -\frac{2\eta GA}{k_2}(a_3 - c_5); b_6 = 0;$$

$$c_2 = a_1; c_4 = -a_6 \text{ e } c_6 = a_4$$

com as constantes k_1 e k_2 definidas de acordo com:

$$k_1 = \eta GAr^2 + \eta GI + EI$$

$$k_2 = \eta GAr^2 - \eta GI + EI$$

Observe que as relações (4.13a-l) podem ser escritas na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}\mathbf{d} \quad (4.14)$$

onde $\mathbf{d}^T = \{a_1 \ a_3 \ a_5 \ c_1 \ c_3 \ c_5\}$ e a matriz \mathbf{T}^T é organizada da seguinte forma:

$$\mathbf{T}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -k_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_3 & 0 & 0 & 0 & k_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & k_4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & k_3 & 0 & 0 & 0 & k_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_4 & 0 \end{bmatrix}$$

sendo as constantes k_3 e k_4 dadas por:

$$k_3 = \frac{k_1}{k_2}$$

$$k_4 = \frac{2\eta GAr}{k_2}$$

As deformações podem ser obtidas em função dessas coordenadas generalizadas \mathbf{d} substituindo-se (4.14) e (4.11) na Equação (4.2), ou seja:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{T}\mathbf{d} \quad (4.15)$$

onde $\mathbf{B} = \mathbf{D}\mathbf{N}$, sendo essa matriz \mathbf{B} definida de acordo com a expressão abaixo:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{N}_1 & -\frac{1}{r} \mathbf{N}_1 & \mathbf{0} \\ \frac{1}{r} \mathbf{N}_1 & \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{N}_1 & -\mathbf{N}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{N}_1 \end{bmatrix}$$

Com a substituição da Equação (4.15) em (4.1), obtém-se as tensões resultantes do elemento em função das coordenadas generalizadas \mathbf{d} . Assim, escreve-se:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{J}_2 \mathbf{B}\mathbf{T}\mathbf{d} \quad (4.16)$$

Finalmente, através da substituição das relações (4.13a-l) em (4.10a,b,c), e atribuindo-se $x = -r\theta_0$, chegam-se nas expressões de u_1 , v_1 e ϕ_1 em função das coordenadas genéricas \mathbf{d} . De maneira análoga, considerando no segundo ponto nodal $x = r\theta_0$, obtém-se u_2 , v_2 e ϕ_2 em função de \mathbf{d} . Essas expressões, após algumas manipulações algébricas, são ilustradas a seguir:

$$u_1 = -r\theta_0 a_1 - r\theta_0 \cos \theta_0 a_3 + k_5 a_5 + c_1 + (\cos \theta_0 + k_5) c_3 + (k_6 - \sin \theta_0) c_5 \quad (4.17a)$$

$$v_1 = a_1 + (\cos \theta_0 - k_5) a_3 - (k_6 + \sin \theta_0) a_5 - k_6 c_3 + k_5 c_5 \quad (4.17b)$$

$$\phi_1 = -\theta_0 + k_4 \sin \theta_0 a_3 + k_4 \cos \theta_0 a_5 + \frac{1}{r} c_1 + k_4 \cos \theta_0 c_3 - k_4 \sin \theta_0 c_5 \quad (4.17c)$$

$$u_2 = r\theta_0 a_1 + r\theta_0 \cos \theta_0 a_3 + k_5 a_5 + c_1 + (\cos \theta_0 + k_5) c_3 + (\sin \theta_0 - k_6) c_5 \quad (4.17d)$$

$$v_2 = a_1 + (\cos \theta_0 - k_5) a_3 + (k_6 + \sin \theta_0) a_5 + k_6 c_3 + k_5 c_5 \quad (4.17e)$$

$$\phi_2 = \theta_0 a_1 - k_4 \sin \theta_0 a_3 + k_4 a_5 + \frac{1}{r} c_1 + k_4 \cos \theta_0 c_3 + k_4 \sin \theta_0 c_5 \quad (4.17f)$$

onde k_5 e k_6 são constantes dadas por:

$$k_5 = r\theta_0 k_3 \sin \theta_0$$

$$k_6 = r\theta_0 k_3 \cos \theta_0$$

Mais uma vez, pode-se empregar a forma matricial para representar as relações (4.17a-f), ou seja:

$$\mathbf{w} = \bar{\mathbf{N}} \mathbf{d} \quad (4.18)$$

sendo $\mathbf{w}^T = \{u_1 \quad v_1 \quad \phi_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \phi_2\}$; a matriz $\bar{\mathbf{N}}$ é organizada da seguinte forma:

$$\bar{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} -r\theta_0 & -k_6 & k_5 & 1 & (\cos \theta_0 + k_5) & (k_6 - \sin \theta_0) \\ 1 & (\cos \theta_0 - k_5) & -(k_6 + \sin \theta_0) & 0 & -k_6 & k_5 \\ -\theta_0 & k_4 \sin \theta_0 & k_4 \cos \theta_0 & 1/r & k_4 \cos \theta_0 & -k_4 \sin \theta_0 \\ r\theta_0 & k_6 & k_5 & 1 & (\cos \theta_0 + k_5) & -(k_6 - \sin \theta_0) \\ 1 & (\cos \theta_0 - k_5) & (k_6 + \sin \theta_0) & 0 & k_6 & k_5 \\ \theta_0 & -k_4 \sin \theta_0 & k_4 \cos \theta_0 & 1/r & k_4 \cos \theta_0 & k_4 \sin \theta_0 \end{bmatrix}$$

4.4 – MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO

A matriz de rigidez do elemento finito curvo em estudo pode ser obtida partindo-se da energia interna de deformação, ou seja:

$$U = \frac{1}{2} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} \, r d\theta \quad (4.19)$$

A substituição então das relações (4.15) e (4.16) em (4.19), fornece para U a seguinte expressão:

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{T}^T \left(\int_{-\theta_0}^{\theta_0} \mathbf{B}^T \mathbf{J}_2 \mathbf{B} \, r d\theta \right) \mathbf{T} \mathbf{d} \quad (4.20)$$

ou, numa forma mais compacta:

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{K}_a \mathbf{d} \quad (4.21)$$

sendo a matriz de rigidez \mathbf{K}_a definida, ainda no sistema de coordenadas generalizadas, pela expressão:

$$\mathbf{K}_a = \mathbf{T}^T \left(\int_{-\theta_0}^{\theta_0} \mathbf{B}^T \mathbf{J}_2 \mathbf{B} \, r d\theta \right) \mathbf{T} \quad (4.22)$$

Através da substituição da Equação (4.18) — $\mathbf{d} = \bar{\mathbf{N}}^{-1} \mathbf{w}$ — em (4.21), chega-se numa nova expressão para a energia interna de deformação, agora no sistema de coordenadas ‘físicas’ \mathbf{w} , isto é:

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{w}^T (\bar{\mathbf{N}}^{-1})^T \mathbf{K}_a \bar{\mathbf{N}}^{-1} \mathbf{w} \quad (4.23)$$

ou, novamente, numa forma mais compacta:

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{K}_e \mathbf{w} \quad (4.24)$$

onde \mathbf{K}_e é a matriz de rigidez procurada. Sua expressão é mostrada a seguir:

$$\mathbf{K}_e = (\bar{\mathbf{N}}^{-1})^T \mathbf{K}_a \bar{\mathbf{N}}^{-1} \quad (4.25)$$

4.5 – MATRIZ DE RIGIDEZ EXATA

Nesta seção é apresentada uma outra definição da matriz de rigidez do elemento finito curvo baseada na aproximação do campo de deslocamentos. Litewka e Rakowski (1997, 1998) estabeleceram que os deslocamentos u e v , e a rotação ϕ , poderiam ser expressos em função dos seus valores nodais da seguinte forma:

$$u = N_{uu}^1 u_1 + N_{uv}^1 v_1 + N_{u\phi}^1 \phi_1 + N_{uu}^2 u_2 + N_{uv}^2 v_2 + N_{u\phi}^2 \phi_2 \quad (4.26a)$$

$$v = N_{vu}^1 u_1 + N_{vv}^1 v_1 + N_{v\phi}^1 \phi_1 + N_{vu}^2 u_2 + N_{vv}^2 v_2 + N_{v\phi}^2 \phi_2 \quad (4.26b)$$

$$\phi = N_{\phi u}^1 u_1 + N_{\phi v}^1 v_1 + N_{\phi\phi}^1 \phi_1 + N_{\phi u}^2 u_2 + N_{\phi v}^2 v_2 + N_{\phi\phi}^2 \phi_2 \quad (4.26c)$$

sendo as funções de interpolação N_{wp}^i , com $i = 1, 2$, $w = u, v, \phi$ e $p = u, v, \phi$, definidas, em termos da coordenada angular θ , de acordo com:

$$N_{wp}^i = C_1 + C_2 \theta + C_3 \cos \theta + C_4 \theta \cos \theta + C_5 \sin \theta + C_6 \theta \sin \theta \quad (4.27)$$

onde C_1, C_2, \dots e C_6 são parâmetros a serem determinados para cada uma das funções N_{wp}^i . Pode-se concluir, portanto a existência de um total de 108 parâmetros C_i a serem calculados.

Esses parâmetros C_i podem ser obtidos seguindo procedimento sugerido por Friedman e Kosmatka (1998), que foi adotado na Seção 4.3; ou seja, partindo-se do princípio que as funções de forma N_{wp}^i satisfaçam exatamente as equações diferenciais

homogêneas de equilíbrio estático do arco (Equações 4.9a,b,c). No entanto, ao contrário da formulação anterior, os valores das coordenadas genéricas \mathbf{d} são obtidos atribuindo-se deslocamentos unitários nos apoios ($u_i = 1$, $v_i = 1$ e $\phi_i = 1$, $i=1,2$). Dessa forma, para cada atribuição de valor unitário nos apoios, obtém-se 6 parâmetros independentes (a_1 , a_3 , a_5 , c_1 , c_3 e c_5) e 12 parâmetros dependentes, que seguem as mesmas relações em (4.13a-1). Assim, resolve-se o sistema de equações (4.18), por exemplo para $u_1 = 1$ ($\mathbf{w}^T = \{1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}$), e obtém-se os valores das coordenadas genéricas \mathbf{d} para a primeira condição de contorno.

As Tabelas 4.2, 4.3 e 4.4 apresentam os valores dos parâmetros obtidos para para as condições de contorno $u_1 = 1$, $v_1 = 1$ e $\phi_1 = 1$, respectivamente. Nessas tabelas é adotada, por simplicidade, a notação:

$$d = \frac{EI}{\eta GA} \frac{1}{a^2}; e = \frac{EI}{EA} \frac{1}{a^2}; \quad (4.28a)$$

$$d_1 = \alpha^2 d; e_1 = \alpha^2 e; \quad (4.28b)$$

$$s = \sin \alpha; s_0 = \sin \theta_0; c = \cos \alpha; c_0 = \cos \theta_0; \quad (4.28c)$$

$$D_1 = \alpha(\alpha + \sin \alpha)(1 + d_1 + e_1) - 2[2(1 - \cos \alpha) + \alpha d_1 \sin \alpha]; \quad (4.28d)$$

$$D_2 = \alpha(\alpha + \sin \alpha)(1 + d_1 + e_1) - 2\alpha \sin \alpha(1 + e_1); \quad (4.28e)$$

$$D' = \frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}; D'' = \frac{1}{D_1} - \frac{1}{D_2}; A' = 1 + d_1 + e_1; A'' = 1 - d_1 + e_1 \quad (4.28f)$$

onde d e e são, respectivamente, variáveis adimensionais que caracterizam os efeitos cisalhante e de membrana no elemento curvo.

Tabela 4.2 – Coeficientes C_i para o deslocamento tangencial $u_1 = 1$ (N_{uw}^1).

	C_1	C_2	C_3
N_{uu}^1	$-\frac{1}{D_2}\alpha s$	$-\frac{2}{D_1}s$	$\frac{1}{2}[D'c + D'']A''\alpha s_0 + \frac{2}{D_2}\alpha s_0 + \frac{A'}{2D_1}\alpha^2 c_0 - \frac{2}{D_1}s_0 s$
N_{uv}^1	$\frac{1}{D_2}\alpha(1+c)$	$-\frac{2}{D_1}(1-c)$	$\frac{1}{2}D'sA''\alpha s_0 + \frac{A'}{2D_1}\alpha^2 s_0 - 2\left[\frac{1}{D_2}\alpha c_0 + \frac{1}{D_1}(1-c)s_0\right]$
$N_{u\phi}^1$	$\frac{1}{D_2}s + \frac{1}{2\alpha}$	$\frac{2}{\alpha^2}\left[\frac{\alpha s}{D_1} - \frac{1}{2} - \frac{2(1-c)}{D_1}\right]$	$-\frac{1}{2}\left[D'c + D'' - \frac{2s}{\alpha D_1}\right]A''s_0 - \frac{2}{D_2}s_0 - \frac{A'}{2D_1}(\alpha c_0 - 2s_0) - \frac{s_0}{\alpha^2}\left\{\frac{2}{D_1}[2(1-c) - \alpha s] + 1\right\}$

	C_4	C_5	C_6
N_{uu}^1	$-\frac{A'}{D_1}\alpha c_0$	$-\frac{1}{2}[D'c + D'']A''\alpha c_0 + \frac{2}{D_1}(\alpha + s)c_0 - \frac{A'}{2D_2}\alpha^2 s_0$	$\frac{A'}{D_2}\alpha s_0$
N_{uv}^1	$-\frac{A'}{D_1}\alpha s_0$	$-\frac{1}{2}D'sA''\alpha c_0 + \frac{A'}{2D_2}\alpha^2 c_0 + \frac{2}{D_1}[\alpha s_0 + (1-c)c_0]$	$-\frac{A'}{D_2}\alpha c_0$
$N_{u\phi}^1$	$\frac{A'}{\alpha D_1}(\alpha c_0 - 2s_0)$	$\frac{1}{2}\left[D'c + D'' - \frac{2s}{\alpha D_1}\right]A''c_0 + \frac{A'}{2D_2}\alpha s_0 + \frac{2}{D_1}\left(\frac{2}{\alpha}s_0 - c_0\right) + \frac{c_0}{\alpha^2}\left\{\frac{2}{D_1}[2(1-c) - \alpha s] + 1\right\}$	$\frac{A'}{D_2}\alpha s_0$

Tabela 4.3 – Coeficientes C_i para o deslocamento radial $v_1 = 1$ (N_{vw}^1).

	C_1	C_2	C_3
N_{vu}^1	$-\frac{2}{D_1}s$	0	$-\frac{A'}{2D_1}\alpha^2 s_0 + \frac{1}{2}D'A''s_0\alpha s + \frac{2}{D_1}c_0 s$
N_{vv}^1	$-\frac{2}{D_1}(1-c)$	0	$\frac{A'}{2D_2}\alpha^2 c_0 + \frac{2}{D_1}(1-c)c_0 - \frac{1}{2}(D'c - D'')A''\alpha s_0$
$N_{v\phi}^1$	$\frac{1}{\alpha^2}\left\{\frac{2}{D_1}[2(1-c) - \alpha s] + 1\right\}$	0	$-\frac{1}{2}\left[D's - \frac{2}{\alpha D_1}(1-c)\right]A''s_0 + \frac{A'}{2D_2}\alpha s_0 + \frac{1}{\alpha^2}\left\{\frac{2}{D_1}[2(1-c) - \alpha s] + 1\right\}c_0$

	C_4	C_5	C_6
N_{vu}^1	$\frac{A'}{D_2}\alpha s_0$	$-\frac{A'}{2D_1}\alpha^2 c_0 - \frac{1}{2}D'A''c_0\alpha s + \frac{2}{D_1}s_0 s$	$\frac{A'}{D_1}\alpha c_0$
N_{vv}^1	$-\frac{A'}{D_2}\alpha c_0$	$-\frac{A'}{2D_1}\alpha^2 s_0 + \frac{2}{D_1}(1-c)s_0 + \frac{1}{2}(D'c - D'')A''\alpha c_0$	$\frac{A'}{D_1}\alpha s_0$
$N_{v\phi}^1$	$-\frac{A'}{D_2}s_0$	$\frac{1}{2}\left[D's - \frac{2}{\alpha D_1}(1-c)\right]A''c_0 + \frac{A'}{D_1}\left(\frac{1}{2}\alpha c_0 - s_0\right) + \frac{1}{\alpha^2}\left\{1 + \frac{2}{D_1}[2(1-c) - \alpha s]\right\}s_0$	$-\frac{A'}{\alpha D_1}(\alpha c_0 - 2s_0)$

Tabela 4.4 – Coeficientes C_i para a rotação $\phi_1 = 1$ ($N_{\phi w}^1$).

	C_1	C_2	C_3
$aN_{\phi u}^1$	$-\frac{1}{D_2}\alpha^2 s$	$-\frac{2}{D_1}\alpha s$	$\frac{2}{D_2}\alpha^2 s_0$
$aN_{\phi v}^1$	$\frac{1}{D_2}\alpha^2(1+c)$	$-\frac{2}{D_1}\alpha(1-c)$	$-\frac{2}{D_2}\alpha^2 c_0$
$N_{\phi\phi}^1$	$\frac{1}{D_2}s\alpha + \frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\alpha}\left\{\frac{2}{D_1}[2(1-c)-\alpha s]+1\right\}$	$-\frac{2}{D_2}\alpha s_0$

	C_4	C_5	C_6
$aN_{\phi u}^1$	0	$\frac{2}{D_1}\alpha^2 c_0$	0
$aN_{\phi v}^1$	0	$\frac{2}{D_1}\alpha^2 s_0$	0
$N_{\phi\phi}^1$	0	$\frac{2}{D_1}(2s_0 - \alpha c_0)$	0

Já as funções de forma N_{wp}^2 , com $w = u, v, \phi$ e $p = u, v, \phi$, são obtidas atribuindo-se valores unitários para o apoio 2. Essas funções de forma são dadas segundo:

$$N_{uu}^2(\theta_0) = N_{uu}^1(-\theta_0); N_{uv}^2(\theta_0) = -N_{uv}^1(-\theta_0); N_{u\phi}^2(\theta_0) = N_{u\phi}^1(-\theta_0)$$

$$N_{vu}^2(\theta_0) = -N_{vu}^1(-\theta_0); N_{vv}^2(\theta_0) = N_{vv}^1(-\theta_0); N_{v\phi}^2(\theta_0) = -N_{v\phi}^1(-\theta_0)$$

$$N_{\phi u}^2(\theta_0) = N_{\phi u}^1(-\theta_0); N_{\phi v}^2(\theta_0) = -N_{\phi v}^1(-\theta_0); N_{\phi\phi}^2(\theta_0) = N_{\phi\phi}^1(-\theta_0)$$

Com a obtenção das funções de forma N_{wp}^1 , chega-se na matriz de rigidez do elemento curvo através da substituição das Equações (4.26a,b,c) na expressão da energia interna de deformação, Equação (4.3), e em seguida usando-se as condições de mínimo em relação aos deslocamentos nodais. Essa matriz de rigidez é considerada como sendo exata por Litewka e Rakowski (1997, 1998), e totalmente livre dos efeitos espúrios de membrana e de cisalhamento. Ela contém a influência das forças cisalhantes, que é importante para análise de arcos de seção transversal de altura grande, bem como a influência das forças de membrana, que é fundamental no estudo de arcos com altura da seção transversal pequena. As componentes dessa matriz de

rigidez são mostradas a seguir. Note que basta fazer d_1 ou e_1 igual a zero em (4.28b) para se negligenciar os efeitos da força cisalhante ou de membrana, respectivamente.

$$\mathbf{K}_e = \frac{EI}{\alpha^3 r^3} [k_{ij}], \quad k_{ij} = k_{ji} \quad (4.29)$$

onde:

$$k_{11} = \alpha^4 (D' + D'' \cos \alpha);$$

$$k_{12} = \alpha^4 D'' \sin \alpha;$$

$$k_{13} = -\alpha^3 (D' + D'' \cos \alpha) + \frac{2}{D_1} \alpha^2 \sin \alpha;$$

$$k_{14} = \alpha^4 (D'' + D' \cos \alpha);$$

$$k_{15} = \alpha^4 D' \sin \alpha;$$

$$k_{16} = \alpha^3 (D'' + D' \cos \alpha) - \frac{2}{D_1} \alpha^2 \sin \alpha;$$

$$k_{22} = \alpha^4 (D' - D'' \cos \alpha);$$

$$k_{23} = -\alpha^3 D'' \sin \alpha + \frac{2}{D_1} \alpha^2 (1 - \cos \alpha);$$

$$k_{24} = -\alpha^4 D' \sin \alpha;$$

$$k_{25} = \alpha^4 (D'' - D' \cos \alpha);$$

$$k_{26} = \alpha^3 D' \sin \alpha - \frac{2}{D_1} \alpha^2 (1 - \cos \alpha);$$

$$k_{33} = \alpha^3 (D' + D'' \cos \alpha) + 1 + \frac{4}{D_1} (1 - \cos \alpha - \alpha \sin \alpha);$$

$$k_{34} = k_{16} = \alpha^3 (D'' + D' \cos \alpha) - \frac{2}{D_1} \alpha^2 \sin \alpha;$$

$$k_{35} = -k_{26} = -\alpha^3 D' \sin \alpha + \frac{2}{D_1} \alpha^2 (1 - \cos \alpha)$$

$$k_{33} = -\alpha^2(D' \cos \alpha + D'') - 1 - \frac{4}{D_1}(1 - \cos \alpha - \alpha \sin \alpha)$$

$$k_{44} = k_{11} = \alpha^4(D' + D'' \cos \alpha);$$

$$k_{45} = -k_{12} = -\alpha^4 D'' \sin \alpha;$$

$$k_{46} = k_{13} = -\alpha^3(D' + D'' \cos \alpha) + \frac{2}{D_1} \alpha^2 \sin \alpha;$$

$$k_{55} = k_{22} = \alpha^4(D' - D'' \cos \alpha);$$

$$k_{56} = -k_{23} = \alpha^3 D'' \sin \alpha - \frac{2}{D_1} \alpha^2 (1 - \cos \alpha);$$

$$k_{66} = k_{33} = \alpha^3(D' + D'' \cos \alpha) + 1 + \frac{4}{D_1}(1 - \cos \alpha - \alpha \sin \alpha).$$

5

ELEMENTO FINITO CURVO: MÉTODO HÍBRIDO

5.1 - INTRODUÇÃO

A formulação do elemento finito unidimensional circular a ser abordada neste capítulo para modelagem de arcos circulares foi introduzida inicialmente por Kim e Kim (1998). A matriz de rigidez deste elemento é obtida através de uma formulação híbrida, usando o princípio variacional de Hellinger-Reissner.

As funções de interpolação para os deslocamentos apresentam funções quadráticas e cúbicas, em adição às funções de interpolação lineares usuais. São consideradas também funções de interpolação para as tensões resultantes.

Na seção seguinte são apresentadas as características geométricas do elemento finito proposto, bem como o número de nós, graus de liberdade, direção e sentido das forças e deslocamentos. São definidas também as matrizes **D** e **S**, que estabelecem as relações deformação-deslocamento e deformação-tensão, respectivamente.

A Seção 5.3 apresenta as funções de interpolação para os deslocamentos e para as tensões. Na última seção é fornecida então a formulação da matriz de rigidez do elemento finito proposto.

5.2 – PRINCÍPIO VARIACIONAL DE HELLINGER-REISSNER

O elemento finito curvo mostrado na Figura 5.1 tem curvatura inicial r e dois pontos nodais, cada nó com três graus de liberdade. Os deslocamentos tangencial e normal são definidos como u e v , e a rotação da seção transversal como ϕ . As forças

resultantes tangencial e normal são definidas como P e Q, e o momento fletor resultante por M. A viga curva tem ângulo de abertura α .

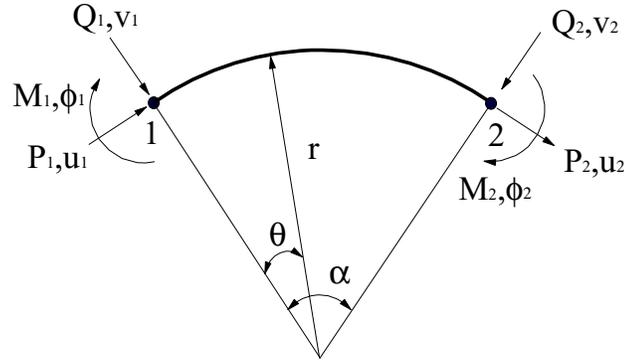


Figura 5.1 – Elemento finito de curvatura constante.

A matriz de rigidez do presente elemento será obtida através da aplicação do princípio variacional de Hellinger-Reissner (Kim e Kim, 1998). Tem-se assim que a energia potencial total para um elemento é definida segundo:

$$\pi_R = U + \Omega \quad (5.1)$$

onde:

$$U = \int \left[\boldsymbol{\sigma}^t \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^t \mathbf{S} \boldsymbol{\sigma} \right] dx \quad \text{e}$$

$$\Omega = - \sum_{i=1}^2 P_i u_i + Q_i v_i + M_i \phi_i .$$

Os vetores de tensão e deformação presentes na equação anterior são definidos segundo $\boldsymbol{\sigma}^t = \{P \quad Q \quad M\}$ e $\boldsymbol{\varepsilon}^t = \{\varepsilon_0 \quad \gamma_0 \quad \kappa\}$; e \mathbf{S} é a matriz constitutiva, que relaciona deformação-tensão.

A relação linear de deformação-deslocamento, de acordo com (2.22), é dada:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (5.2)$$

sendo \mathbf{D} definida pela Equação 2.23.

Já a relação tensão-deformação para o elemento considerado é definida pela Equação (2.27), que é reescrita a seguir:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{J}_1 \boldsymbol{\varepsilon}$$

Resolvendo-se a equação anterior para o vetor de deformações $\boldsymbol{\varepsilon}$, obtém-se:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S}\boldsymbol{\sigma}$$

sendo \mathbf{S} a matriz constitutiva definida de acordo com:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{1}{EA} & 0 & \frac{1}{rEA} \\ 0 & \frac{1}{\eta GA} & 0 \\ \frac{1}{rEA} & 0 & \frac{1}{EI} + \frac{1}{EAr^2} \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

5.3 - FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO

Nesta seção são apresentadas as funções de interpolação usadas para aproximar o comportamento dos deslocamentos e tensões.

Usando-se a coordenada adimensional $\xi = \theta/\alpha$, onde $0 \leq \xi \leq 1$, tem-se que as funções de interpolação para os deslocamentos são dadas por:

$$u = (1 - \xi)u_1 + \xi u_2 + \xi(1 - \xi)a_1 + \xi^2(1 - \xi)a_2$$

$$v = (1 - \xi)v_1 + \xi v_2 + \xi(1 - \xi)b_1 + \xi^2(1 - \xi)b_2$$

$$\phi = (1-\xi)\phi_1 + \xi\phi_2 + \xi(1-\xi)c_1 + \xi^2(1-\xi)c_2$$

onde $u_1, u_2, v_1, v_2, \phi_1$ e ϕ_2 , de acordo com a Figura 5.1, representam os valores nodais dos deslocamentos e rotação. Observe que as funções de interpolação possuem, em adição às funções de interpolação lineares usuais, a função quadrática $\xi(1-\xi)$ e a cúbica $\xi^2(1-\xi)$, cujos respectivos parâmetros são deslocamentos localizados entre os pontos nodais, representados por a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 e c_2 . Assim, de uma forma mais compacta, pode-se escrever:

$$\mathbf{u} = [\mathbf{N}_c \mid \mathbf{N}_b] \begin{Bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{d}_b \end{Bmatrix} = \mathbf{N}\mathbf{d} \quad (5.5)$$

onde:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^T &= \{u_1 \quad v_1 \quad \phi_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \phi_2\} \\ \mathbf{d}_b^T &= \{a_1 \quad b_1 \quad c_1 \quad a_2 \quad b_2 \quad c_2\} \\ \mathbf{N}_c &= \begin{bmatrix} (1-\xi) & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & (1-\xi) & 0 & 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & (1-\xi) & 0 & 0 & \xi \end{bmatrix} \\ \mathbf{N}_b &= \begin{bmatrix} \xi(1-\xi) & 0 & 0 & \xi^2(1-\xi) & 0 & 0 \\ 0 & \xi(1-\xi) & 0 & 0 & \xi^2(1-\xi) & 0 \\ 0 & 0 & \xi(1-\xi) & 0 & 0 & \xi^2(1-\xi) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Substituindo-se a Equação (5.5) em (5.2), obtém-se a deformação não só em função dos deslocamentos dos pontos nodais mas como também em função dos pontos intermediários no elemento finito, ou seja:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{d} \quad (5.6)$$

onde, $\mathbf{B} = \mathbf{D}\mathbf{N}$, ou:

$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{cccccc|cccccc} -\frac{1}{\alpha r} & \frac{\xi-1}{r} & 0 & \frac{1}{\alpha r} & -\frac{\xi}{r} & 0 & \frac{1-2\xi}{\alpha r} & -\frac{\xi(1-\xi)}{r} & 0 & \frac{2\xi-3\xi^2}{\alpha r} & -\frac{\xi^2(1-\xi)}{r} & 0 \\ \frac{1-\xi}{r} & -\frac{1}{\alpha r} & \xi-1 & \frac{\xi}{r} & \frac{1}{\alpha r} & -\xi & \frac{\xi(1-\xi)}{r} & \frac{1-2\xi}{\alpha r} & -\xi(1-\xi) & \frac{\xi^2(1-\xi)}{r} & \frac{2\xi-3\xi^2}{\alpha r} & -\xi^2(1-\xi) \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha r} & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha r} & 0 & 0 & \frac{1-2\xi}{\alpha r} & 0 & 0 & \frac{2\xi-3\xi^2}{\alpha r} \end{array} \right]$$

Já para as tensões resultantes P, Q e M são utilizadas as seguintes aproximações:

$$P = \beta_1 + \xi\beta_2 + \xi^2\beta_3$$

$$Q = \beta_4 + \xi\beta_5 + \xi^2\beta_6$$

$$M = \beta_7 + \xi\beta_8 + \xi^2\beta_9$$

onde β_i ($i = 1, 2, \dots, 8, 9$) são chamados de parâmetros de força. As equações anteriores podem ser reescritas de forma mais compacta, ou seja:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{P}\boldsymbol{\beta} \quad (5.7)$$

onde \mathbf{P} é a matriz que contém as funções de interpolação das tensões e é dada por:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \xi^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \xi^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \xi^2 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

$$\boldsymbol{\beta}^T = \{\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3 \ \beta_4 \ \beta_5 \ \beta_6 \ \beta_7 \ \beta_8 \ \beta_9\}$$

5.4 – FORMULAÇÃO DO ELEMENTO FINITO

O potencial de Hellinger-Reissner é então obtido substituindo-se as relações deformação-deslocamento e constitutiva, Equações (5.6) e (5.7), em (5.1). Dessa forma, escreve-se:

$$\pi_R = \int_I \boldsymbol{\beta}^t \mathbf{P}^t \mathbf{B} ddx - \frac{1}{2} \int_I \boldsymbol{\beta}^t \mathbf{P}^t \mathbf{S} \mathbf{P} \boldsymbol{\beta} ddx - \mathbf{Q}^t \mathbf{d} \quad (5.9)$$

onde,

$$\mathbf{Q}^t = \{\mathbf{p} \mid \mathbf{Q}_b\} = \{P_1 \quad Q_1 \quad M_1 \quad P_2 \quad Q_2 \quad M_2 \mid 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\} \mathbf{e}$$

$$\mathbf{d}^t = \{\mathbf{w} \mid \mathbf{d}_b\} = \{u_1 \quad v_1 \quad \phi_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \phi_2 \mid a_1 \quad a_2 \quad b_1 \quad b_2 \quad c_1 \quad c_2\}.$$

Como as cargas externas são aplicadas apenas nos pontos nodais, tem-se então que $\mathbf{Q}_b = \mathbf{0}$. Sabendo-se que o comprimento infinitesimal do elemento é definido como:

$$dx = r d\theta = \alpha r d\xi \quad (5.10)$$

e atribuindo-se:

$$\mathbf{G} = \int_I \mathbf{P}^t \mathbf{B} \alpha r d\xi = \int_I \mathbf{P}^t [\mathbf{B}_c \mid \mathbf{B}_b] \alpha r d\xi = [\mathbf{G}_c \mid \mathbf{G}_b], \text{ com} \quad (5.11)$$

$$[\mathbf{G}_c \mid \mathbf{G}_b] = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2}\theta_0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2}\theta_0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6}\theta_0 & 0 & 0 & -\frac{1}{12}\theta_0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6}\theta_0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3}\theta_0 & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{12}\theta_0 & 0 & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{20}\theta_0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{12}\theta_0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{4}\theta_0 & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{20}\theta_0 & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{30}\theta_0 & 0 \\ \frac{1}{2}\theta_0 & -1 & -\frac{1}{2}\theta_0 r & \frac{1}{2}\theta_0 & 1 & -\frac{1}{2}\theta_0 r & \frac{1}{6}\theta_0 & 0 & -\frac{1}{6}\theta_0 r & \frac{1}{12}\theta_0 & 0 & -\frac{1}{12}\theta_0 \\ \frac{1}{6}\theta_0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6}\theta_0 r & \frac{1}{3}\theta_0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3}\theta_0 r & \frac{1}{12}\theta_0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{12}\theta_0 r & \frac{1}{20}\theta_0 & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{20}\theta_0 r \\ \frac{1}{12}\theta_0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{12}\theta_0 r & \frac{1}{4}\theta_0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{4}\theta_0 r & \frac{1}{20}\theta_0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{20}\theta_0 r & \frac{1}{30}\theta_0 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{30}\theta_0 r \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & -\frac{1}{12} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & -\frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{H} = \int_I \mathbf{P}^t \mathbf{S} \mathbf{P} \alpha r d\xi, \text{ com} \quad (5.12)$$

$$\mathbf{H}^{-1} = \frac{1}{r^3 \theta_0} \begin{bmatrix} 9\lambda_1 & -36\lambda_1 & 30\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & -9\lambda_2 & 36\lambda_2 & -30\lambda_2 \\ & 192\lambda_1 & -180\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 36\lambda_2 & -192\lambda_2 & 180\lambda_2 \\ & & 180\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & -30\lambda_2 & 180\lambda_2 & -180\lambda_2 \\ & & & 9\lambda_3 & -36\lambda_3 & 30\lambda_3 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 192\lambda_3 & -180\lambda_3 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 180\lambda_3 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 9\lambda_4 & -36\lambda_4 & 30\lambda_4 \\ & & & & & & & 192\lambda_4 & -180\lambda_4 \\ & & & & & & & & 180\lambda_4 \end{bmatrix}$$

Simétrica

onde, $\lambda_1 = E(Ar^2 + I)$, $\lambda_2 = rEI$, $\lambda_3 = \eta GAr^2$ e $\lambda_4 = r^2EI$, chega-se, após a substituição de (5.10), (5.11) e (5.12) em (5.9), na seguinte expressão:

$$\pi_R = \boldsymbol{\beta}^t \mathbf{G} \mathbf{d} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\beta}^t \mathbf{H} \boldsymbol{\beta} - \mathbf{Q}^t \mathbf{d} \quad (5.13)$$

Observe que “ π_R ” é uma função dos parâmetros $\boldsymbol{\beta}$ e \mathbf{d} . A condição de estacionaridade de π_R exige que:

$$\delta \pi_R = \frac{\partial \pi_R}{\partial \mathbf{d}} \delta \mathbf{d} + \frac{\partial \pi_R}{\partial \boldsymbol{\beta}} \delta \boldsymbol{\beta} = 0$$

e como “ $\delta \mathbf{d}$ ” e “ $\delta \boldsymbol{\beta}$ ” são variações arbitrárias, segue que:

$$\frac{\partial \pi_R}{\partial \boldsymbol{\beta}} = 0 \rightarrow \mathbf{G} \mathbf{d} - \mathbf{H} \boldsymbol{\beta} = 0 \quad (5.14a)$$

$$\frac{\partial \pi_R}{\partial \mathbf{d}} = 0 \rightarrow \mathbf{G}^t \boldsymbol{\beta} - \mathbf{Q} = 0 \quad (5.14b)$$

que são as duas equações que devem ser satisfeitas para o equilíbrio do elemento em estudo. Resolvendo-se (5.14b) para os parâmetros de forças e depois substituindo-se o resultado em (5.14a), chega-se a:

$$\mathbf{HGQ} = \mathbf{Gd} \quad (5.15)$$

A expressão anterior pode ser resolvida para obtenção do vetor de forças, isto é:

$$\mathbf{G}^t \mathbf{H}^{-1} \mathbf{Gd} = \mathbf{Q} \quad (5.16)$$

Expandindo-se agora a matriz \mathbf{G} e os vetores \mathbf{d} e \mathbf{Q} ,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_c \\ \mathbf{G}_b \end{bmatrix}^t \mathbf{H}^{-1} [\mathbf{G}_c \quad \mathbf{G}_b] \begin{Bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{d}_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (5.17)$$

e efetuando-se o produto das matrizes do lado esquerdo da igualdade anterior, chega-se a:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_c^t \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G}_c & \mathbf{G}_c^t \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G}_b \\ \mathbf{G}_b^t \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G}_c & \mathbf{G}_b^t \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G}_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{d}_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (5.18)$$

que pode ser reescrita numa forma mais simplificada, ou seja:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{cc} & \mathbf{K}_{cb} \\ \mathbf{K}_{bc} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{d}_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (5.19)$$

sendo,

$$\mathbf{K}_{ij} = \mathbf{G}_i^t \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G}_j, \text{ com } i = c, b; j = c, b \quad (5.20)$$

Isolando-se então na segunda equação de (5.19) o vetor de deslocamentos não nodais \mathbf{d}_b , tem-se:

$$\mathbf{d}_b = -\mathbf{K}_{bb}^{-1} \mathbf{K}_{bc} \mathbf{w} \quad (5.21)$$

e substituindo-se o resultado na primeira equação de (5.19), obtem-se:

$$\mathbf{K}_{cc} \mathbf{w} - \mathbf{K}_{cb} \mathbf{K}_{bb}^{-1} \mathbf{K}_{bc} \mathbf{w} = \mathbf{p}, \text{ ou}$$

$$\left(\mathbf{K}_{cc} - \mathbf{K}_{cb} \mathbf{K}_{bb}^{-1} \mathbf{K}_{bc} \right) \mathbf{w} = \mathbf{p}, \text{ ou}$$

$$\mathbf{K}_e \mathbf{w} = \mathbf{p} \tag{5.22}$$

onde \mathbf{K}_e é a matriz de rigidez do elemento, que pode ser obtida através da expressão:

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{K}_{cc} - \mathbf{K}_{cb} \mathbf{K}_{bb}^{-1} \mathbf{K}_{bc}.$$

6

PROGRAMA COMPUTACIONAL

6.1 – INTRODUÇÃO

Este capítulo traz os procedimentos computacionais utilizados na implementação das formulações dos elementos finitos mostrados nos Capítulos 3, 4 e 5.

O programa computacional foi desenvolvido em linguagem *C* e então compilado na plataforma Mac OS 9.0.4. Este programa é capaz de efetuar análises lineares de sistemas estruturais formados por barras, com ênfase na modelagem de arcos.

A Figura 6.1 apresenta o fluxograma geral do programa computacional desenvolvido. O primeiro procedimento a ser realizado pelo programa principal é a leitura do arquivo de dados de entrada. Estes dados definem o número de elementos finitos para a modelagem, o tipo de elemento finito, as propriedades físicas da estrutura, geometria da modelagem, condições de contorno e o carregamento externo atuante.

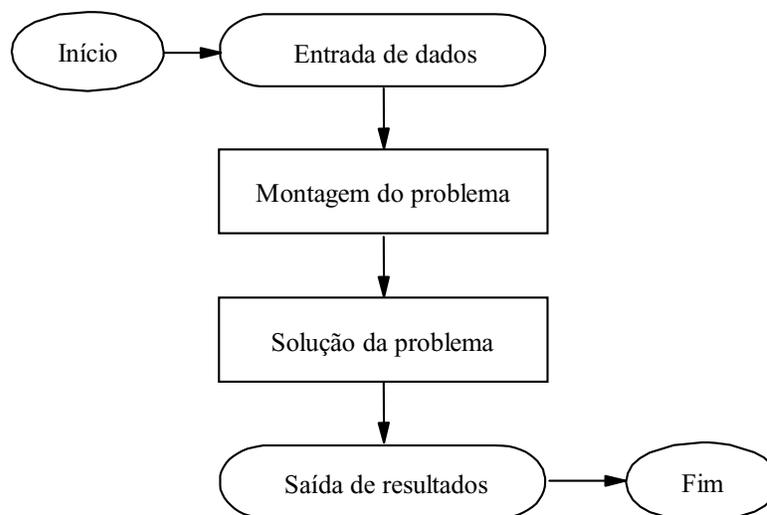


Figura 6.1 – Fluxograma simplificado do programa.

O procedimento seguinte consiste na montagem da matriz de rigidez global da estrutura em estudo e do vetor de cargas externas. Em seguida, é então efetuada a análise do problema. Como último procedimento tem-se a montagem do arquivo de saída, onde são armazenados e apresentados os resultados da análise.

Na seção seguinte é ilustrado o procedimento de leitura do arquivo de dados de entrada, onde são detalhadas as opções de modelagem, variação da seção transversal e carregamento externo. A Seção 6.3 apresenta o procedimento de montagem da matriz de rigidez global da estrutura.

Durante a apresentação das etapas do programa principal ao longo das seções seguintes, são ilustrados os dados de entrada para a análise do sistema estrutural mostrado na Figura 6.2.

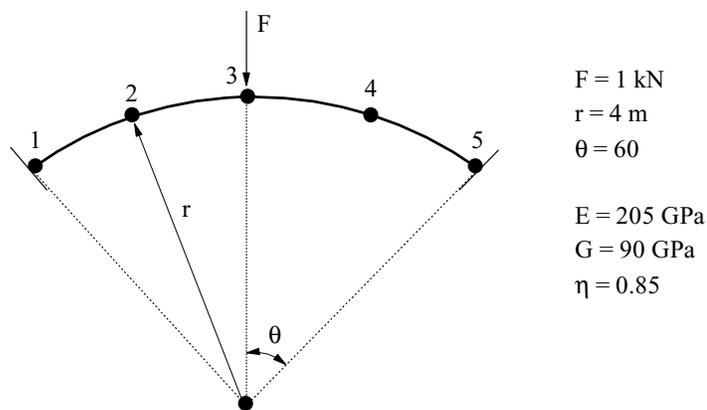


Figura 6.2 – Modelagem da estrutura.

6.2 - DADOS DE ENTRADA

Esta seção apresenta o procedimento de leitura do arquivo de dados de entrada. O fluxo destes dados é controlado por um conjunto de macro-comandos como ilustrado na Figura 6.3, que fornece o arquivo de dados a ser utilizado na modelagem do arco presente na Figura 6.2.

dad	...	Macro-comando
4 5 1	...	nelem, npoin, isim
205.0e9 90.0e9 0.85	...	E, G, η
cir	...	Macro-comando
4.0 60.0	...	r, θ
sec	...	Macro-comando
0 1 4	...	parin, elemi, elemf
0.24 0.0072	...	A, I
cnt	...	Macro-comando
1 1 1 1	...	no, u, v, ϕ
5 1 1 1		
for	...	Macro-comando
3 -1.0e3 0. 0.	...	no, P, ϕ , M
5 0. 0. 0.		

Figura 6.3 – Exemplo de um arquivo de dados

A Tabela 6.1 ilustra os macro-comandos possíveis de serem lidos e a correspondente tarefa associada. As variáveis de controle e as propriedades físicas, fornecidos no arquivo de entrada, são definidos na subseção 6.2.1. Na subseção 6.2.2 são apresentadas as opções de modelagem, destacando-se a montagem da *Matriz de Dados Nodais*.

A subseção 6.2.3 apresenta as opções para a variação da seção transversal, onde destaca-se a criação da *Matriz de Dados dos Elementos*. Na subseção 6.2.4 é apresentada a leitura das condições de contorno e então ilustrada a *Matriz das Condições de Contorno* da estrutura da Figura 6.2. Na última subseção são apresentadas as opções de entrada das cargas externas.

Tabela 6.1 – Declaração dos macro-comandos.

Macro-comando	Descrição
DAD	Entrada de parâmetros de controle
PAR	Modelagem de arco parabólico
CIR	Modelagem de arco circular
COO	Modelagem aleatória
CNT	Entrada de condições de contorno
SEC	Entrada de dados da seção transversal
FOR	Entrada de cargas (força e/ou momento) concentradas
DIS	Entrada de carga uniformemente distribuída
RAD	Entrada de pressão radial uniforme
FIM	Finaliza os dados de entrada

6.2.1 – Variáveis globais (Macro-comando DAD)

Nesta subseção são apresentadas as variáveis de caráter global fornecidas pelo usuário do programa no arquivo de entrada. A Tabela 6.2 fornece os nomes dessas variáveis, juntamente com suas definições. São destacados nesta tabela as variáveis de controle, como o número de elementos para a modelagem **NELEM**, o número de nós **NPOIN**, a variável **TIPO**, que define o elemento finito a ser utilizado para a análise da estrutura e a variável **ISIM**, que representa o indicador de simetria da estrutura. Quando a estrutura em estudo apresenta simetria de geometria e de carregamento, pode-se então modelar apenas parte da estrutura. Caso a estrutura apresente essa dupla simetria, a variável **ISIM** é definida com valor 0. Caso contrário, define-se essa variável com valor 1.

São destacados também as propriedades físicas da estrutura, como o módulo de elasticidade longitudinal **E**, o módulo de elasticidade trasnversal **G** e o coeficiente de cisalhamento η . Se o coeficiente de cisalhamento for nulo ($\eta = 0$), o efeito do esforço cortante é desconsiderado na análise do problema.

Tabela 6.2 – Variáveis globais.

Variável	Definição
NELEM	Número de elementos
NPOIN	Número de nós
TIPO	Tipo de elemento Se TIPO = 1 → Elemento finito reto (Seção 3.2) Se TIPO = 2 → Elemento finito circular (Seção 3.3) Se TIPO = 3 → Elemento finito parabólico (Seção 3.4) Se TIPO = 4 → Elemento finito circular (Capítulo 4.3) Se TIPO = 5 → Elemento finito circular (Capítulo 4.4) Se TIPO = 6 → Elemento finito circular (Capítulo 5)
ISIM	Indicador de simetria Se ISIM = 0 → Existe simetria Se ISIM = 1 → Não existe simetria
E	Módulo de elasticidade longitudinal
G	Módulo de elasticidade transversal
η	Coefficiente de cisalhamento

6.2.2 - Modelagem

A modelagem de uma estrutura consiste na criação da *Matriz de Dados Nodais*, onde são definidas as coordenadas, ângulo de tangência e raio de cada ponto nodal. Pode-se optar por três tipos de modelagem, sendo dois deles realizados automaticamente, depois de fornecidos alguns dados específicos da estrutura.

Nos sub-ítem seguintes são apresentadas as opções de modelagens automáticas (arco parabólico e arco circular) e a opção de modelagem manual.

6.2.2.1 - Arco parabólico (Macro-comando PAR)

Um arco com geometria parabólica pode ser modelado automaticamente. Para essa modelagem é necessário fornecer os seguintes dados: o comprimento do vão (L) e a altura da flecha (f).

A *Matriz de Dados Nodais* é gerada automaticamente definindo-se as coordenadas x e y num sistema cartesiano. A origem deste sistema corresponde ao

primeiro ponto nodal da estrutura, como ilustrado no Figura 6.4. Além das coordenadas cartesianas, são calculados o ângulo de tangência e o raio para cada ponto nodal.

A equação do arco parabólico da Figura 6.4 é definida segundo:

$$y = -\frac{1}{4a}(x^2 - Lx) \quad (6.1)$$

onde, a é a distância do vértice ao foco da parábola. O valor de a pode ser obtido substituindo-se o ponto conhecido V (veja Figura 6.4) na Equação (6.1), ou seja:

$$a = \frac{L^2}{16f}$$

O ângulo de tangência de cada nó pode ser obtido derivando-se a Equação (6.1) em relação a x e depois substituindo-se o resultado na Equação (3.35), para em seguida resolvê-la para o ângulo θ . Assim:

$$\theta = \arctan\left(\frac{2x - L}{4a}\right) \quad (6.2)$$

O raio de cada ponto nodal pode ser obtido de acordo com a Equação (3.40), ou seja:

$$r = 2a \sec^3 \theta \quad (6.3)$$

A *Matriz de Dados Nodais* é então obtida utilizando-se as Equações (6.1), (6.2) e (6.3). O primeiro nó da estrutura modelada é inicializado individualmente, ou seja:

$$x_1=0; y_1=0; \theta_1 = \arctan\left(\frac{-L}{4a}\right) \text{ e } r_1 = 2a \sec^3 \theta_1$$

e as coordenadas dos demais nós da estrutura são obtidas através das seguintes expressões:

$$x_i = x_{i-1} + dx ; y_i = -\frac{1}{4a}(x_i^2 - Lx_i) ; \theta_i = \arctan\left(\frac{2x_i - L}{4a}\right) \text{ e } r_i = 2a \sec^3 \theta_i$$

onde $i=2$, **NPOIN** e $dx = L / \text{NELEM}$.

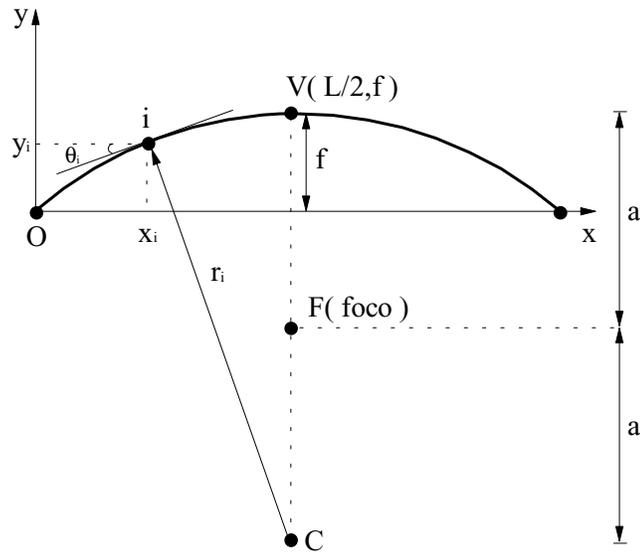


Figura 6.4 – Modelagem arco parabólico.

6.2.2.2 - Arco circular (Macro-comando CIR)

Um arco com geometria circular pode também ser modelado automaticamente. Para essa modelagem as seguintes informações precisam ser fornecidas pelo usuário do programa: meio ângulo de abertura do arco (θ) e o raio (r).

O sistema de coordenadas tem origem no centro do arco, como apresentado na Figura 6.5. Observe que os valores de x e y podem ser obtidos diretamente nesta Figura. O primeiro nó da estrutura modelada, como no caso do arco parabólico, é inicializado individualmente segundo:

$$\alpha_1 = -\phi; x_1 = -r \sin \phi; y_1 = r \cos \phi \text{ e } r_1 = r$$

os dados dos demais nós da estrutura são obtidos através das seguintes expressões:

$$\alpha_i = \alpha_{i-1} + d\phi; x_i = r \sin \alpha_i; y_i = r \cos \alpha_i; r_i = r$$

sendo $i=2, \text{NPOIN}$ e $d\phi = 2\theta / \text{NELEM}$.

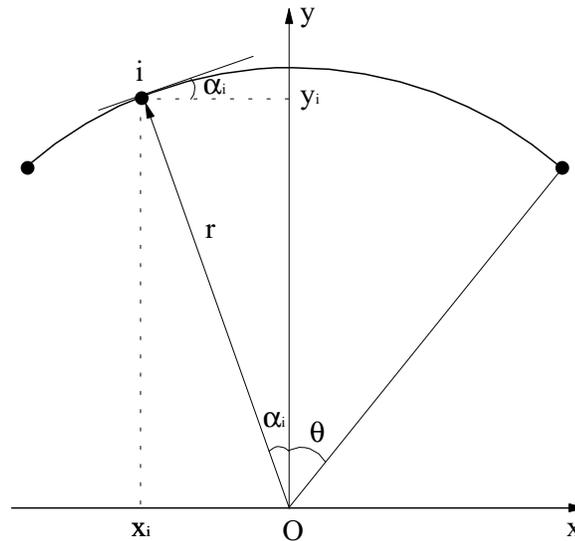


Figura 6.5 – Modelagem arco circular.

6.2.2.3 – Coordenadas aleatórias (Macro-comando COO)

As coordenadas dos pontos nodais podem também ser fornecidas manualmente, de maneira aleatória. Seja a estrutura da Figura 6.2, que consiste de um arco circular bi-engastado.

A referida estrutura é então subdividida em quatro elementos finitos circulares. Os pontos nodais 1 e 5 estão localizados nos engastes, e o ponto nodal 3 está localizado no vértice do arco. Os dados de cada nó da estrutura, como coordenadas x e y, ângulo

de tangência (θ) e raio, são fornecidos então individualmente como ilustrado na Tabela 6.3.

Tabela 6.3 – Dados de cada nó do Sistema Estrutural em estudo.

Nó	x	y	θ	Raio
1	0.0000	0.0000	-60.0	4.0
2	1,4641	1,4641	-30.0	4.0
3	3,4641	2.0000	0.0	4.0
4	5,4641	1,4641	30.0	4.0
5	6,9282	0.0000	60.0	4.0

6.2.3 – Seção transversal (Macro-comando SEC)

As informações sobre a área e a inércia da seção transversal de cada elemento finito da estrutura modelada são armazenados na *Matriz de Elementos*. Pode-se então atribuir valores distintos de área e inércia para cada elemento finito da estrutura.

Foram implementados dois tipos de variações de seção transversal. O primeiro tipo de variação foi proposto por Belluzzi (1971) e segue as seguintes expressões:

$$A_x = \frac{A_v}{\cos \theta_x} \quad I_x = \frac{I_v}{\cos \theta_x} \quad (6.4)$$

onde, A_v e I_v são a área e a inércia do vértice do arco, respectivamente; A_x e I_x são a área e a inércia, respectivamente, de uma seção transversal num ponto genérico x do arco. Nesse ponto genérico o arco tem um ângulo de tangência θ_x . Para utilizar essa opção é necessário informar os valores da área e inércia da seção transversal do vértice do arco estudado. O ângulo de tangência de cada elemento é obtido fazendo-se a média entre os ângulos de tangência dos nós deste elemento.

O outro tipo de variação da seção transversal foi apresentado por Darkov e Kouznétsov (1982), e segue a seguinte expressão da altura da seção transversal:

$$h_x = h_v + \frac{h_a - h_v}{L/2} |x| \quad (6.5)$$

onde, h_a e h_v são as alturas das seções transversais do apoio e do vértice do arco, respectivamente. A altura da seção transversal num ponto genérico x tem valor h_x para uma seção transversal retangular. O valor da área e inércia de cada elemento são calculados seguindo as seguintes expressões:

$$A_x = bh_x \text{ e } I_x = \frac{bh_x^3}{12} \quad (6.6)$$

onde b é a base da seção transversal.

Para utilizar essa opção é necessário que o usuário informe os valores de h_a , h_v e b . A abscissa de cada elemento é obtido fazendo-se a média entre as abcissas dos nós deste elemento.

A Tabela 6.4 fornece um resumo das opções de variação da seção transversal.

Tabela 6.4 – Opções de variação da seção transversal.

Variável PARIN	Varição da seção transversal
0	Constante
1	Belluzzi (1971)
2	Darkov e Kouznétsov (1982)

Se a estrutura apresentar seção transversal constante, deve-se então informar diretamente a área e inércia. A estrutura modelada da Figura 6.2 tem área e inércia constantes. Na Tabela 6.5 pode ser vista a *Matriz de Elementos* do sistema estrutural apresentado na Figura 6.2.

Tabela 6.5 – Seção transversal.

Elemento	Área	Inércia
1	0.24	0.0072
2	0.24	0.0072
3	0.24	0.0072
4	0.24	0.0072

6.2.4 – Condições de contorno (Macro-comando CNT)

Após a definição dos pontos nodais do modelo estrutural, pode-se começar a montagem da *Matriz de Condições de Contorno*, onde os três graus de liberdade de cada nó são inicialmente definidos com o valor 0. O valor 0 indica que o deslocamento está livre e o valor 1 indica que o deslocamento está impedido.

A Tabela 6.6 apresenta as condições de contorno da estrutura da Figura 6.2. Observe que todos os deslocamentos dos nós 1 e 5 estão impedidos, o que caracteriza um engastamento.

Tabela 6.6 – Condições de contorno.

Nó	u	v	ϕ
1	1	1	1
2	0	0	0
3	0	0	0
4	0	0	0
5	1	1	1

Ao utilizar o macro comando CNT, o usuário deve informar o número do nó e em seguida definir as condições (impedido ou livre) dos seus deslocamentos e rotação.

6.2.5 – Cargas externas

Nesta subseção são apresentadas as opções de entrada do carregamento externo. O vetor de cargas é então montado durante a leitura destes carregamento. Foram elaboradas três opções de entrada de carregamento externo.

A primeira opção de entrada, definida pelo macro-comando **FOR**, permite a leitura das cargas concentradas (forças e/ou momentos) aplicadas diretamente num certo ponto nodal. Para usar essa opção é necessário informar o número do nó, o valor da força concentrada, a inclinação desta força em relação ao eixo vertical e o valor do momento fletor neste ponto.

As cargas concentradas nos nós dos elementos finitos são diretamente introduzidas no vetor de cargas nodais equivalentes total, considerando seus sinais corretos, nas posições correspondentes aos graus de liberdade a que elas se relacionam.

Outra opção de entrada, definida pelo macro-comando **DIS**, consiste na colocação de carga uniformemente distribuída ao longo dos elementos finitos. Para usar esta opção é necessário que o usuário forneça os números dos elementos finitos (inicial e final) que vão receber o carregamento, o valor da carga por unidade de comprimento e o ângulo de inclinação desta carga em relação ao eixo vertical.

A última opção de entrada, definida pelo macro-comando **RAD**, permite a leitura dos dados referentes a uma pressão radial uniforme atuante ao longo dos elementos finitos. Para usar esta opção é necessário que o usuário forneça: os números dos elementos finitos (inicial e final) que vão receber o carregamento e o valor da carga por unidade de comprimento.

No caso de carregamento localizado fora dos pontos nodais, deve-se obter um carregamento nodal equivalente (macro-comandos **DIS** e **RAD**). A Figura 6.6 ilustra, por exemplo, o carregamento nodal equivalente ao das cargas uniformemente distribuída aplicada no elemento.

Depois de montado o vetor de cargas nodais equivalente, deve-se então rotacionar as cargas de cada nó da direção horizontal/vertical para a direção tangencial/radial, no caso de análises utilizando o elemento finito parabólico e os circulares. No caso de emprego do elemento finito reto desenvolvido no Capítulo 3, o vetor de cargas externas deverá permanecer na direção horizontal/vertical.

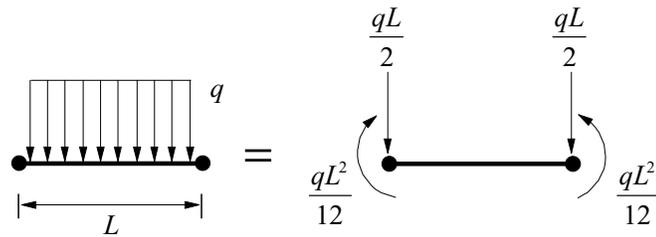


Figura 6.6 – Carregamento nodal equivalente.

O vetor de cargas externas aplicadas num sistema estrutural modelado, por exemplo, com quatro elementos finitos, tem a seguinte forma:

$$p^T = \{P_1 \quad Q_1 \quad M_1 \mid P_2 \quad Q_2 \quad M_2 \mid P_3 \quad Q_3 \quad M_3 \mid P_4 \quad Q_4 \quad M_4 \mid P_5 \quad Q_5 \quad M_5\}$$

onde P_i , Q_i e M_i são as forças tangencial (normal), radial (cortante) e o momento fletor aplicados em cada nó. No caso do sistema estrutural apresentado na Figura 6.2, o vetor de cargas externas tem os seguintes valores:

$$p^T = \{0 \quad 0 \quad 0 \mid 0 \quad 0 \quad 0 \mid 0 \quad -1000 \quad 0 \mid 0 \quad 0 \quad 0 \mid 0 \quad 0 \quad 0\}.$$

6.3 – MONTAGEM E ANÁLISE DO PROBLEMA

Nesta seção é apresentado o procedimento de montagem da matriz de rigidez global da estrutura. Essa montagem consiste no agrupamento das matrizes de rigidez de cada elemento da estrutura modelada.

Como já definido nos capítulos anteriores, a matriz de rigidez de cada elemento finito tem a seguinte forma:

$$K^i = \begin{bmatrix} K_{11}^i & K_{12}^i \\ K_{21}^i & K_{22}^i \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

Observe que os nós do sistema estrutural em estudo são numerados sequencialmente e que o primeiro nó do elemento seguinte corresponde ao último nó do elemento anterior (veja Figura 6.2). Por esse motivo, como mostrado na Figura 6.7, os coeficientes não-nulos da matriz de rigidez global estão agrupados em uma faixa diagonal denominada banda do sistema de equações. Fora da banda, existem apenas coeficientes nulos. A Figura 6.7 apresenta o sistema de equações da estrutura da Figura 6.2, destacando-se a montagem da matriz de rigidez global do sistema.

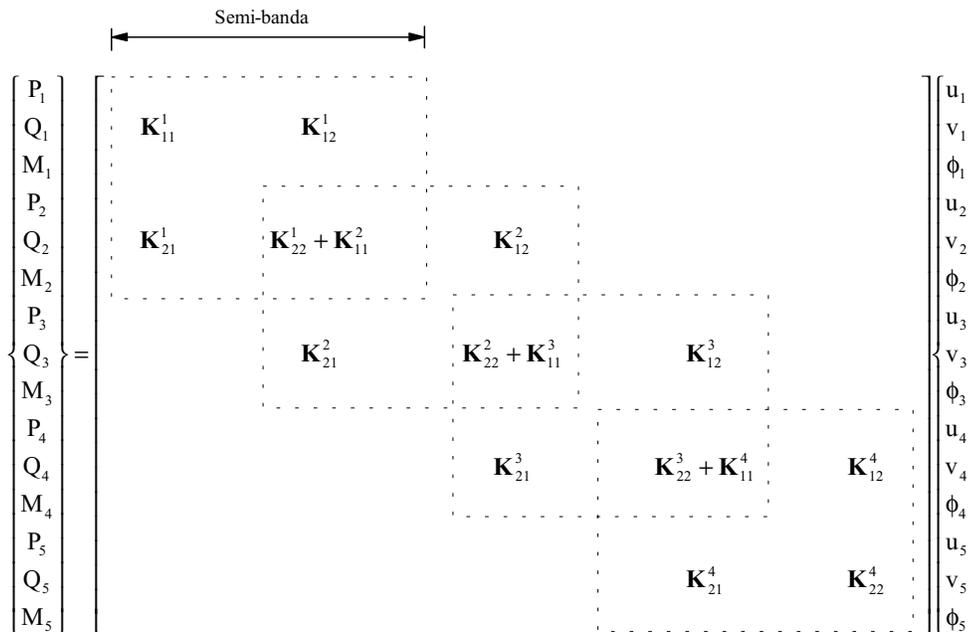


Figura 6.7 – Matriz de rigidez global.

Depois de montada a matriz de rigidez global, resolve-se o sistema de equações da Figura 6.7 para a obtenção das incógnitas do problema (deslocamentos e rotação em

cada ponto nodal). Evidentemente, o vetor de incógnitas do problema estará na mesma direção que o vetor de cargas externas impostas na estrutura. A Tabela 6.7 apresenta os deslocamentos nodais da estrutura da Figura 6.2, para o emprego do elemento circular apresentado no Capítulo 3.

Tabela 6.7 – Deslocamentos de cada ponto nodal.

Nó	Tangencial	Radial	Rotação
1	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00
2	3,35E-07	-3,23E-08	-6,22E-07
3	0,00E+00	-2,03E-06	0,00E+00
4	-3,35E-07	-3,23E-08	6,22E-07
5	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00

Já a Tabela 6.8 fornece os esforços internos resultantes em cada elemento finito da estrutura.

Tabela 6.8 – Esforços internos em cada elemento finito.

Elemento	Pi	Qi	Mi	Pj	Qj	Mj
1	-803,384	-391,501	-191,749	891,501	-62,642	-160,721
2	-891,501	62,642	160,721	740,742	-500,000	442,317
3	-740,742	-500,000	-442,317	891,501	62,642	-160,721
4	-891,501	-62,642	160,721	803,384	-391,501	191,749

Esse problema foi proposto por Litewka (1998), e usado aqui para exemplificar o processo de modelagem de uma estrutura usando o programa computacional desenvolvido.

7

EXEMPLOS NUMÉRICOS

7.1 – INTRODUÇÃO

Através da análise de problemas estruturais encontrados na literatura, pretende-se neste capítulo verificar a eficiência das formulações de elementos finitos estudadas neste trabalho (Capítulos 3, 4 e 5) através da análise de vários problemas de equilíbrio que possuem soluções analíticas ou numéricas na literatura.

Um resumo das formulações é apresentado na Tabela 7.1, onde são destacadas as abreviaturas usadas ao longo do capítulo para identificar cada uma delas. Na mesma tabela são apresentadas também algumas características importantes de cada formulação.

Neste trabalho, o ‘erro percentual’ dos resultados obtidos através das diversas formulações, em relação ao valor apresentado na literatura, é calculado através da expressão:

$$\text{ERRO\%} = 100 \times \frac{\text{resultado presente trabalho} - \text{resultado literatura}}{\text{resultado literatura}} \quad (7.1)$$

No primeiro exemplo, um arco parabólico biengastado, que possui solução analítica apresentada em Leontovich (1959), é analisado para diferentes situações de carregamento. É realizado um estudo sobre a eficiência dos elementos parabólico WAN e reto TIM e verificada a influência da relação f/L (veja Figura 7.1) sobre as reações de apoio do arco para um certo caso de carga. Além disso, são traçados os diagramas de momento fletor para todos os casos de carga. Como última análise, são traçadas as linhas de influência das reações de apoio para um caso de carga.

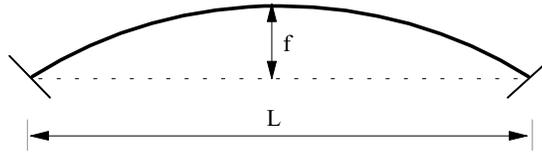


Figura 7.1 – Arco parabólico biengastado.

No segundo exemplo são comparados os resultados obtidos usando-se WAN e TIM, na modelagem de um arco com inércia variável. A solução analítica desse sistema estrutural é apresentada em Belluzzi (1971).

No terceiro exemplo são analisados dois sistemas estruturais circulares esbeltos de seção transversal constante. Esses sistemas estruturais serão usados aqui com o objetivo de testar as formulações AKT, LIT, KIM e FRI na obtenção dos deslocamentos e esforços. A solução analítica desses sistemas estruturais são apresentadas em Raveendranath *et al.* (1999).

No quarto exemplo é estudado um sistema estrutural circular espesso cuja solução analítica também é apresentada em Raveendranath e Pradhan (1999). Este sistema estrutural é usado aqui com o objetivo de testar as formulações AKT, LIT, KIM, FRI e TIM na obtenção dos deslocamentos e esforços. Além disso, é verificada a influência do índice de esbeltez na convergência das formulações circulares.

O último exemplo deste capítulo consiste de um arco que tem geometria circular e seção transversal constante. A razão de esbeltez deste arco é de $r / t = 6.667$, o que o caracteriza como espesso. Este exemplo tem como objetivo analisar os deslocamentos radiais do arco obtidos através das formulações LIT, AKT, KIM, FRI e TIM para duas situações de carregamento. Como última análise, os dois casos de carga desse exemplo são estudados para diferentes valores da razão de esbeltez e também ângulo de abertura, verificando-se a influência do efeito da força cortante para estas relações.

Tabela 7.1 – Resumo das formulações.

Referência bibliográficas	Formulação (abreviatura)	Características
<ul style="list-style-type: none"> • Marquis e Wang (1989) 	WAN	<ul style="list-style-type: none"> • Elemento parabólico; • Método da flexibilidade; • 2º Teorema de Castigliano; • Teorema da Reciprocidade de Maxwell.
<ul style="list-style-type: none"> • Rakowski (1989) • Paramasivam, Ramachandre e Muthiah (1992) • Friedman e Kosmatka (1993) 	TIM	<ul style="list-style-type: none"> • Elemento reto; • Método da flexibilidade; • 2º Teorema de Castigliano; • Teorema da Reciprocidade de Maxwell.
<ul style="list-style-type: none"> • Akhtar (1987) 	AKT	<ul style="list-style-type: none"> • Elemento circular; • Método da flexibilidade; • 2º Teorema de Castigliano; • Teorema da Reciprocidade de Maxwell.
<ul style="list-style-type: none"> • Friedman e Kosmatka (1998) 	FRI	<ul style="list-style-type: none"> • Elemento circular; • Princípio da Energia Potencial mínima; • Funções de interpolação trigonométricas para os deslocamentos.
<ul style="list-style-type: none"> • Litewka e Rakowski (1997, 1998) 	LIT	<ul style="list-style-type: none"> • Elemento circular; • Método da flexibilidade; • Princípio da Energia Potencial mínima; • Funções de interpolação trigonométricas para os deslocamentos.
<ul style="list-style-type: none"> • Kim e kim (1998) 	KIM	<ul style="list-style-type: none"> • Elemento circular; • Formulação híbrida; • Princípio variacional de Hellinger-Reissner; • Funções de interpolação para os deslocamentos e tensões.

7.2 – ARCO PARABÓLICO BI-ENGASTADO

Neste primeiro exemplo, um arco parabólico é analisado para quatro casos de carga. Na primeira subseção é feita uma análise de convergência, comparando-se os resultados obtidos através das formulações WAN e TIM. Ainda nessa subseção é verificada a influência da relação f/L (flecha / vão) sob as reações de apoio do arco.

Na subseção 7.2.2 são traçados os diagramas de momento fletor para os quatro casos de carga. Já na última subseção, são traçadas as linhas de influência das reações de apoio para o arco.

7.2.1 – Análise de convergência

O arco biengastado ilustrado na Figura 7.2 tem seção transversal constante, e de acordo com as dimensões geométricas fornecidas na figura chegam-se aos seguintes valores para a distância do vértice ao foco (Equação 3.34) e o raio de curvatura (ponto no vértice, Equação 3.40): $a = 6.25$ m e $r = 12.5$ m. Como $r \gg t$, o efeito da força cortante é muito menor que as contribuições do momento fletor e força axial; assim, pode ser desprezado da análise ($\eta = 0$).

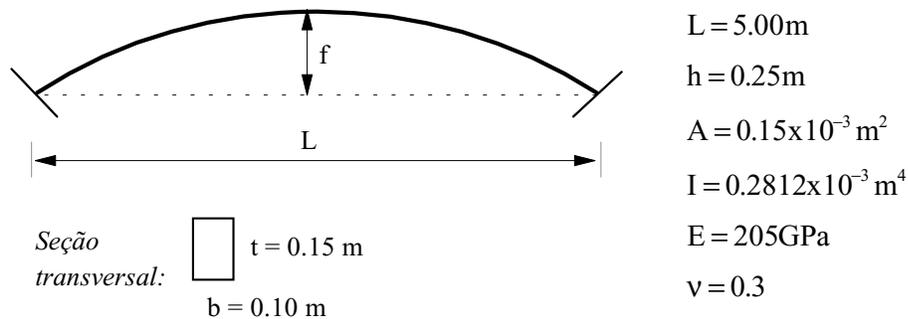


Figura 7.2 – Arco parabólico: propriedades geométricas.

Como mostrado na Figura 7.3, o arco é investigado para quatro casos de carga. Nos Casos 1 e 2, a carga concentrada $P = 1$ kN está localizada no vértice do arco, nas direções vertical e horizontal, respectivamente. Já no Caso 3, o carregamento é composto de três cargas concentradas verticais, equidistantes entre si, também de valor

$P = 1 \text{ kN}$. No último caso de carga tem-se uma carga uniformemente distribuída ao longo de todo o comprimento arco, de valor $q = 1 \text{ kN/m}$.

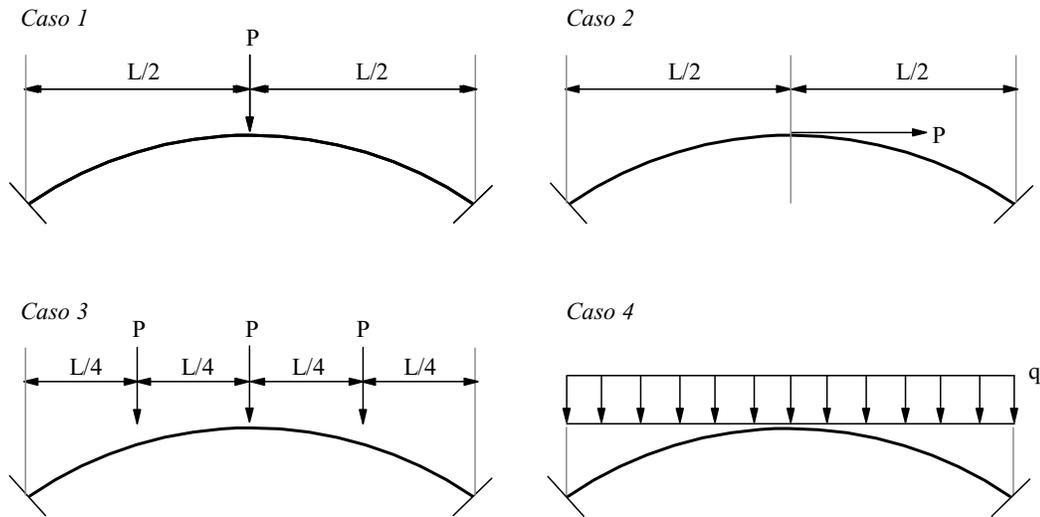


Figura 7.3 – Arco parabólico: carregamentos atuantes.

Os resultados analíticos dos esforços axial, cortante e momento fletor dos quatro casos de carga estão presentes no livro de Leontovich (1959) e serão usados aqui para comparar os resultados obtidos com os elementos WAN e TIM. A Figura 7.4 apresenta as posições, direção e sentido positivo dos esforços comparados neste exemplo.

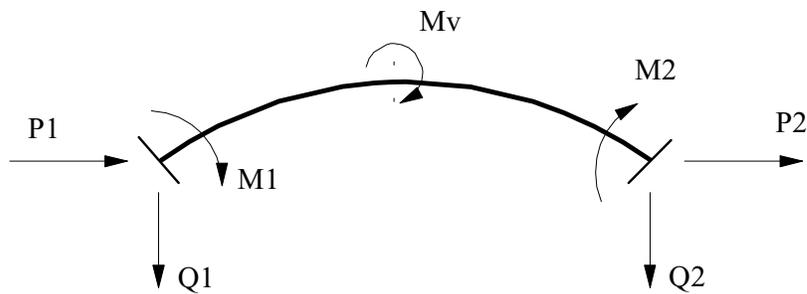


Figura 7.4 – Esforços: direção e sentidos positivos.

Nos casos de carga 1, 3 e 4, devido à dupla simetria (geometria e carregamento), apenas metade do arco foi modelada, com restrição do deslocamento axial u e rotação ϕ no vértice (veja Figura 7.5).

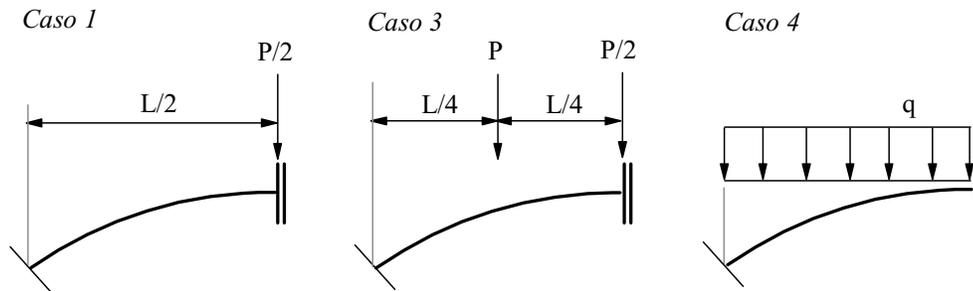


Figura 7.5 – Modelagem do arco: casos 1, 3 e 4.

A Tabela 7.2 apresenta os valores das reações de apoio P_1 e M_1 , obtidos pelas formulações WAN e TIM, para o caso de carga 1, utilizando modelos estruturais com 1, 2, 3, 4, 5 e 6 elementos finitos. Nessa tabela são apresentados também os erros percentuais dessas reações em relação à solução exata.

Note que, para essa situação de carga, que com apenas um elemento WAN foram obtidas as reações de apoio P_1 e M_1 próximas às da solução exata. No entanto, para a formulação TIM foram necessários dois e seis elementos para se chegar à valores próximos da solução exata para as reações P_1 e M_1 , respectivamente. Os resultados desta análise também são apresentados na Figura 7.6.

Tabela 7.2 – Caso 1: carga concentrada vertical.

N. elementos	P_1	ERRO%	M_1	ERRO%
1	3690,064	4,964	-168,281	-49,319
2	3516,768	0,035	-296,577	-10,680
3	3506,716	-0,251	-317,378	-4,415
4	3504,679	-0,309	-324,513	-2,266
5	3503,993	-0,329	-327,792	-1,278
6	3503,688	-0,338	-329,568	-0,744
WAN (1 elem.)	3503,171	-0,352	-333,589	0,467
Solução exata	3515,555		-332,037	

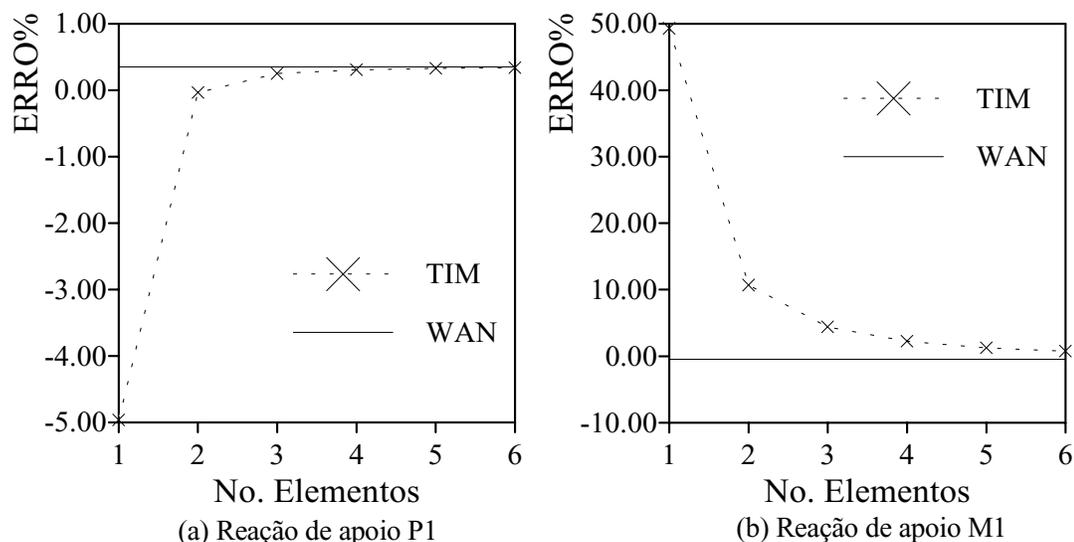


Figura 7.6 – Caso 1: reações de apoio P_1 e M_1

A Tabela 7.3 apresenta os valores das reações de apoio Q_1 e M_1 , obtidos pelas formulações WAN e TIM, para o caso de carga 2, utilizando modelos estruturais com 2, 4, 6, 8, 10, 12 e 22 elementos finitos. Nessa tabela são apresentados também os erros percentuais dessas reações em relação à solução exata.

Tabela 7.3 – Caso 2: carga concentrada horizontal.

N. elementos	Q_1	ERRO %	M_1	ERRO %
2	49,465	31,907	-0,111	-99,644
4	40,500	8,001	-23,445	-24,976
6	38,836	3,563	-27,775	-11,121
8	38,254	2,009	-29,290	-6,271
10	37,984	1,290	-29,992	-4,026
12	37,837	0,900	-30,373	-2,807
22	37,603	0,274	-30,983	-0,854
WAN (2 elems.)	37,504	0,012	-31,239	-0,035
Solução exata	37,500		-31,250	

Note que, para essa situação de carga, com apenas dois elementos WAN foi possível obter as reações de apoio Q_1 e M_1 próximas a da solução exata. No entanto, para a formulação TIM foram necessários 12 e 22 elementos para se aproximar da solução exata de Q_1 e M_1 , respectivamente. Os resultados desta análise são também apresentados na Figura 7.7.

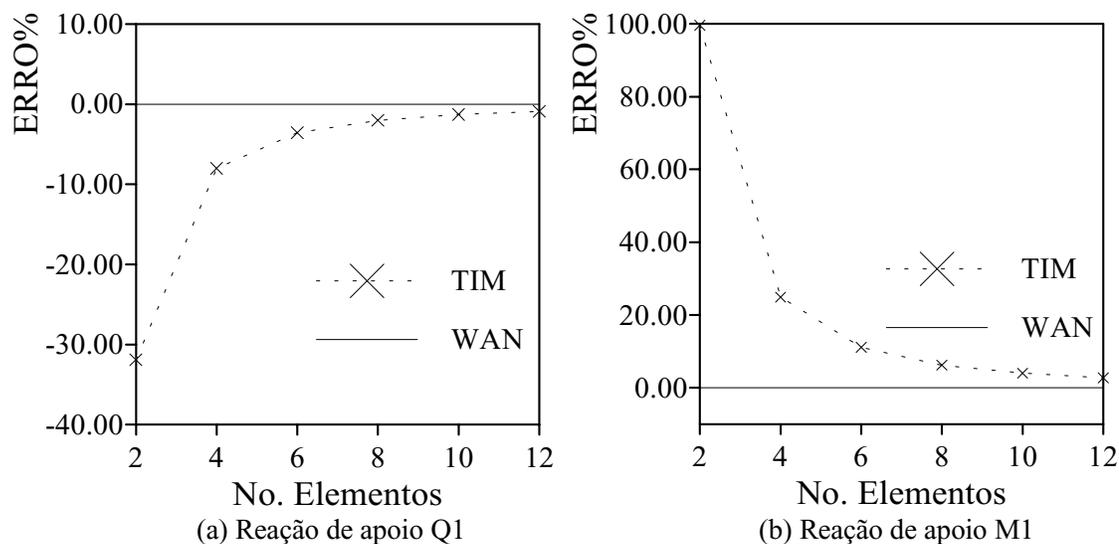


Figura 7.7 – Caso 2: reações de apoio Q_1 e M_1 .

A Tabela 7.4 apresenta os valores da reação de apoio M_1 e momento fletor localizado no vértice M_v para o caso de carga 3. Nessa tabela são apresentados também os erros percentuais dessas reações em relação à solução exata, para modelos estruturais com 2, 4 e 8 elementos finitos.

Observe que para essa situação de carga, mais uma vez, com apenas dois elementos WAN foi possível obter os momentos fletores M_1 e M_v próximos daqueles da solução exata. No entanto, para a formulação TIM foram necessários oito elementos para se chegar a valores próximos à solução.

Tabela 7.4 – Caso 3: três cargas concentradas.

N. elementos	M_v	ERRO %	M_1	ERRO %
2	-242,348	-23,053	389,421	22,688
4	-300,708	-4,523	332,540	4,767
8	-314,952	-0,001	317,713	0,096
WAN (2 elem.)	-315,561	0,193	318,406	0,314
Solução exata	-314,954		317,408	

A Tabela 7.5 apresenta os valores da reação de apoio M_1 para o caso de carga 4. Nessa tabela são apresentados também os erros percentuais dessa reação em relação à solução exata, para modelos estruturais com 1, 2, 4, 6, 7, 9, 10 e 12 elementos finitos.

Note que, para essa situação de carga, foram necessários doze elementos WAN para se aproximar da solução exata. No entanto, para a formulação TIM, foram necessários apenas quatro elementos para se obter valores próximos à solução exata para a reação M_1 . Os resultados desta análise também são apresentados na Figura 7.8.

Tabela 7.5 – Caso 4: carga uniformemente distribuída.

N. elementos	TIM	ERRO %	WAN	ERRO %
1	-422,800	-18,827	-102,053	-80,407
2	-495,936	-4,786	-398,410	-23,510
4	-517,592	-0,628	-489,172	-6,085
6	-521,738	0,168	-506,629	-2,733
7	-522,619	0,337	-510,355	-2,018
9	-523,582	0,522	-514,439	-1,234
10	-523,861	0,575	-515,628	-1,005
12	-524,224	0,6449	-517,177	-0,7081
Solução exata	-520,865			

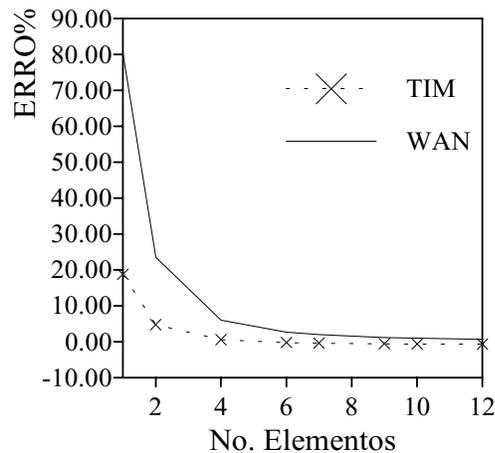


Figura 7.8 – Caso 4: reação de apoio M_1 .

Com o intuito de verificar a influência da relação f/L sobre as reações de apoio, o primeiro caso de carga é analisado para diferentes valores de f , mantendo-se constante o valor de L . A Tabela 7.6 apresenta os valores da reação de apoio P_1 obtidos pela formulação WAN – utilizando apenas um elemento – juntamente com a solução exata. Observe que enquanto o valor de f cresce, o valor de P_1 decresce.

Tabela 7.6 – Influência f / L : reação de apoio P_1 .

f / L	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30
f	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50
Solução exata	3515,555	2169,396	1511,414	1151,383	927,655	775,943
WAN	3503,171	2155,486	1495,006	1132,861	907,558	754,739
ERRO %	-0,352	-0,641	-1,086	-1,609	-2,166	-2,733

A Tabela 7.7 apresenta os valores do momento fletor localizado no vértice M_v , obtido pela formulação WAN – novamente utilizando apenas um elemento – juntamente com a solução exata. Observe que enquanto o valor de f cresce, o valor de M_v decresce (em módulo).

Note também que quanto maior o valor de f , maior é o erro de convergência do elemento WAN para os dois esforços analisados (P_1 e M_v). Os resultados dessas análises são também apresentados nas Figuras 7.9 e 7.10.

Tabela 7.7 – Relação f / L : momento fletor M_v .

f / L	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30
f	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50
Solução exata	-332,037	-263,434	-247,146	-241,206	-238,477	-237,029
WAN	-333,589	-266,401	-252,038	-248,478	-248,474	-249,991
ERRO %	0,467	1,126	1,979	3,015	4,192	5,469

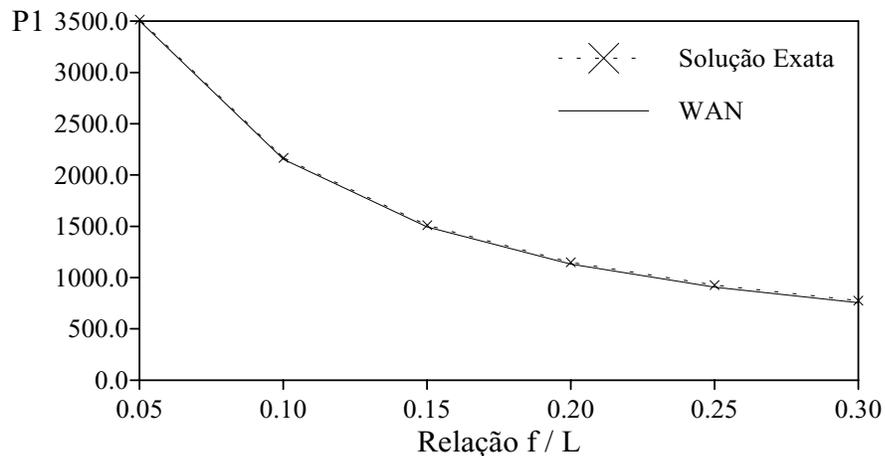


Figura 7.9 – Relação f/L : reação de apoio P1.

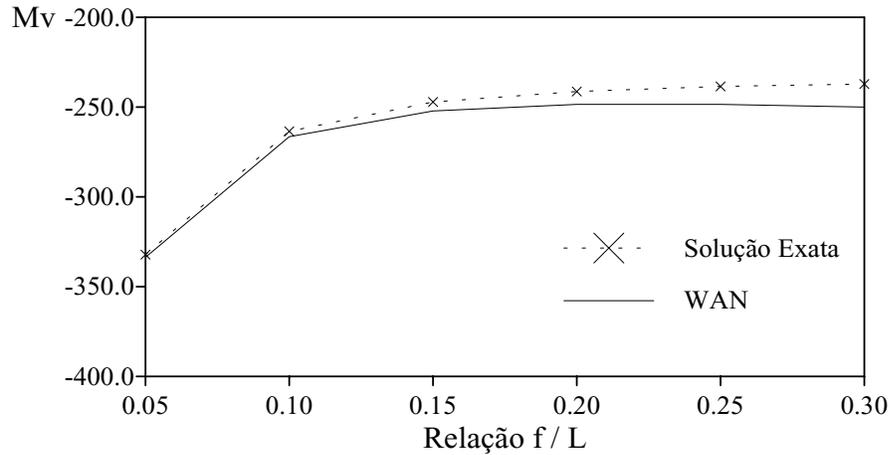


Figura 7.10 - Relação f/L : momento fletor M_v .

7.2.2 - Diagrama de momento fletor

Nesta subseção são mostrados os diagramas de momento fletor para os quatro casos de carga apresentados na Figura 7.3. Para esse objetivo, o arco da Figura 7.2 foi dividido em dez elementos finitos do tipo WAN, para os casos de carga 1, 2 e 3. Já para o Caso 4, o referido arco foi dividido em vinte e quatro elementos do tipo WAN. As tabelas desta subseção apresentam os valores dos momentos fletores M obtidos pela análise em cada ponto nodal. Os valores exatos dos momentos fletores M_e também são apresentados nessas tabelas, juntamente com os erros percentuais.

A Tabela 7.8 fornece os valores dos momentos fletores para o primeiro caso de carga: carga vertical concentrada. Observe que o momento fletor máximo positivo ocorre no ponto de aplicação da carga (vértice, nó 11) e o momento fletor máximo negativo ocorre no nó 4. A Figura 7.11 ilustra o diagrama de momento fletor.

Tabela 7.8 – Momentos fletores, Caso 1: carga vertical concentrada.

Nó	x	Me	M (WAN)	ERRO%
1	0,00	-39,0742	-40,6185	3,9522
2	0,25	-81,0630	-82,0191	1,1794
3	0,50	-105,4741	-105,9039	0,4075
4	0,75	-112,3074	-112,2728	-0,0308
5	1,00	-101,5630	-101,1258	-0,4303
6	1,25	-73,2407	-72,4631	-1,0617
7	1,50	-27,3407	-26,2844	-3,8632
8	1,75	36,1371	37,4101	3,5227
9	2,00	117,1927	118,6204	1,2183
10	2,25	215,8260	217,3466	0,7046
11	2,50	332,0371	333,5887	0,4673

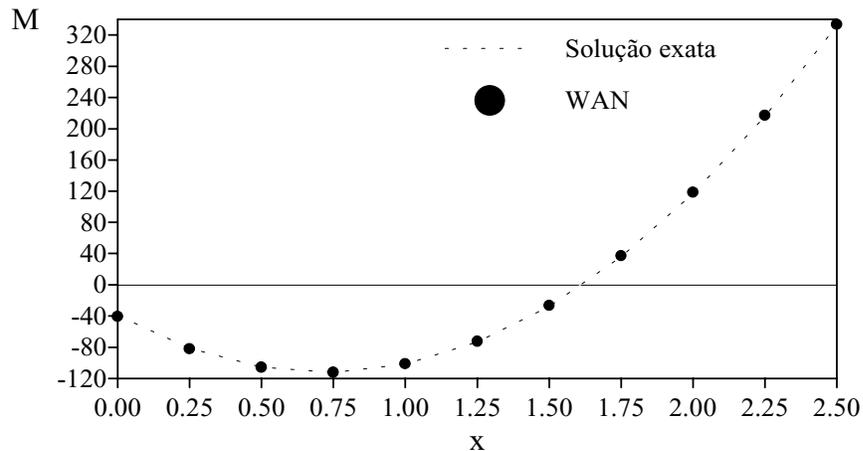


Figura 7.11 – DMF, Caso 1: carga vertical concentrada.

A Tabela 7.9 apresenta os valores dos momentos fletores para o segundo caso de carga: carga horizontal concentrada. Observe que o momento fletor máximo negativo ocorre no primeiro engaste. No segundo engaste, ocorre o momento fletor máximo positivo, e tem o mesmo valor, em módulo, do momento fletor do primeiro engaste. No vértice (nó 6), o momento fletor é nulo. A Figura 7.12 fornece o diagrama de momento fletor.

Tabela 7.9 – Momentos fletores, Caso 2: carga horizontal concentrada.

Nó	x	Me	M (WAN)	ERRO%
1	0,00	-31,250	-31,239	-0,035
2	0,50	-5,000	-4,991	-0,178
3	1,00	11,250	11,257	0,059
4	1,50	17,500	17,504	0,025
5	2,00	13,750	13,752	0,016
6	2,50	0,000	0,000	0,000
7	3,00	-13,750	-13,752	0,016
8	3,50	-17,500	-17,504	0,025
9	4,00	-11,250	-11,256	0,059
10	4,50	5,000	4,991	-0,177
11	5,00	31,250	31,239	-0,035

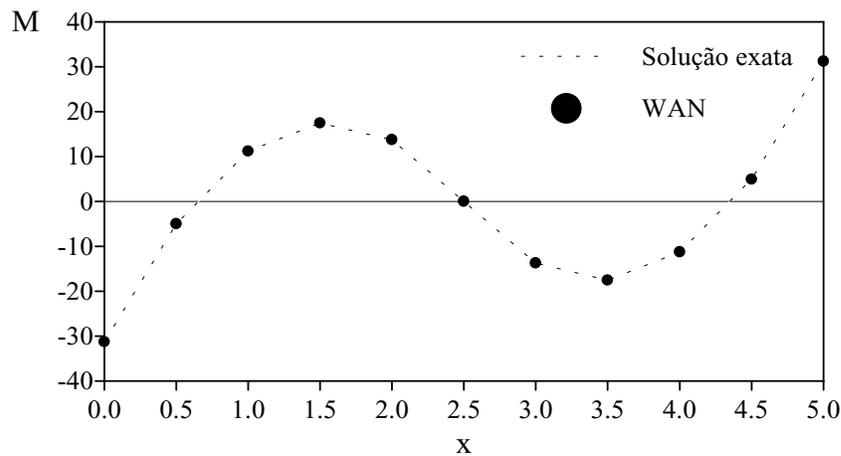


Figura 7.12 – DMF, Caso 2: carga horizontal concentrada.

A Tabela 7.10 fornece os valores dos momentos fletores para o terceiro caso de carga: três cargas concentradas verticais. Observe que o valor máximo negativo ocorre nos dois apoios, enquanto que o valor máximo positivo ocorre no vértice do arco. Note também que os valores do momento fletor máximo negativo e positivo são bem próximos, em módulo (0.893% de diferença). A Figura 7.13 ilustra o diagrama de momento fletor.

Tabela 7.10 – DMF, Caso 3: três cargas concentradas verticais.

Nó	x	Me	M (WAN)	ERRO%
1	0,000	-317,408	-318,406	0,314
2	0,250	-297,248	-295,983	-0,426
3	0,500	-239,737	-237,229	-1,047
4	0,750	-144,875	-142,138	-1,889
5	1,000	-12,660	-10,716	-15,358
6	1,250	156,905	157,039	0,085
7	1,500	113,823	114,107	0,249
8	1,750	108,092	108,493	0,371
9	2,000	139,713	140,198	0,347
10	2,250	208,686	209,221	0,256
11	2,500	315,009	315,562	0,175

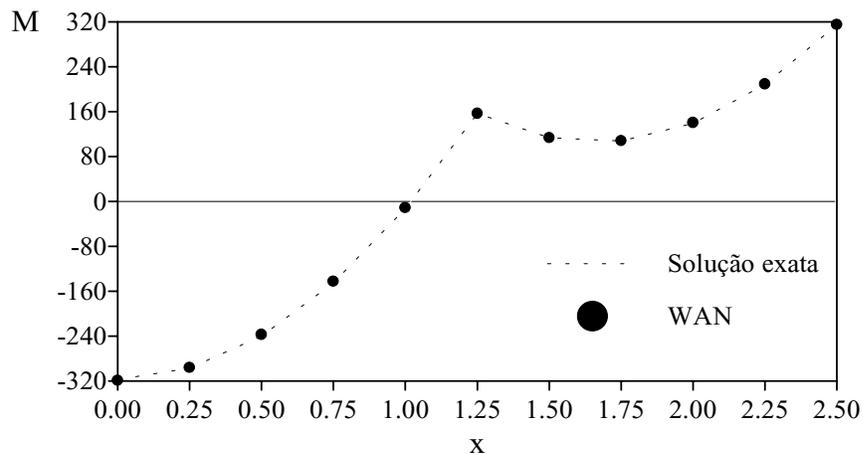


Figura 7.13 – DMF, Caso 3: três cargas concentradas verticais.

Finalmente, a Figura 7.14 apresenta o diagrama de momento fletor para o último caso de carga: carga uniformemente distribuída. Observe no diagrama de momento fletor que o valor máximo negativo ocorre nos dois apoios, enquanto que o valor máximo positivo ocorre no vértice do arco (nó 25), como no caso anterior. No entanto, o momento fletor máximo negativo é aproximadamente 48% maior que o momento fletor máximo positivo.

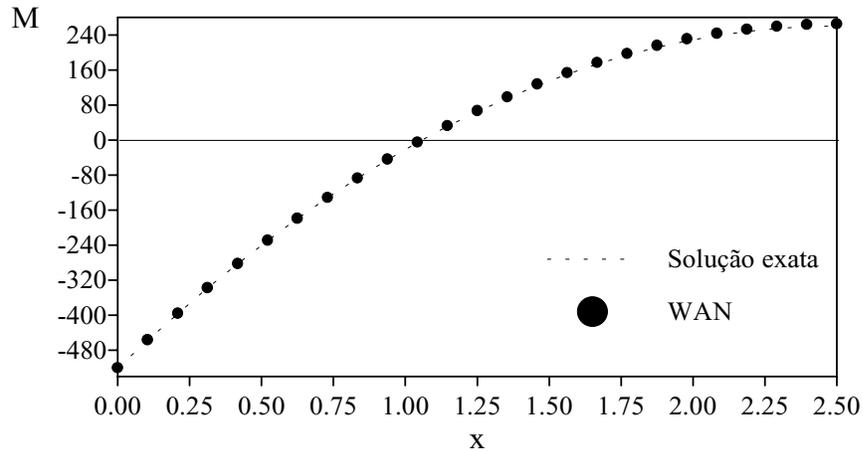


Figura 7.14 – DMF, Caso 4: carga uniformemente distribuída.

7.2.3 - Linha de influência

Nesta subseção, o arco mostrado na Figura 7.15, que tem geometria idêntica ao fornecido na Figura 7.2, é subdividido em dez elementos finitos do tipo WAN. Os nós 1 e 11 definem os dois engastes e o vértice está localizado no nó 6. A estrutura é então analisada posicionando-se a carga concentrada unitária nos nove nós intermediários do arco modelado. Para cada posição da carga foram obtidas as reações de apoio P_2 , Q_2 e M_2 (veja Figura 7.4).

Os valores exatos do esforço axial P_2 , esforço cortante Q_2 e do momento fletor M_2 , devido a uma carga concentrada vertical localizada num ponto genérico do arco, a uma distância m do primeiro apoio, foram obtidos por Leontovich (1959) e são definidas da seguinte forma:

$$P_2 = \frac{15Pm^2n^2}{4L^3f(1+\psi)}$$

$$Q_2 = P\left(1 + \frac{2n}{L}\right)\left(\frac{m}{L}\right)^2$$

$$M_2 = Pn\left[\frac{5n}{2L(1+\psi)} - 1\right]\left(\frac{m}{L}\right)^2$$

onde $\psi = 0.3334$ para o caso de $f/L = 0.05$.

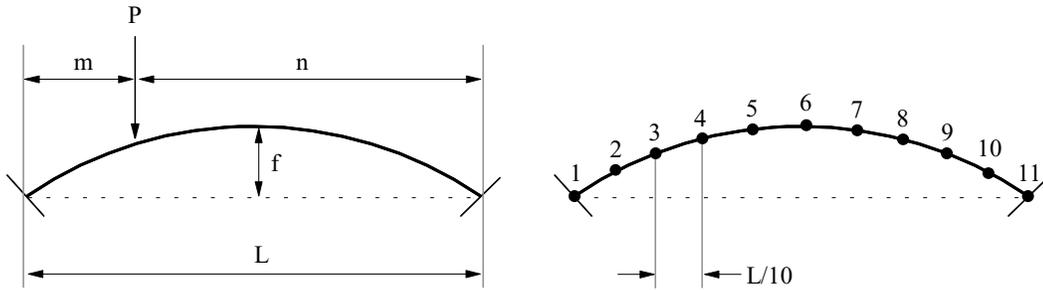


Figura 7.15 – Solução analítica e modelagem.

A Tabela 7.11 apresenta os valores exatos do esforço axial P_2 , juntamente com os obtidos pela formulação WAN, para o caso da carga vertical concentrada localizada em cada ponto nodal. Como esperado, o maior valor do esforço axial acontece quando a carga está posicionada no vértice (nó 6) do arco. Os resultados dessa análise também são apresentados na Figura 7.16.

Tabela 7.11 – Valores da reação de apoio P_2 .

Nó	Solução exata	WAN	ERRO%
2	455,616	451,814	-0,834
3	1439,971	1437,705	-0,157
4	2480,575	2488,896	0,335
5	3239,935	3250,920	0,339
6	3515,555	3503,171	-0,352
7	3239,935	3250,920	0,339
8	2480,575	2488,896	0,335
9	1439,971	1437,705	-0,157
10	455,616	451,814	-0,834

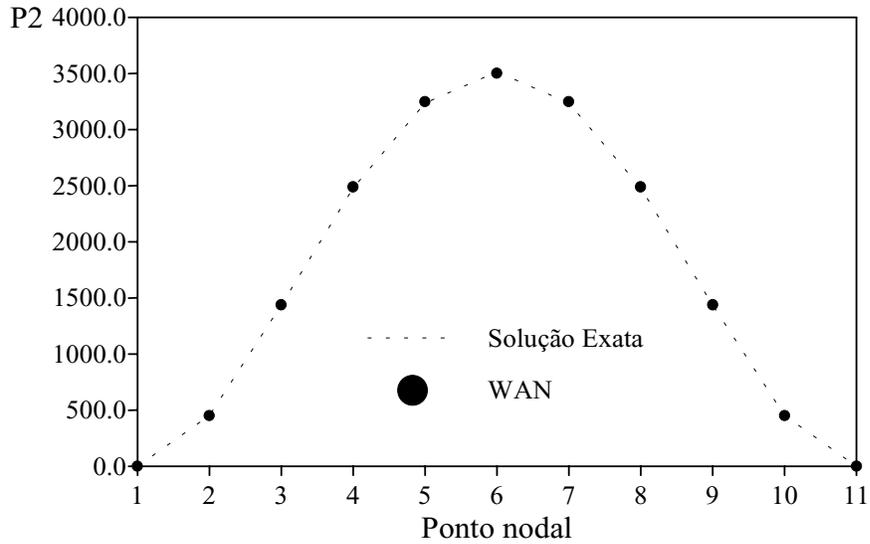


Figura 7.16 – Linha de influência: reação de apoio P2.

A Tabela 7.12 apresenta os valores exatos do esforço cortante Q_2 , juntamente com os obtidos pela formulação WAN, para cada posição da carga unitária. O maior valor do esforço cortante acontece quando a carga está posicionada no nó 10, que é o nó mais próximo do segundo apoio. Os resultados desta análise são também apresentados na Figura 7.17.

Tabela 7.12 – Valores da reação de apoio Q_2 .

Nó	Solução exata	Q (WAN)	ERRO%
2	28,000	27,555	-1,588
3	104,000	103,544	-0,438
4	216,000	216,490	0,227
5	352,000	353,343	0,382
6	500,000	500,000	0,000
7	648,000	641,865	-0,947
8	784,000	764,453	-2,493
9	896,000	853,970	-4,691
10	972,000	897,875	-7,626

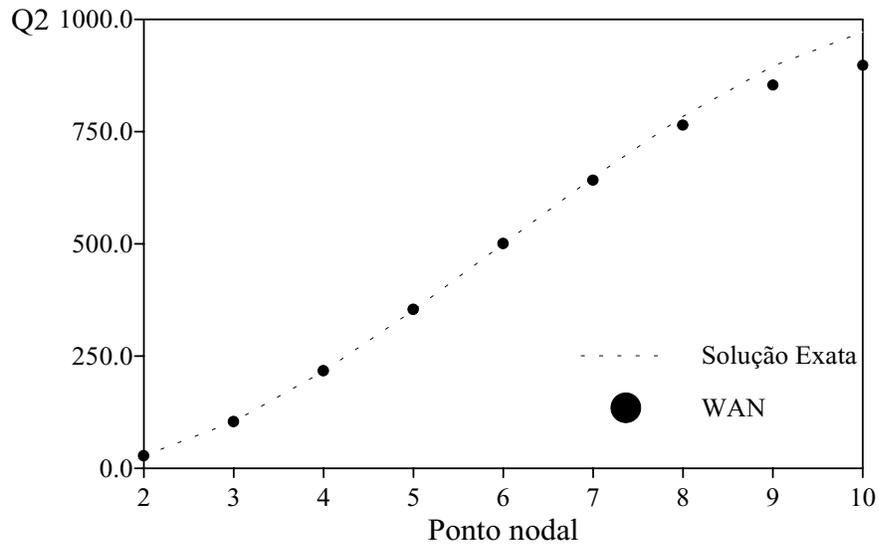


Figura 7.17 - Linha de influência: reação de apoio Q2.

Por fim, a Tabela 7.13 apresenta os valores exatos do momento fletor M_2 , juntamente com os obtidos pela formulação WAN, para cada posição da carga unitária. Note que o maior momento fletor positivo ocorre quando a carga está posicionada no nó 4. Já o maior momento fletor negativo ocorre para a carga posicionada no nó 9.

Tabela 7.13 – Valores da reação de apoio M_2 .

Nó	Solução exata	WAN	ERRO%
2	30,936	30,947	0,035
3	79,995	80,158	0,203
4	98,429	98,942	0,521
5	59,989	60,001	0,020
6	-39,074	-40,618	3,952
7	-180,011	-182,853	1,579
8	-321,571	-323,301	0,538
9	-400,005	-397,219	-0,696
10	-329,064	-321,718	-2,232

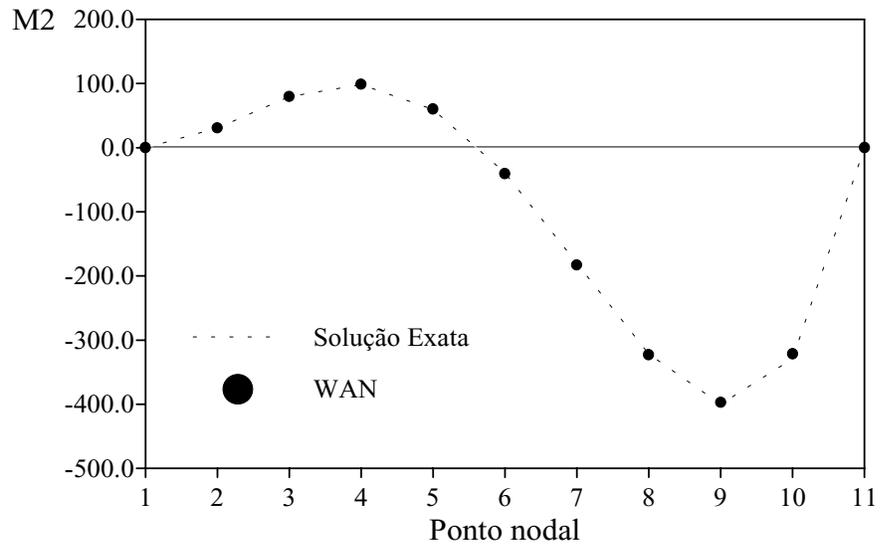


Figura 7.18 – Linha de influência: reação de apoio M2.

7.3 – SEMI-ARCO PARABÓLICO

Nesta seção, um semi-arco parabólico é submetido a uma carga momento na extremidade livre conforme ilustrado na Figura 7.19. As propriedades físicas e geométricas necessárias à análise, bem como o carregamento externo, podem ser vistas nessa mesma figura.

O semi-arco tem seção transversal variável. Os valores da área e momento de inércia de uma seção transversal em um ponto genérico x do semi-arco valem:

$$A_x = \frac{A_v}{\cos^3 \theta} \text{ e } I_x = \frac{I_v}{\cos^3 \theta},$$

onde A_v e I_v são os valores da área e inércia no vértice do semi-arco, respectivamente, e θ o ângulo entre o eixo horizontal e uma reta tangente ao semi-arco neste ponto.

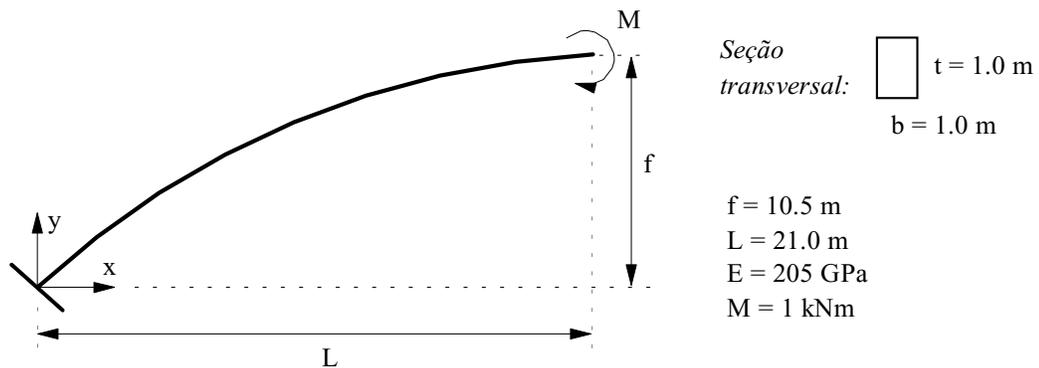


Figura 7.19 – Semi-arco parabólico.

A Tabela 7.14 apresenta um exemplo de modelagem para o semi-arco usando-se seis elementos finitos do tipo WAN. Os valores da área e do momento de inércia de cada seção transversal que devem ser usados em cada elemento são apresentados na segunda e terceira colunas dessa tabela, respectivamente.

Este exemplo tem o intuito de verificar, mais uma vez, o desempenho computacional do elemento parabólico WAN, só que agora em modelagens envolvendo inércia variável.

Tabela 7.14 – Exemplo de modelagem: 6 elementos finitos

Elemento	Área	Inércia
1	8,4640E-02	8,0847E-04
2	7,8001E-02	6,3275E-04
3	7,2262E-02	5,0311E-04
4	6,7650E-02	4,1279E-04
5	6,4399E-02	3,5610E-04
6	6,2714E-02	3,2887E-04

A solução analítica do presente problema foi apresentado por Belluzzi (1971) e será usado aqui para comparar e analisar a os resultados obtidos através das formulações WAN e TIM. Os valores exatos dos deslocamentos horizontal e vertical da extremidade livre são dados, respectivamente, por:

$$u_e = -0,10730092 \frac{ML^2}{EI_v} \text{ e } v_e = -0,34657359 \frac{ML^2}{EI_v}.$$

O semi-arco foi modelado considerando diferentes malhas: 2, 4, 6, 8, 10, 12 e 14 elementos. Os resultados obtidos pelas formulações WAN e TIM para os deslocamentos horizontal e vertical da extremidade livre são apresentados nas Tabelas 7.15 e 7.16, respectivamente. Esses resultados são mostrados também através da Figura 7.20.

Note que resultados com razoável precisão para o deslocamento horizontal só são obtidos com oito e dez divisões, respectivamente, para os elementos WAN e TIM. Para o deslocamento vertical, no entanto, são necessários seis divisões para a convergência de ambos os elementos.

Como cada elemento, em particular, possui seção transversal constante, é evidente que somente com um elevado número de elementos torna-se possível simular a área e a inércia variáveis.

Tabela 7.15 – Convergência: deslocamento horizontal u.

N. elementos	WAN	ERRO%	TIM	ERRO%
2	-3,119E-06	12,6021	-3,320E-06	19,8622
4	-2,856E-06	3,1001	-2,909E-06	5,0279
6	-2,808E-06	1,3744	-2,832E-06	2,2372
8	-2,791E-06	0,7715	-2,805E-06	1,2589
10	-2,784E-06	0,4935	-2,792E-06	0,8076
12	-2,779E-06	0,3419	-2,786E-06	0,5621
14	-2,777E-06	0,2516	-2,781E-06	0,4105
Solução exata	-2,770E-06			

Tabela 7.16 -- Convergência: deslocamento vertical v.

N. elementos	WAN	ERRO%	TIM	ERRO%
2	-9,7271E-06	8,7231	-9,5805E-06	7,0845
4	-9,1373E-06	2,1307	-9,1023E-06	1,7395
6	-9,0310E-06	0,9426	-9,0156E-06	0,7705
8	-8,9940E-06	0,5290	-8,9854E-06	0,4329
10	-8,9770E-06	0,3390	-8,9715E-06	0,2775
12	-8,9677E-06	0,2351	-8,9639E-06	0,1926
14	-8,9621E-06	0,1725	-8,9593E-06	0,1412
Solução exata	-8,9467E-06			

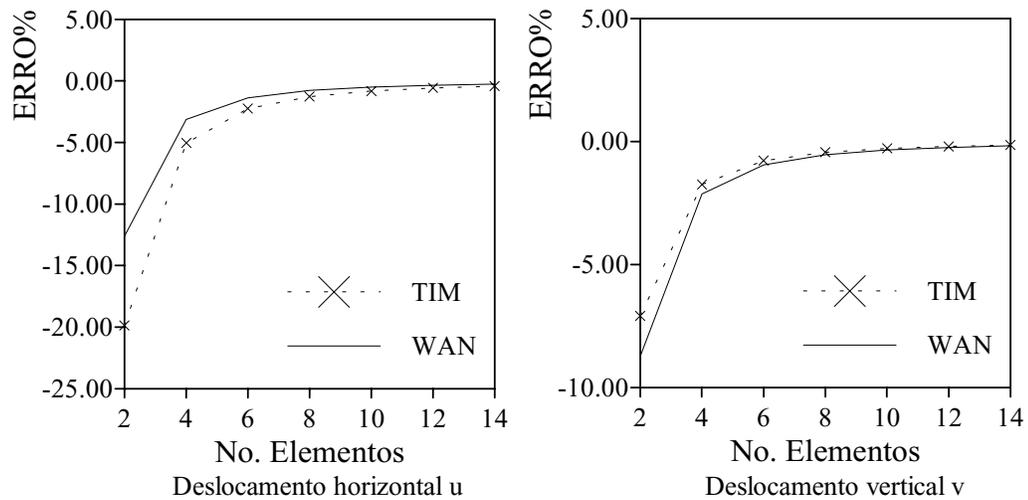


Figura 7.20 – Convergência: deslocamento horizontal e deslocamento vertical.

7.4 – ESTRUTURAS CIRCULARES ESBELTAS

Neste exemplo são analisados dois sistemas estruturais circulares esbeltos de seção transversal constante. Esses sistemas serão usados aqui com o objetivo de testar as formulações AKH, LIT, KIM e FRI (ver Tabela 7.1) na obtenção dos deslocamentos e esforços, além de comparar a convergência de resultados entre os elementos finitos circulares.

7.4.1 – Anel circular

O anel circular mostrado na Figura 7.21 é submetido a duas cargas concentradas na direção radial, cada uma de valor P . As propriedades físicas e geométricas necessárias à análise podem ser vistas nessa mesma figura. Note que o anel é esbelto, pois $r / t = 52.69$.

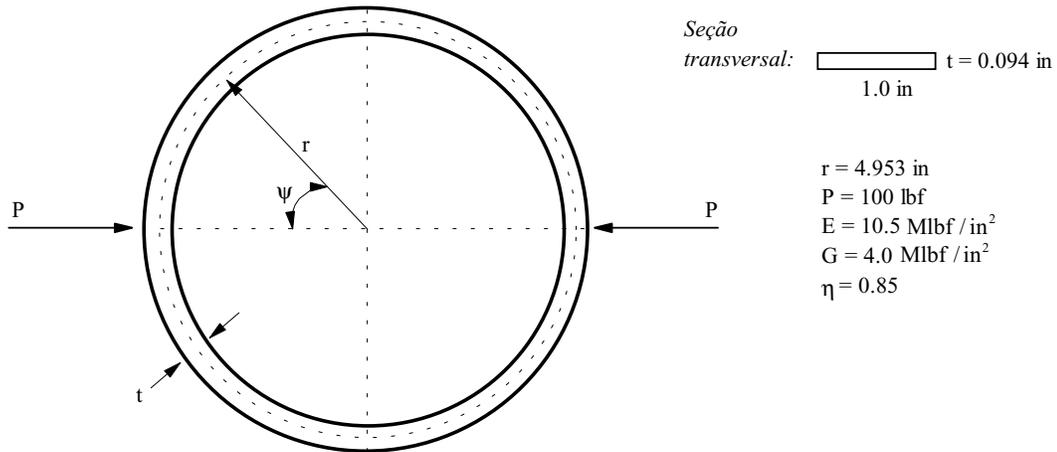


Figura 7.21 – Anel circular.

O deslocamento radial v_e localizado no ponto de aplicação de uma das cargas foi obtido por Raveendranath *et al.* (1999) com o objetivo de validar modelos numéricos. O valor analítico desse deslocamento é dado por:

$$v_e = - \left(\frac{Pr^3}{8\pi EI} (\pi^2 - 8) + \frac{\pi Pr}{8GA\eta} + \frac{\pi Pr}{8EA} \right)$$

Já as expressões do momento fletor, do esforço axial e do esforço cortante, num certo ângulo ψ com o eixo horizontal, são dadas por:

$$M(\psi) = -\frac{Pr}{2}(2/\pi - \sin\psi)$$

$$N(\psi) = -\frac{P}{2}\sin\psi$$

$$Q(\psi) = \frac{P}{2}\cos\psi$$

Como o anel apresenta dupla simetria (geometria e carregamento), apenas 1/4 do anel foi modelado, com restrição do deslocamento axial u e rotação ϕ nas duas extremidades, conforme ilustrado na Figura 7.22.

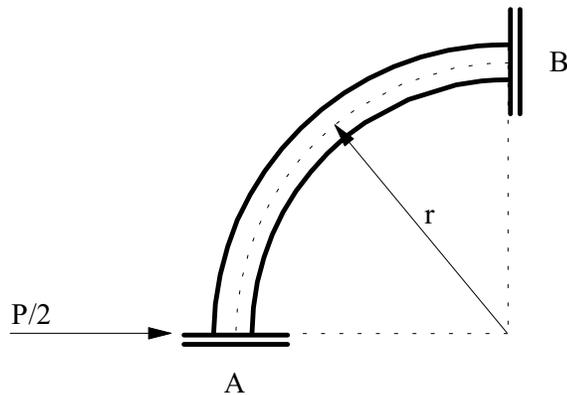


Figura 7.22 – Modelagem do anel.

A Tabela 7.17 apresenta os valores do deslocamento radial v obtidos pelas diversas formulações, além dos erros percentuais em relação à solução analítica v_e , para os modelos estruturais com 1, 2, 3, 4, 6, ..., 60, 70 elementos finitos. Os resultados desta análise são também apresentados na Figura 7.23.

Tabela 7.17 - Convergência: deslocamento radial v.

N. elementos	KIM	ERRO%	FRI	ERRO%
1	-5,9323E+01	-31,8870	-1,6370E-02	-99,9812
2	-8,9142E+01	2,3503	-5,3592E-04	-93,8466
3	-8,7965E-03	0,9992	-1,2886E-03	-85,2051
4	-8,7515E-03	0,4824	-2,1356E-03	-75,4799
6	-8,7239E-03	0,1656	-3,7521E-03	-56,9198
8	-8,7163E-03	0,0791	-5,0216E-03	-42,3431
10	-8,7135E-03	0,0467	-5,9351E-03	-31,8544
12	-8,7122E-03	0,0319	-6,5799E-03	-24,4514
16	-8,7112E-03	0,0198	-7,3715E-03	-15,3626
20	-8,7108E-03	0,0155	-7,8042E-03	-10,3944
24	-8,7106E-03	0,0135	-8,0606E-03	-7,4494
28	-8,7105E-03	0,0125	-8,2234E-03	-5,5805
32	-8,7105E-03	0,0119	-8,3326E-03	-4,3275
40	-8,7104E-03	0,0114	-8,4646E-03	-2,8117
50	-8,7104E-03	0,0111	-8,5512E-03	-1,8167
60	-8,7104E-03	0,0110	-8,5990E-03	-1,2678
70	-8,7104E-03	0,0109	-8,6281E-03	-0,9339
AKT (1 elem.)	-8,7101E-03	0,0079		
LIT (1 elem.)	-8,7105E-03	0,0116		
Solução exata	-8,7095E-03			

Pode-se observar na Tabela 7.17 que as formulações AKT e LIT forneceram resultados próximos da solução exata utilizando apenas um elemento finito. Com a formulação KIM foram necessários três elementos para se aproximar da solução exata, enquanto que para a formulação FRI foram necessários setenta elementos finitos.

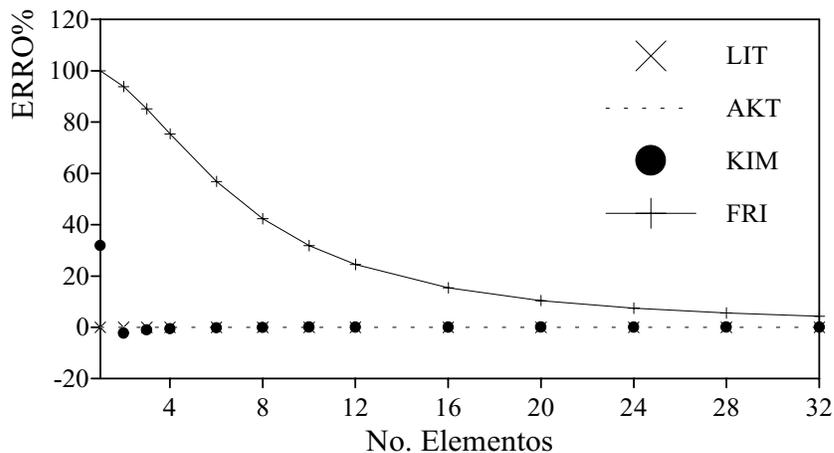


Figura 7.23 – Convergência: deslocamento radial v.

A Tabela 7.18 apresenta os valores do momento fletor M_A localizado no apoio A (veja Figura 7.22) e os erros obtidos através das diversas formulações, para modelos estruturais com 1, 2 e 3 elementos finitos.

Tabela 7.18 - Convergência: momento fletor M_A .

N. elemento	KIM	ERRO%	FRI	ERRO%
1	191,50547	20,3265	168,4977	5,8703
2	160,7667	1,0128	160,0981	0,5927
3	158,5034	-0,40928	158,7219	-0,2719
LIT (1 elem.)	157,6589	-0,9399		
AKT (1 elem.)	157,6589	-0,9399		
Sol. Exata	159,1547			

Pode-se observar da Tabela 7.18 que as formulações AKT e LIT novamente forneceram os melhores resultados, ou seja, utilizando-se apenas um elemento para modelagem. Além disso, AKT e LIT forneceram valores exatamente iguais. Para a formulação KIM, no entanto, foram necessários três elementos para se obter valor próximo à solução exata. Nessa análise, foram necessários apenas dois elementos para a formulação FRI fornecer momento fletor M_A próximo da solução exata, ao contrário da análise anterior (deslocamento v), onde foram necessários setenta elementos finitos para se obter convergência nos resultados. Os resultados dessa análise podem ser vistos também na Figura 7.24.

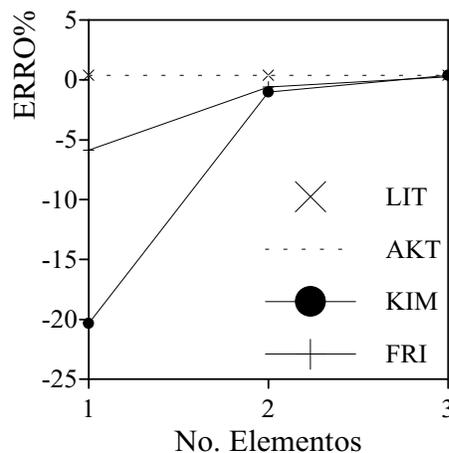


Figura 7.24 – Convergência: momento fletor M_A .

Com o objetivo de ilustrar os diagramas de esforços para essa análise, dividiu-se o arco mostrado na Figura 7.22 em dez elementos finitos do tipo KIM. A Tabela 7.19 apresenta os valores dos momentos fletores M obtidos para cada ponto nodal. Os valores exatos M_e são também apresentados nessa tabela.

Tabela 7.19 – Valores dos momentos fletores, anel circular.

Nó	Ângulo ψ	M_e	M	ERRO%
1	0	159,1548	157,6750	-0,9297
2	9	120,0461	118,9344	-0,9261
3	18	81,9004	81,1481	-0,9186
4	27	45,6570	45,2466	-0,8990
5	36	12,2083	12,1138	-0,7741
6	45	-17,6221	-17,4345	-1,0647
7	54	-43,0996	-42,6707	-0,9951
8	63	-63,5970	-62,9738	-0,9799
9	72	-78,6095	-77,8438	-0,9741
10	81	-87,7674	-86,9147	-0,9716
11	90	-90,8452	-89,9633	-0,9708

A Figura 7.25 ilustra o diagrama de momento fletor da estrutura da Figura 7.22. Observe que o momento fletor máximo positivo ocorre no ponto de aplicação da carga (ponto A) e o momento fletor máximo negativo, como esperado, ocorre no ponto B.

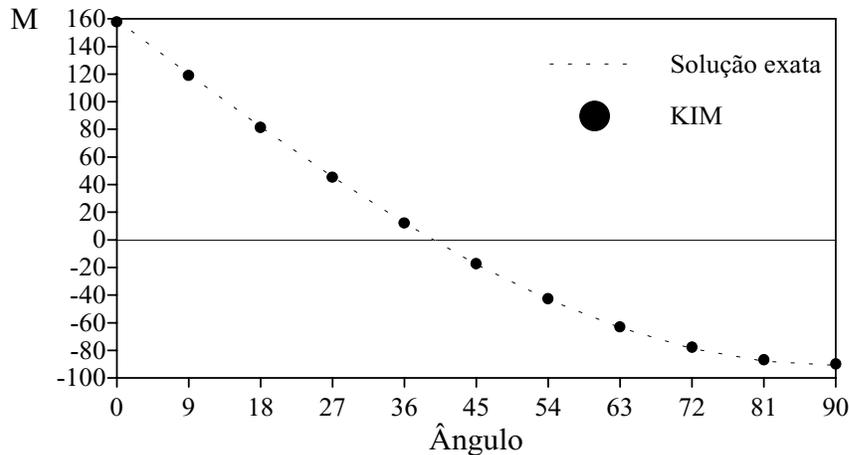


Figura 7.25 – DMF, anel circular.

A Tabela 7.20 apresenta os valores dos esforços axiais P e cortante Q obtidos pela análise em cada ponto nodal. Os valores exatos dos esforços axiais P_e e cortante Q_e

também são apresentados nesta tabela. A Figura 7.26 ilustra os diagramas de esforço axial e cortante. Note que o valor do esforço axial no ponto de aplicação da carga é nulo (ponto A, ângulo 0°), enquanto que o esforço cortante tem valor máximo. No meio da estrutura (ângulo 45°), os esforços axial e cortante tem valores iguais. Já no ponto B (ângulo 90°), o esforço axial tem valor máximo e o esforço cortante tem valor nulo.

Tabela 7.20 – Valores dos esforços axiais P e cortante Q, anel circular.

Nó	Ângulo	P_e	P	Q_e	Q
1	0	0,0000	0,0000	50,0000	50,0000
2	9	7,8216	7,8217	49,3844	49,3844
3	18	15,4508	15,4508	47,5528	47,5528
4	27	22,6995	22,6995	44,5504	44,5503
5	36	29,3892	29,3893	40,4509	40,4509
6	45	35,3553	35,3553	35,3554	35,3553
7	54	40,4508	40,4509	29,3893	29,3893
8	63	44,5503	44,5503	22,6995	22,6995
9	72	47,5528	47,5528	15,4509	15,4509
10	81	49,3844	49,3844	7,8217	7,8217
11	90	50,0000	50,0000	0,0000	0,0000

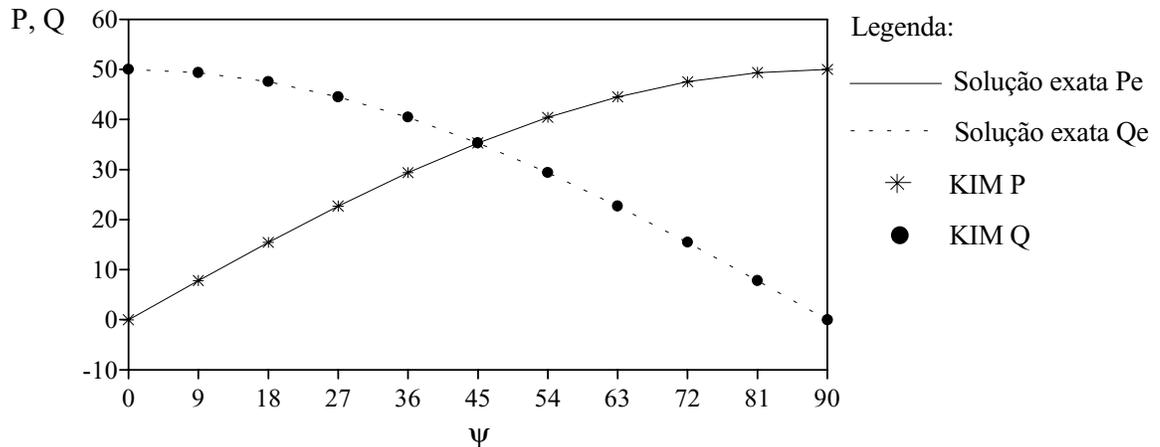


Figura 7.26 – DEN e DEC, anel circular.

7.4.2 – Arco bi-apoiado

Um arco circular bi-apoiado é submetido a uma carga momento no vértice, conforme ilustra a Figura 7.27. As propriedades físicas e geométricas necessárias à análise podem ser vistas nessa mesma figura. O arco tem seção transversal constante de formato retangular. Note que o arco é esbelto, pois $r / t = 100$.

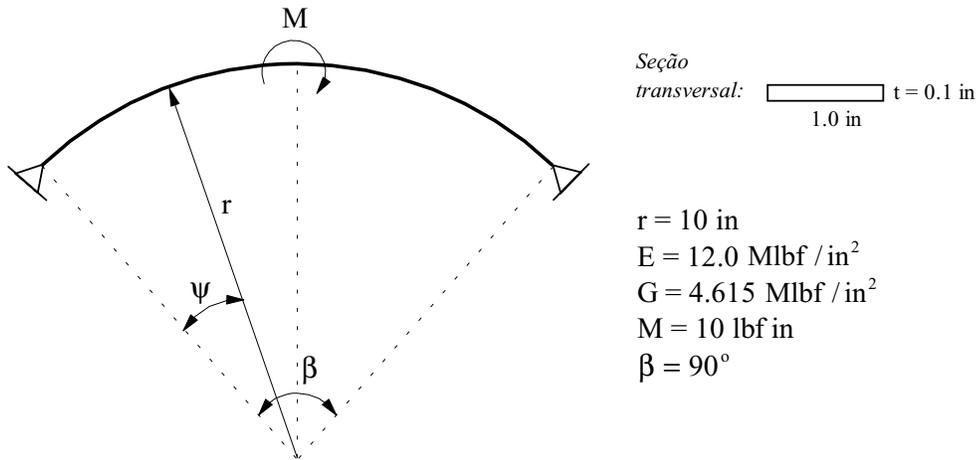


Figura 7.27 – Arco bi-apoiado.

O deslocamento radial, tangencial e a rotação no vértice do arco, designados por v_e , u_e e ϕ_e , respectivamente, foram obtidos por Raveendranath *et al.* (1999). As expressões que definem os valores exatos de u_e , v_e , e ϕ_e são então dados por:

$$u_e = 0.1211846 \frac{M_c r}{EI}$$

$$v_e = 0$$

$$\phi_e = -0.0100489 \frac{M_c r^2}{EI}$$

e as equações que definem o momento fletor, o esforço axial e o esforço cortante, para um certo ângulo genérico ψ são dadas por:

$$M = \begin{cases} (1 - \cos \psi + \sin \psi) \frac{M_c}{2}, 0 \leq \psi \leq \pi/4 \\ -(1 + \cos \psi - \sin \psi) \frac{M_c}{2}, \pi/4 \leq \psi \leq \pi/2 \end{cases}$$

$$N = -\frac{M_c}{r\sqrt{2}} \sin\left(\psi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$Q = \frac{M_c}{r\sqrt{2}} \cos\left(\psi - \frac{\pi}{4}\right)$$

As Tabelas 7.21 e 7.22 apresentam os valores dos deslocamentos u e ϕ , respectivamente, obtidos pelas diversas formulações, além dos erros percentuais em relação à solução exata u_e e ϕ_e , para modelos estruturais com 2, 4, 6, 8, 10, ..., 64, 68 elementos.

Pode-se observar da Tabela 7.21 que foram necessários apenas dois elementos finitos para as formulações AKT e LIT chegarem próximas à solução exata. A formulação KIM fornece bom resultado com apenas quatro elementos, enquanto que para a formulação FRI foram necessários sessenta e oito elementos finitos. Os resultados dessa análise são também apresentados na Figura 7.28.

Tabela 7.21 – Convergência: deslocamento u

N. elementos	KIM	ERRO%	FRI	ERRO%
2	1,1630E-05	-4,0295	6,7530E-07	-94,4275
4	1,2094E-05	-0,2031	2,9205E-06	-75,9005
6	1,2115E-05	-0,0273	5,1828E-06	-57,2324
8	1,2119E-05	0,0024	6,9594E-06	-42,5721
10	1,2120E-05	0,0098	8,2378E-06	-32,0230
12	1,2120E-05	0,0131	9,1402E-06	-24,5765
14	1,2120E-05	0,0139	9,7825E-06	-19,2764
16	1,2120E-05	0,0148	1,0248E-05	-15,4335
18	1,2120E-05	0,0156	1,0593E-05	-12,5883
20	1,2120E-05	0,0156	1,0854E-05	-10,4354
24	1,2120E-05	0,0156	1,1213E-05	-7,4729
28	1,2120E-05	0,0156	1,1441E-05	-5,5924
32	1,2120E-05	0,0156	1,1594E-05	-4,3315
AKT (1 elem.)	1,2120E-05	0,0106		
LIT (1 elem.)	1,2120E-05	0,0140		
Solução exata	1,2119E-05			

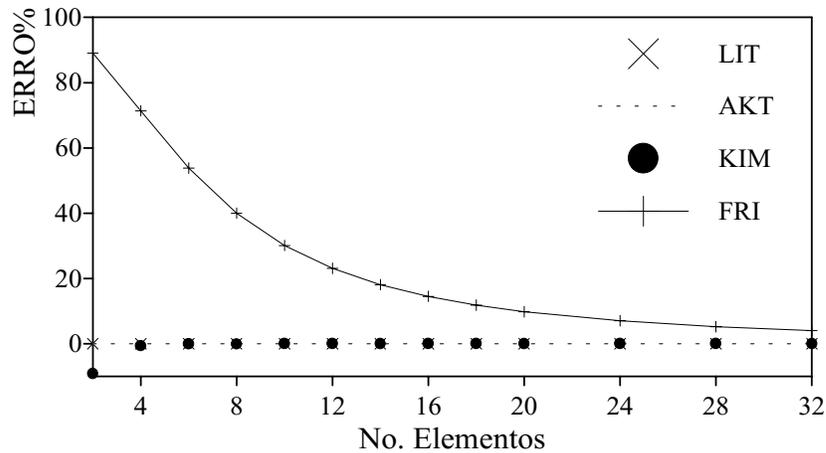


Figura 7.28 - Convergência: deslocamento u.

Pode-se observar na Tabela 7.22 que as formulações AKT, LIT, KIM e FRI mostraram o mesmo desempenho da análise anterior, ou seja: AKT e LIT se aproximaram da solução exata com apenas dois elementos; quatro elementos foram necessários a formulação KIM e para a formulação FRI foram necessários sessenta e oito elementos para se chegar próximo da solução exata. Os resultados desta análise são também apresentados na Figura 7.29.

Tabela 7.22 – Convergência: rotação ϕ .

N. elementos	KIM	ERRO%	FRI	ERRO%
2	-1,0969E-05	9,1519	-1,1023E-06	-89,0311
4	-1,0104E-05	0,5463	-2,8755E-06	-71,3861
6	-1,0057E-05	0,0746	-4,6415E-06	-53,8127
8	-1,0049E-05	-0,0040	-6,0263E-06	-40,0326
10	-1,0047E-05	-0,0249	-7,0225E-06	-30,1195
12	-1,0046E-05	-0,0318	-7,7256E-06	-23,1230
14	-1,0046E-05	-0,0358	-8,2259E-06	-18,1445
16	-1,0046E-05	-0,0368	-8,5887E-06	-14,5343
18	-1,0046E-05	-0,0378	-8,8573E-06	-11,8615
20	-1,0046E-05	-0,0378	-9,0605E-06	-9,8395
24	-1,0045E-05	-0,0388	-9,3402E-06	-7,0562
28	-1,0045E-05	-0,0388	-9,5177E-06	-5,2899
32	-1,0045E-05	-0,0388	-9,6367E-06	-4,1058
36	-1,0045E-05	-0,0388	-9,7201E-06	-3,2759
42	-9,9310E-06	-1,1772	-9,6933E-06	-3,5425
46	-1,0045E-05	-0,0388	-9,8445E-06	-2,0380
52	-1,0045E-05	-0,0388	-9,8752E-06	-1,7325
56	-1,0045E-05	-0,0388	-9,9097E-06	-1,3892
60	-1,0045E-05	-0,0388	-9,9273E-06	-1,2140
64	-1,0045E-05	-0,0388	-9,9417E-06	-1,0707
68	-1,0045E-05	-0,0388	-9,9537E-06	-0,9513
AKT (2 elems.)	-1,0047E-05	-0,0239		
LIT (2 elems.)	-1,0048E-05	-0,0159		
Solução exata	-1,0049E-05			

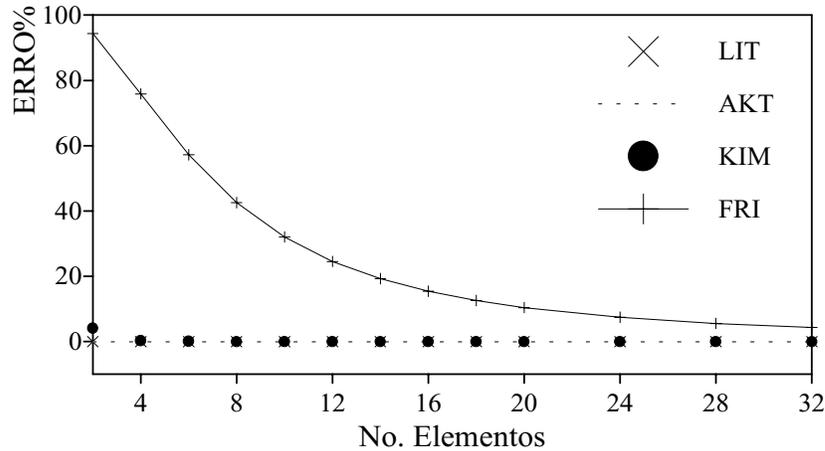


Figura 7.29 - Convergência: rotação ϕ .

Os valores do esforço cortante Q e do momento fletor M , localizados no vértice do arco para os modelos estruturais com 2 e 4 elementos finitos são apresentados nas Tabela 7.23. O erro percentual desses valores em relação à solução exata são também apresentados nessa tabela.

Tabela 7.23 – Convergência: esforço Q e momento fletor M .

Formulação	Q	ERRO%	M	ERRO%
AKT (2 elems.)	0,7071	-0,0033	5,0000	0,0000
LIT (2 elems.)	0,7071	-0,0072	5,0000	0,0000
KIM (2 elems.)	0,7097	0,3652	5,2851	5,7021
KIM (4 elems.)	0,7072	0,0180	5,0323	0,6461
FRI (2 elems.)	0,7071	-0,0033	5,0000	0,0000
Solução exata	0,7071		5,0000	

Pode-se observar novamente a eficiência das formulações AKT e LIT. Para a formulação KIM, mais uma vez, foram necessários quatro elementos para se obter valor próximo à solução exata. Note, entretanto, que nessa análise a formulação FRI forneceu, com apenas dois elementos finitos, os valores do esforço cortante Q e do momento fletor M bem próximo da solução exata. Isso não foi observado nas análises anteriores (deslocamentos u e ϕ), onde foram necessários sessenta e oito elementos finitos para se obter convergência de resultados.

Com o objetivo de ilustrar os diagramas de esforços para essa análise, a estrutura da Figura 7.27 foi dividido em dez elementos finitos do tipo AKT. A Tabela 7.24 apresenta os valores dos momentos fletores M em cada ponto nodal. Os valores exatos dos momentos fletores M_e também são apresentados nessa tabela. A Figura 7.30 ilustra o diagrama de momento fletor. Note que no ponto de aplicação da carga momento, o diagrama apresenta uma descontinuidade do valor dessa carga.

Tabela 7.24 – Valores dos momentos fletores, arco bi-apoiado.

Nó	Ângulo ψ	M_e	M (AKT)	ERRO%
1	0	0,0000	0,0000	0,0000
2	9	0,8437	0,8437	0,0000
3	18	1,7898	1,7898	0,0000
4	27	2,8149	2,8149	0,0000
5	36	3,8938	3,8938	0,0000
6	45	5,0000	5,0000	0,0000
6	45	-5,0000	-5,0000	0,0000
7	54	-3,8938	-3,8938	0,0000
8	63	-2,8149	-2,8149	0,0000
9	72	-1,7898	-1,7898	0,0000
10	81	-0,8437	-0,8437	0,0000
11	90	0,0000	0,0000	0,0000

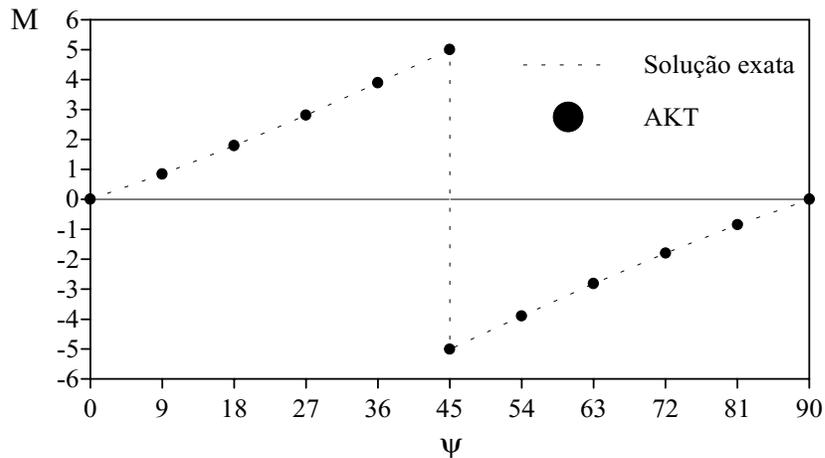


Figura 7.30 – DMF, arco bi-apoiado.

A Tabela 7.25 apresenta os valores dos esforços axiais P e cortante Q em cada ponto nodal. Os valores exatos dos esforços axial P_e e cortante Q_e também são apresentados nessa tabela.

Tabela 7.26 – Valores de P e Q, arco bi-apoiado.

Nó	Ângulo ψ	P_e	P (AKT)	Q_e	Q (AKT)
1	0	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
2	9	0,4156	0,4156	0,5721	0,5721
3	18	0,3210	0,3210	0,6300	0,6300
4	27	0,2185	0,2185	0,6725	0,6725
5	36	0,1106	0,1106	0,6984	0,6984
6	45	0,0000	0,0000	0,7071	0,7071
7	54	-0,1106	-0,1106	0,6984	0,6984
8	63	-0,2185	-0,2185	0,6725	0,6725
9	72	-0,3210	-0,3210	0,6300	0,6300
10	81	-0,4156	-0,4156	0,5721	0,5721
11	90	-0,5000	-0,5000	0,5000	0,5000

Os diagramas de esforço axial e de esforço cortante são mostrados nas Figuras 7.31 e 7.32, respectivamente. Observe no diagrama de esforço axial que o valores máximos, positivo e negativo, estão localizados nos apoios da estrutura. No vértice, o esforço axial é nulo. Já no diagrama de esforço cortante, o maior valor ocorre justamente no vértice do arco, enquanto que os menores valores do esforço cortante acontecem nos dois apoios da estrutura.

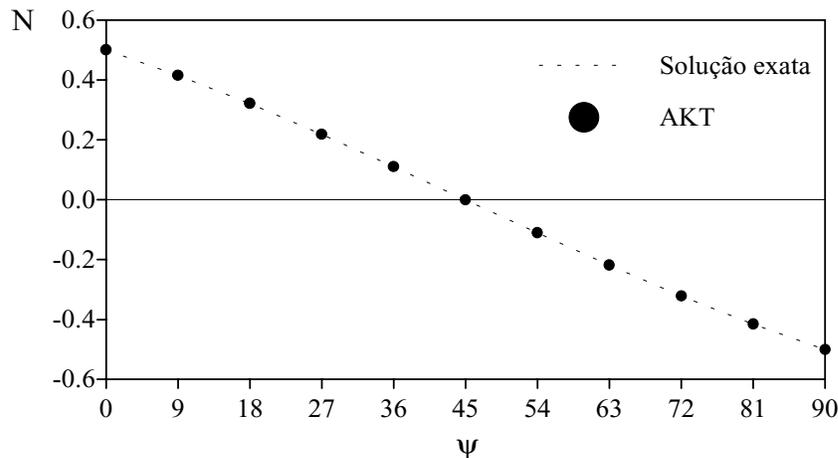


Figura 7.31 – DEN, arco bi-apoiado.

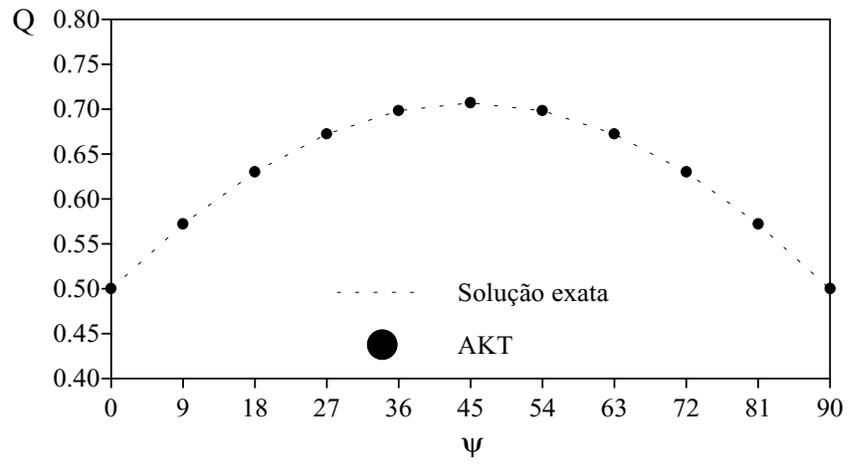


Figura 7.32 – DEC, arco bi-apoiado.

7.5 – SEMI-ARCO CIRCULAR ENGASTADO-LIVRE

O semi-arco circular engastado-livre mostrado na Figura 7.33, com as respectivas propriedades físicas e geométricas, é submetido a uma carga concentrada vertical na extremidade livre. Esse semi-arco tem seção transversal constante, de formato retangular. Note que esse sistema estrutural pode ser considerado espesso, pois $r/t = 20$.

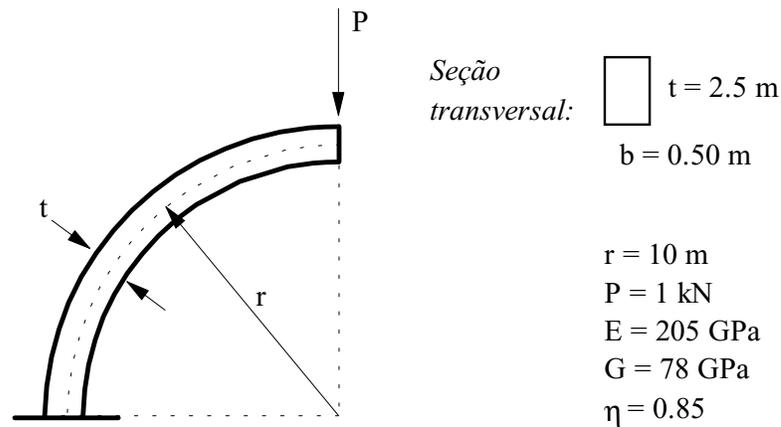


Figura 7.33 – Semi-arco circular engastado-livre.

O deslocamento radial e a rotação no vértice do arco, designados por v_e e ϕ_e , respectivamente, foram obtidos analiticamente por Raveendranath *et al.* (1999) com o objetivo de validar modelos numéricos. Esses resultados são mostrados a seguir:

$$v_e = - \left(\frac{\pi Pr^3}{4EI} + \frac{\pi Pr}{4GA\eta} + \frac{\pi Pr}{4EA} \right)$$

$$\phi_e = \frac{Pr^2}{EI}$$

A Tabela 7.27 apresenta os erros percentuais dos valores obtidos do deslocamento v na extremidade do arco empregando-se as formulações estudadas para modelos estruturais com 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 10 elementos. A Figura 7.34 apresenta também os resultados dessa análise.

Pode-se observar na Tabela 7.26 que as formulações AKT e LIT chegaram próximas à solução exata utilizando apenas um elemento na modelagem do semi-arco. Para as formulações KIM, FRI e TIM foram necessários, respectivamente, três, quatro e dez elementos para se chegar suficientemente próximo da solução exata (diferença menor do que 1%).

Tabela 7.26 – Convergência: deslocamento vertical.

N. elementos	ERRO%		
	KIM	FRI	TIM
1	-21,1875	-13,2130	-39,7374
2	-1,2297	-3,6360	-12,2778
3	-0,6539	-1,6374	-5,8793
4	-0,5524	-0,9202	-3,5295
5	-0,5225	-0,5857	-2,4212
6	-0,5225	-0,5857	-2,4212
10	-0,5125	-0,1514	-0,9368
AKT (1 elem.)	-0,4210		
LIT (1 elem.)	0,0167		
Solução exata	-6,0092E-6		

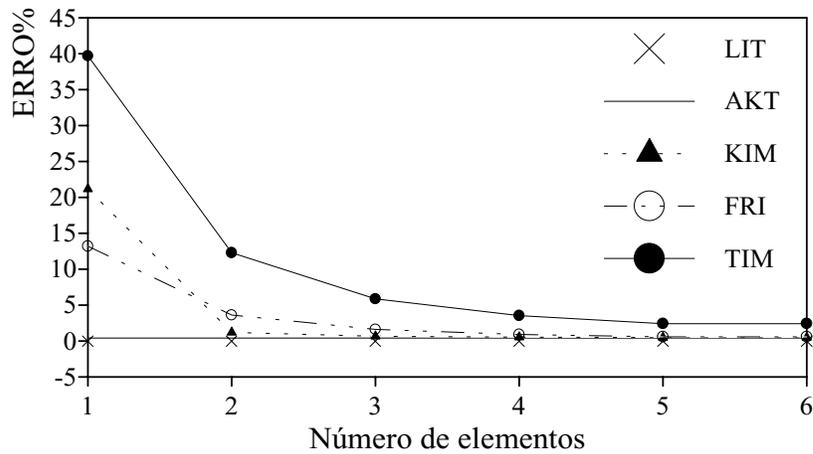


Figura 7.34 – Convergência: deslocamento vertical.

A Tabela 7.27 e Figura 7.35 apresentam os resultados relacionados com a rotação ϕ na extremidade livre do semi-arco. Na Tabela 7.27 os erros percentuais foram obtidos, como no caso do deslocamento v , para os modelos com 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 10 elementos finitos.

Nessa mesma tabela pode-se observar que as formulações AKT e LIT, novamente, chegaram bem próximo à solução exata com apenas um elemento. Com as formulações KIM e FRI foram possíveis obter valores próximos à solução exata com apenas dois elementos. Já para a formulação TIM, mais uma vez, foram necessários dez elementos para a convergência da rotação ϕ .

Tabela 7.27 – Convergência: rotação ϕ .

N. elementos	ERRO%		
	KIM	FRI	TIM
1	-10,9798	-1,9443	-29,2910
2	-0,9567	-0,6497	-7,6165
3	-0,2760	-0,3027	-3,4124
4	-0,1158	-0,1693	-1,9176
5	-0,0625	-0,1158	-1,2369
6	-0,0625	-0,1159	-1,2369
10	-0,0091	-0,0225	-0,3027
AKT (1 elem.)	0,00423		
LIT (1 elem.)	0,00423		
Solução exata	-7,4927E-7		

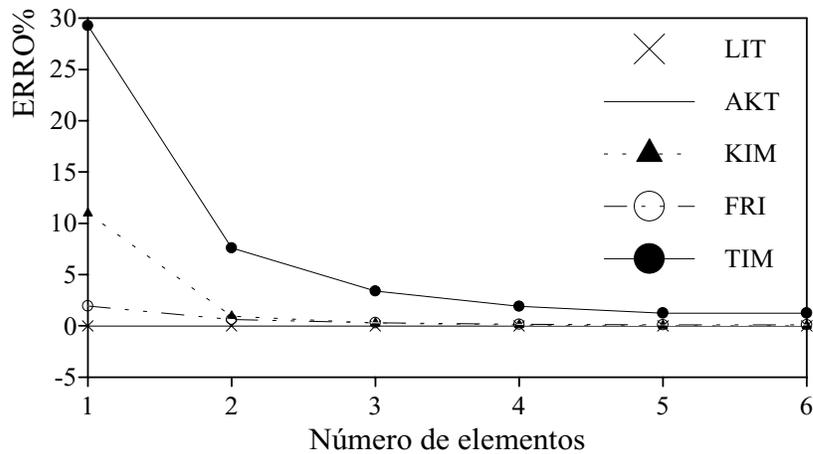


Figura 7.35 — Convergência: rotação ϕ .

Com o intuito de verificar a influência da espessura t da seção transversal em relação ao número de elementos finitos necessários à convergência de resultados, a estrutura da Figura 7.33 foi analisada para diferentes valores de t , utilizando todos os elementos finitos circulares estudados: LIT, AKT, KIM e FRI.

Note na Tabela 7.28 que as formulações LIT e AKT convergiram para a solução exata com apenas um elemento finito, independentemente da espessura t da seção transversal. Comportamento semelhante foi observado para a formulação KIM, só que a convergência de resultados ocorreu com o emprego de dois elementos finitos. Já para a formulação FRI, pode-se afirmar que a espessura t da seção transversal influenciou na convergência de resultados. Note que essa formulação fornece bons resultados (poucos elementos) no caso da estrutura espessa. No caso da estrutura esbelta, a solução convergiu para o valor exato apenas com um número elevado de elementos finitos.

Tabela 7.28 – Critério de convergência.

t	2,5	1,0	0,5	0,2	0,1
r / t	4	10	20	50	100
LIT	1	1	1	1	1
AKT	1	1	1	1	1
KIM	2	2	2	2	2
FRI	4	8	14	34	68

7.6 – ARCO CIRCULAR ESPESSO

Um arco espesso ($r / t < 40$) é analisado nesta seção para duas situações de carregamento: carga concentrada e carga distribuída radial. Na subseção 7.6.1 é feita uma análise de convergência comparando-se os resultados obtidos através das formulações LIT, AKT, KIM, FRI e TIM. Na última subseção, os dois casos de carga são analisados para diferentes valores da razão de esbeltez e também do ângulo de abertura, verificando-se a influência do efeito da força cortante para essas relações.

7.6.1 – Análise de convergência

O arco biengastado mostrado na Figura 7.36 tem seção transversal constante, de formato retangular. As propriedades físicas e geométricas necessárias à análise podem ser vistas nessa mesma figura. Note que $r / t = 6.667$, que caracteriza o sistema estrutural como espesso.

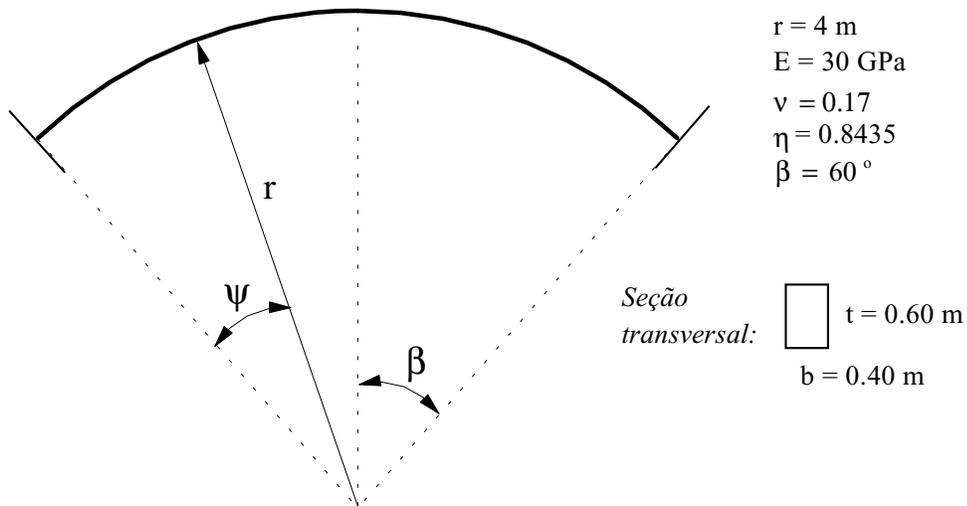


Figura 7.36 – Arco circular espesso.

Como ilustrado na Figura 7.37, o arco é investigado para duas situações de carregamento: *Caso 1*, carga vertical concentrada no vértice e *Caso 2*, pressão radial uniforme. Os resultados numéricos dos deslocamentos radiais dos dois casos de carga

estão presentes no artigo de Litewka e Rakowski (1998) e serão usados para comparar com os resultados obtidos com as diversas formulações.

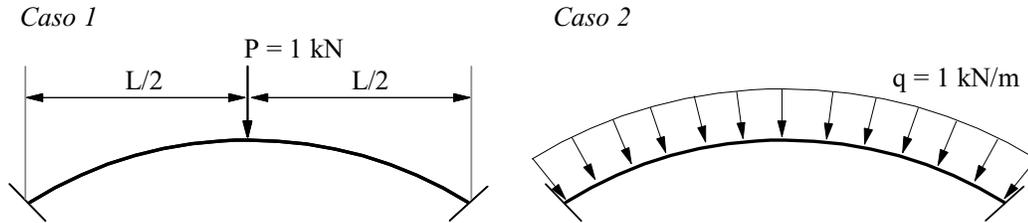


Figura 7.37 – Tipos de carregamento.

Nos dois casos de carga, devido à simetria geométrica e de carregamento, apenas metade do arco foi modelada, com restrição do deslocamento tangencial u e da rotação ϕ no vértice do arco. Essa modelagem pode ser observada na Figura 7.38.

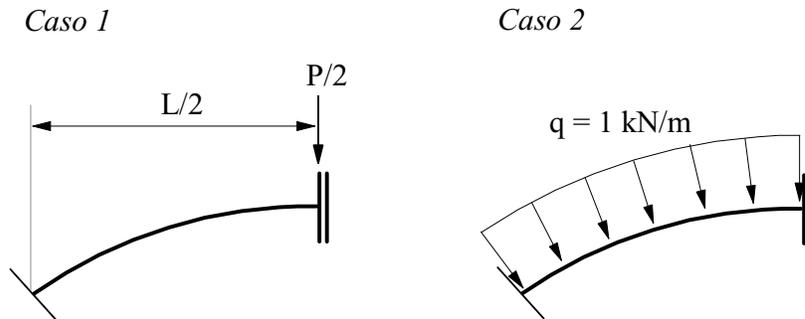


Figura 7.38 – Modelos numéricos adotados.

A Tabela 7.29 apresenta o valor do deslocamento radial v do vértice do arco, obtidos pelas formulações LIT, AKT, KIM, FRI e TIM, para o caso de carga 1, utilizando modelos estruturais com 1, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 e 16 elementos finitos. Nessa tabela são apresentados também os erros percentuais desse deslocamento em relação à solução exata.

Para essa situação de carga, de acordo a mesma Tabela 7.29, foram necessários apenas um elemento LIT e dois elementos KIM para se aproximar do valor exato do deslocamento no vértice. Já para a formulação FRI foram necessários 16 elementos finitos para uma boa convergência. A formulação AKT apresentou um erro de 3.36% em relação à solução exata, com qualquer número de elementos finitos. Observe que o

erro de aproximadamente 3.4% não parece se alterar com aumento de elementos se a formulação TIM for empregada. A Figura 7.39 complementa a análise para esse primeiro caso de carga.

Tabela 7.29 – Análise de convergência, Caso 1: carga concentrada.

N. elementos	KIM	ERRO%	FRI	ERRO%	TIM	ERRO%
1	-2,5426E-06	21,988	-5,8140E-07	-72,106	-1,0437E-06	-49,926
2	-2,0842E-06	-0,005	-1,1888E-06	-42,964	-1,9126E-06	-8,238
4	-2,0805E-06	-0,182	-1,8164E-06	-12,853	-1,9922E-06	-4,419
6	-2,0791E-06	-0,249	-1,9603E-06	-5,949	-2,0046E-06	-3,824
8	-2,079E-06	-0,269	-2,013E-06	-3,435	-2,009E-06	-3,618
10	-2,079E-06	-0,278	-2,037E-06	-2,255	-2,011E-06	-3,526
12	-2,078E-06	-0,283	-2,051E-06	-1,607	-2,012E-06	-3,474
14	-2,078E-06	-0,288	-2,059E-06	-1,214	-2,013E-06	-3,445
16	-2,078E-06	-0,288	-2,064E-06	-0,960	-2,013E-06	-3,426
LIT (1 elem.)	-2,0817E-06	-0,125				
AKT (1 elem.)	-2,0143E-06	-3,358				
Solução exata	-2,0843E-06					

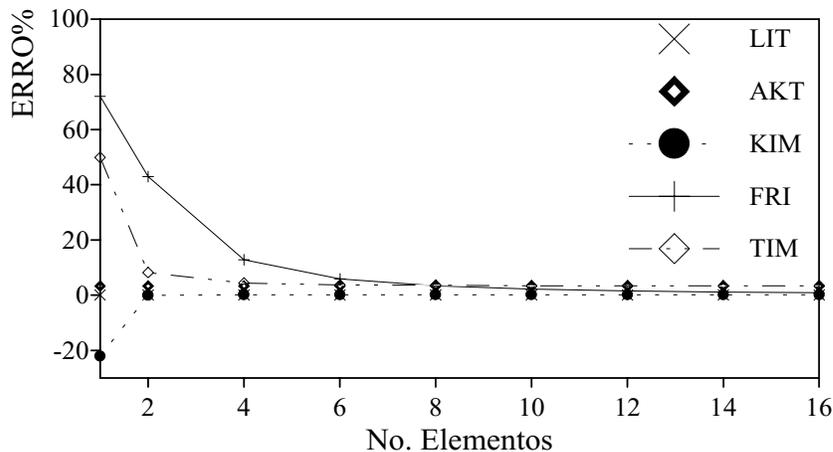


Figura 7.39 - Análise de convergência, Caso 1: carga concentrada.

A Tabela 7.30 e a Figura 7.40 apresentam os resultados obtidos, considerando o Caso 2 de carga, pelas diversas formulações para o deslocamento radial v do vértice do arco e modelos estruturais com 1, 2, 3, 4, 5 e 6 elementos.

Observe que, para essa situação de carga, foram necessários cinco elementos FRI para se obter o deslocamento v do vértice bem próximo da solução exata. Já para as

formulações LIT, AKT e KIM foram necessários seis elementos finitos para se aproximar da solução exata. Para a formulação TIM bastaram apenas três elementos para uma boa convergência. Note que, ao contrário da análise anterior (Caso 1), as formulações AKT e TIM convergiram apresentando erro inferior a 1%.

Tabela 7.30 - Análise de convergência, Caso 2: Pressão radial uniforme.

ERRO%					
N. elementos	LIT	TIM	AKT	KIM	FRI
1	122,5575	10,6072	114,6193	171,4546	-36,4812
2	12,5651	1,4723	10,7766	14,3157	4,4017
3	4,1639	0,7285	3,5036	4,3435	2,0592
4	2,0643	0,5085	1,7986	2,0035	1,1739
5	1,2395	0,4098	1,1561	1,1105	0,7564
6	0,8272	0,3592	0,8449	0,6754	0,5287

Solução exata -3,9530E-06

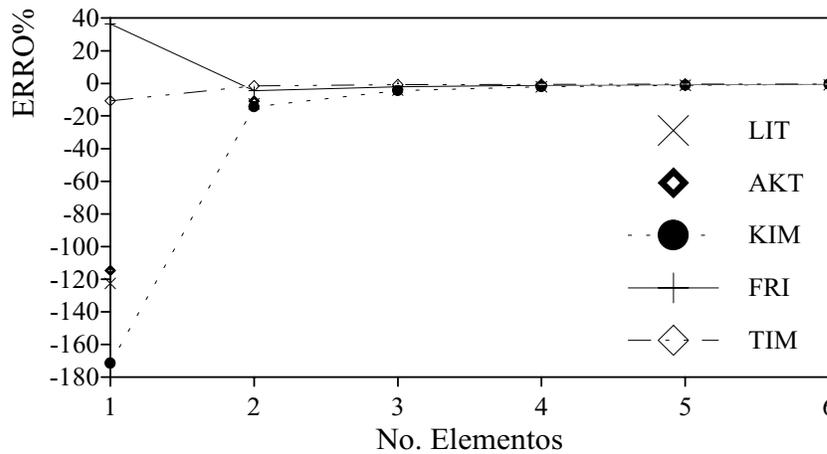


Figura 7.40 - Análise de convergência: Caso 2: Pressão radial uniforme.

7.6.2 – Análise da força cortante

Com o intuito de verificar a influência da força cortante, analisa-se agora o arco da Figura 7.36 submetido ao primeiro caso de carga da subseção anterior, para diferentes valores do índice de esbelteza. A Tabela 7.31 apresenta os valores obtidos para o deslocamento radial no vértice, para diferentes valores da espessura t da seção

transversal. Na terceira coluna dessa tabela é apresentado o valor do deslocamento radial, designado por v_s , obtido levando-se em consideração os efeitos dos esforços de flexão, cortante e normal. Em seguida esse mesmo deslocamento é calculado levando-se em consideração somente os efeitos dos esforços de flexão e normal, e o resultado, designado por v_n , pode ser visto na quarta coluna. A diferença entre o valor do deslocamento radial incluindo ou não as forças cortantes na análise é apresentado na última coluna. Essa diferença é calculada aqui através da expressão:

$$\text{DIFF}\% = 100 \times \frac{v_n - v_s}{v_s} \quad (7.2)$$

Observe que o efeito da força cortante não pode ser desconsiderada na análise quando $r / t < 40$, onde obtém-se uma influência da força cortante maior que 1%. Essa mesma razão de esbeltez limite foi obtida por Krishnan e Suresh (1998), conforme apresentada na Figura 1.1, do Capítulo 1.

Tabela 7.31 – Índice de esbeltez, Caso 1: carga concentrada.

t	r / t	v_s	v_n	DIFF%
0,60	6,67	2,1003E-06	1,8473E-06	-13,6957
0,40	10,00	4,9768E-06	4,5821E-06	-8,6140
0,20	20,00	2,9146E-05	2,8333E-05	-2,8691
0,13	30,00	9,1600E-05	9,0373E-05	-1,3576
0,10	40,00	2,1127E-04	2,0963E-04	-0,7818
0,08	50,00	4,0747E-04	4,0542E-04	-0,5058
0,07	60,00	6,9822E-04	6,9576E-04	-0,3537
0,06	70,00	1,1082E-03	1,1053E-03	-0,2602
0,05	80,00	1,6460E-03	1,6428E-03	-0,1999

O arco submetido ao segundo caso de carga da subseção anterior é analisado agora para diferentes valores do índice de esbeltez. O objetivo é verificar mais uma vez a influência da força cortante na análise. A Tabela 7.32 mostra o deslocamento radial do vértice do arco para diferentes valores da espessura t da seção transversal. Novamente, na terceira e quarta coluna dessa tabela são apresentados os valores do deslocamento radial obtidos incluindo ou não as forças cortantes na análise. A diferença entre esses dois valores, obtida pela Equação 7.2, é apresentada na última coluna. Note que para essa situação de carregamento, o efeito da força cortante é menor que 1% para qualquer índice de esbeltez. Esse resultado já era esperado, pois o arco é funicular.

A Figura 7.41 mostra adicionalmente a influência do cortante para os dois casos de carga em estudo.

Tabela 7.32 – Índice de esbeltez, Caso 2: pressão radial uniforme.

t	r / t	v_s	v_n	DIFF%
0,60	6,67	-3,9922E-06	-4,0018E-06	0,2399
0,40	10,00	-6,1811E-06	-6,2184E-06	0,5998
0,20	20,00	-1,2713E-05	-1,2832E-05	0,9266
0,13	30,00	-1,9444E-05	-1,9637E-05	0,9828
0,10	40,00	-2,6517E-05	-2,6782E-05	0,9869
0,08	50,00	-3,4077E-05	-3,4412E-05	0,9723
0,07	60,00	-4,2218E-05	-4,2622E-05	0,9479
0,06	70,00	-5,1188E-05	-5,1662E-05	0,9171
0,05	80,00	-6,0886E-05	-6,1429E-05	0,8831

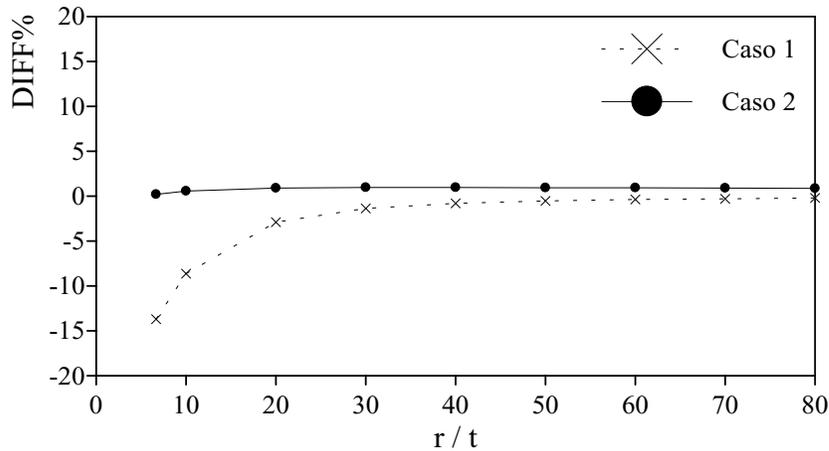


Figura 7.41 – Influência da força cortante.

A Tabela 7.33 fornece os valores das reações de apoio P_1 , Q_1 e M_1 considerando o Caso 1 de carregamento para diferentes valores do índice de esbeltez. Note que os valores de P_1 , Q_1 e M_1 aumentam à medida que o valor de t decresce. No entanto, somente a variação do momento fletor é significativa. Note que a diferença de valores da reação P_1 , por exemplo, para índices de esbeltez $r / t = 6.667$ e $t / r = 80$ é bem pequena (3.92%). O mesmo acontece para valores de Q_1 , onde a diferença entre os índices anteriores é de somente 12.73%. Já para o momento fletor, essa diferença é de 31.21%.

Tabela 7.33 – Reações de apoio: índice de esbeltez, Caso 1: carga concentrada.

t	r / t	P_1	Q_1	M_1
0,6	6.67	-802,4728	-389,9237	-226,0401
0,4	10	-819,8899	-420,0910	-280,4259
0,2	20	-831,4850	-440,1744	-316,6324
0,13	30	-833,8273	-444,2314	-323,9464
0,1	40	-834,5342	-445,4558	-326,1537
0,08	50	-834,9044	-446,0969	-327,3096
0,07	60	-835,0589	-446,3645	-327,7920
0,06	70	-835,1929	-446,5967	-328,2106
0,05	80	-835,3065	-446,7933	-328,5650

A Tabela 7.34 fornece os valores das reações de apoio P_1 , Q_1 e M_1 considerado o Caso 2 de carregamento para diferentes valores do índice de esbeltez. Note que os valores de P_1 aumentam à medida que o valor de t decresce, enquanto que

os valores de Q_1 e M_1 diminuem. Note que a diferença de valores da reação P_1 , por exemplo, para índices de esbeltez $r / t = 6.667$ e $t / r = 80$, ao contrário do Caso 1, é muito grande (-1164.41%). Já a variação de valores de Q_1 e M_1 (65.15% e 60.62%, respectivamente), para os mesmos índices anteriores, é bem menor.

Tabela 7.34 – Reações de apoio: índice de esbeltez, Caso 2: pressão radial uniforme

t	r / t	P₁	Q₁	M₁
0,60	6,67	-196,9389	620,6792	1559,4821
0,40	10	-246,7727	611,8921	1538,9373
0,20	20	-494,7967	568,1588	1436,6850
0,13	30	-842,5500	506,8405	1293,3176
0,10	40	-1227,6063	438,9447	1134,5714
0,08	50	-1603,3757	372,6864	979,6539
0,07	60	-1851,0451	329,0156	877,5478
0,06	70	-2146,1991	276,9720	755,8654
0,05	80	-2490,1098	216,3313	614,0822

A influência do efeito da força cortante é analisada também para diferentes valores do ângulo β de abertura do arco (veja Figura 7.36). A Tabela 7.35 apresenta a diferença entre os valores do deslocamento radial para o Caso 1 de carregamento, incluindo ou não as forças cortantes na análise e para para três índices de esbeltez: $r / t = 10$ (arco espesso), $r / t = 40$ (arco moderado) e $r / t = 80$ (arco esbelto). A Figura 7.42 ilustra também a influência do cortante para esses valores do ângulo de abertura do arco.

Verifique que a influência do ângulo de abertura para arcos esbeltos e moderados não é significativa. No entanto, para arcos espessos, o ângulo de abertura é fator determinante: quanto mais abatido, maior é a influência da força cortante.

Tabela 7.35 – Ângulo de abertura, Caso 1: carga concentrada.

DIFF%			
2β	r / t = 10	r / t = 40	r / t = 80
20	46,5817	4,1318	0,9627
40	14,2136	1,8761	1,0108
60	6,7297	1,9441	0,6611
80	7,1513	1,4325	0,4038
100	7,7729	1,0016	0,2644
120	7,3912	0,7189	0,1848
140	6,4799	0,5352	0,1360
160	5,4843	0,4117	0,1040
180	4,5930	0,3255	0,0819
200	3,8496	0,2633	0,0661
220	3,2464	0,2169	0,0544

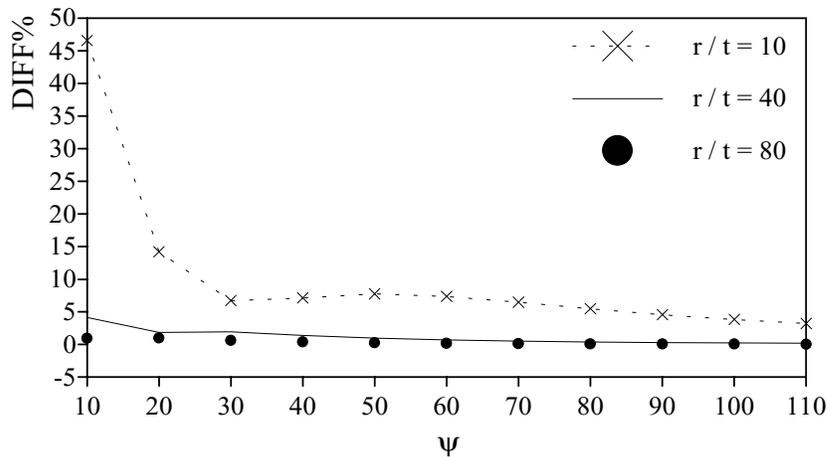


Figura 7.42 – Ângulo de abertura, Caso 1: carga concentrada.

A Tabela 7.36 apresenta a diferença entre os valores do deslocamento radial do Caso 2, incluindo ou não as deformações cisalhantes na análise, para os três índices de esbeltez utilizados na análise anterior. A Figura 7.43 ilustra também a influência do cortante para diferentes valores do ângulo de abertura. Como no Caso 1, note que a influência do ângulo de abertura para os arcos esbeltos e moderados não é significativa. Para arcos espessos verificou-se mais uma vez que o ângulo de abertura é fator determinante: quanto mais abatido, maior é a influência da força cortante.

Tabela 7.36 – Ângulo de abertura, Caso 2: pressão radial uniforme.

DIFF%			
2β	r / t = 10	r / t = 40	r / t = 80
20	47,8007	3,6966	0,3554
40	12,5109	-0,0886	-0,0457
60	1,5821	-0,0690	0,0289
80	-0,3289	0,0369	0,0978
100	-0,4040	0,1351	0,1735
120	-0,2049	0,2342	0,2574
140	0,0223	0,3422	0,3535
160	0,2271	0,4585	0,4570
180	0,4215	0,5819	0,5651
200	0,6188	0,7199	0,6784
220	0,8096	0,8673	0,7891

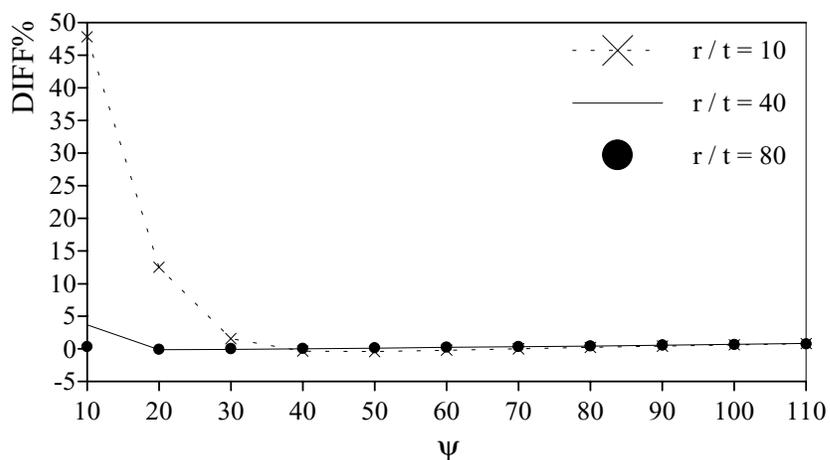


Figura 7.43 – Ângulo de abertura, Caso 2: pressão radial uniforme.

8

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

8.1 - CONCLUSÕES

Neste trabalho foi apresentado um estudo numérico computacional de seis elementos finitos para análise linear de arcos. Os artigos de Marquis e Wang (1989), Akhtar (1987), Litewka e Rakowski (1997, 1998), Friedman e Kosmatka (1998) e Kim e Kim (1998) foram de fundamental importância nas implementações realizadas.

Com o objetivo de validar essas implementações e avaliar a eficiência computacional dessas formulações, foram estudados vários exemplos de problemas estruturais encontrados na literatura. Esses exemplos e suas respectivas análises foram apresentadas no Capítulo 7.

Decorrente das análises dos problemas estruturais presentes nas Seções 7.2 e 7.3 — onde procurou-se investigar o desempenho das formulações WAN e TIM — e dos exemplos das Seções 7.4, 7.5 e 7.6 — onde procurou-se investigar o desempenho das formulações LIT, AKT, KIM, FRI e TIM — pode-se chegar às seguintes conclusões:

- Na Seção 7.2 foram modelados arcos parabólicos submetidos a cargas concentradas e distribuídas. Com a formulação WAN foram obtidos bons resultados com um número pequeno de elementos finitos na modelagem para o caso de cargas concentradas. No caso de carga uniformemente distribuída, as aproximações existentes no cálculo do carregamento nodal equivalente podem ser apontadas como a principal razão dos erros obtidos com a utilização de poucos elementos parabólicos na discretização do arco. Já com a formulação TIM, que utiliza elementos retos, resultados satisfatórios só foram obtidos com

um número significativo de elementos finitos na modelagem do arco, para todas as situações de cargas. No entanto, para o caso da carga uniformemente distribuída, a formulação TIM mostrou-se mais eficiente que a formulação WAN;

- Ainda na Seção 7.2, foi apresentado um estudo sobre a influência da relação f/L no cálculo das reações de apoio para o caso de carga vertical concentrada no vértice. Através desse estudo pode-se observar que quanto maior o valor de f , mantendo-se L constante, menor é o valor do empuxo (esforço axial) nos apoios. No entanto, o valor do momento fletor cresce à medida que o valor de f cresce. Outro dado importante observado nessa análise, é que quanto maior o valor da relação f/L , menos eficiente é o elemento WAN. Para a relação $f/L = 0.3$, por exemplo, o erro percentual é de -5.469% ;
- Foram traçados diagramas de momento fletor para os quatro casos de carga da Seção 7.2 empregando a formulação WAN. Apesar de apresentar erros percentuais maiores que 1% em relação à solução exata, em alguns pontos da estrutura modelada, foi possível apresentar o formato real desses diagramas de momento fletor;
- Como última análise da Seção 7.2, foram traçadas as linhas de influência para as reações de apoio P_2 , Q_2 e M_2 , utilizando novamente a formulação WAN. Como no caso dos diagramas de momento fletor, as linhas de influência das reações de apoio apresentaram erros percentuais maiores que 1% em relação à solução exata em alguns pontos nodais da estrutura modelada. Entretanto, foi possível apresentar o formato real dessas linhas de influência;
- Na Seção 7.3 a atenção foi direcionada a modelagem de um semi-arco parabólico, de seção transversal variável, submetido a uma carga concentrada vertical na extremidade livre. Como cada elemento, em particular, possui seção transversal constante, é evidente que somente com um elevado número de elementos tornou-se possível simular a área e a inércia variáveis. Portanto, com a formulação WAN só foi possível obter bons resultados com um número razoável de elementos finitos. No entanto, o desempenho computacional da

formulação TIM não sofreu alteração de desempenho em relação ao caso da seção transversal constante (Seção 7.2);

- Na Seção 7.4 foram analisados dois sistemas estruturais circulares esbeltos. Como primeiro exemplo, um anel circular foi submetido a duas cargas concentradas na direção radial. As formulações LIT e AKT mostraram-se bastante eficientes, onde valores próximos ao da solução exata (deslocamentos e esforços) foram obtidos apenas com um elemento na modelagem do anel. A formulação KIM mostrou também bom desempenho computacional (3 elementos). Já com a formulação FRI só foi possível obter o deslocamento radial do apoio com razoável precisão utilizando-se 70 elementos finitos. No entanto, a formulação FRI é eficiente no cálculo do momento fletor M_A ;
- Como segundo exemplo da Seção 7.4, um arco bi-apoiado foi submetido a uma carga momento no vértice. As formulações AKT, LIT, KIM e FRI apresentaram o mesmo desempenho computacional da análise anterior, ou seja: com AKT e LIT pode-se chegar bem próximos à solução exata (deslocamentos e esforços) com apenas dois elementos para a modelagem. Com a formulação KIM, valores próximos à solução exata foram obtidos com apenas quatro elementos; para a formulação FRI, entretanto, foram necessários sessenta e oito elementos para se obter valores próximos à solução exata. Novamente, a formulação FRI apresentou-se de forma eficiente no cálculo dos esforços (cortante Q e momento fletor M , localizados no vértice do arco);
- Ainda na Seção 7.4, foram traçados os diagramas de esforços dos dois exemplos. No caso do anel circular, foi utilizada a formulação KIM para o traçado dos diagramas, obtendo-se uma aproximação excelente das curvas. No caso do arco bi-apoiado, foi utilizada a formulação AKT para o traçado dos diagramas de esforços. Novamente, obteve-se uma boa aproximação das curvas;
- Já na Seção 7.5, foi analisado um semi-arco circular espesso, submetido a uma carga vertical concentrada na extremidade livre. Novamente, as formulações AKT e LIT convergiram para a solução exata com apenas um elemento finito na modelagem. Para a formulação KIM foram necessários dois e três elementos para a convergência dos deslocamentos u e ϕ , respectivamente. Já com a

formulação FRI, ao contrário das análises da Seção 7.4, foram necessários apenas dois e quatro elementos para a convergência dos deslocamentos u e ϕ , respectivamente;

- Na Seção 7.5, a estrutura foi ainda analisada para valores diferentes da espessura t , e utilizando todos os elementos finitos circulares: LIT, AKT, KIM e FRI. Através dessa análise, verificou-se, mais uma vez, que as formulações LIT e AKT convergem para a solução exata com apenas um elemento finito, independentemente da espessura t da seção transversal. O mesmo comportamento foi observado para a formulação KIM, só que a convergência dos resultados ocorre com a utilização de dois elementos finitos. Já para a formulação FRI, pôde-se observar que a espessura t da seção transversal influencia na convergência de resultados. Verificou-se que com essa formulação chega-se a bons resultados com poucos elementos quando a estrutura é espessa. Quando a estrutura é esbelta (Seção 7.4), chega-se a bons resultados apenas com um elevado número de elementos finitos;
- Na Seção 7.6, um arco espesso foi analisado para duas situações de carregamento. Como primeira situação de carga, o arco foi submetido a uma carga vertical concentrada no vértice. As formulações LIT e KIM apresentaram-se novamente com grande eficiência computacional. Com a formulação FRI chegou-se a resultados com razoável precisão com 16 elementos na modelagem. Já para a formulação AKT, independente do número de elementos empregados, foi observado um erro de aproximadamente 3.4% em relação à solução exata. A formulação TIM apresentou comportamento semelhante, porém, o erro permaneceu constante, independente da quantidade de elementos, para discretizações acima de 12 elementos finitos;
- Como segunda situação de carga, o arco espesso foi submetido a uma pressão radial uniforme. Ao contrário do exemplo anterior, todos as formulações convergiram para resultados próximos à solução analítica (erro menor que 1%). Todos as formulações apresentaram desempenho semelhante, exceto a formulação TIM, que convergiu com um número menor de elementos finitos.

Novamente, a formulação TIM apresentou os melhores resultados para o caso de cargas distribuídas;

- Com o intuito de verificar a influência da força cortante, os dois casos de carga da Seção 7.6 foram analisados para diferentes valores do índice de esbeltez e ângulo de abertura do arco. Para o caso da carga concentrada no vértice, verificou-se que a influência da força cortante era maior que 1%, no caso da razão de esbeltez $r / t < 40$. No entanto, para o caso de pressão radial uniforme, a influência da força cortante foi sempre menor que 1%. Esse resultado já era esperado pois o arco circular submetido a pressão radial uniforme é definido como um arco funicular;
- No caso da variação do ângulo de abertura, os resultados obtidos para os dois casos de carga foram equivalentes, isto é, o ângulo de abertura para arcos esbeltos e moderados não é significativa, enquanto que para arcos espessos é um fator determinante: quanto mais abatido, maior é a influência da força cortante.

8.2 – SUGESTÕES PARA FUTURAS PESQUISAS

A seguir são descritas algumas pesquisas que podem ser realizadas com o intuito de dar continuidade a esta dissertação:

- Implementações de novas formulações de elementos finitos curvos (Saleeb e Chang, 1987; Raveendranath *et al.*, 1999);
- Introduzir relações cinemáticas adequadas para realização de análises geometricamente não-lineares. Em termos de implementação computacional esse assunto está diretamente relacionado com a montagem da matriz de rigidez tangente e vetor de forças internas (Galvão, 2000; Rocha, 2000);
- Introduzir nas formulações propostas a possibilidade de se realizar uma análise dinâmica. Em outras palavras, desenvolver e implementar a matriz de massa dos elementos curvos estudados (Krishnan e Suresh, 1998; Tseng *et al.*, 2000; Lin e Lee, 2001);

- Analisar o problema de contato bilateral e unilateral entre os elementos curvos estudados e fundações elásticas (Silveira, 1995);
- Implementar formulação de elemento finito curvo envolvendo variação de temperatura (Dorfi e Busby, 1994).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AKHTAR, M. (1987). Element stiffness of circular member. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 113(4), 867-872.

AUSTIN, W. J. (1971). In plane bending and buckling of arches. *Journal of Structural Division*, ASCE, 97(5), 1575-1592.

BELLUZZI, O. (1971). *Ciencia de la construccion*. Aguilar S.A. de Ediciones, Madrid, Espanha.

COWPER, G. R. (1966). The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory. *Journal of Applied Mechanics*, 66, 335-340.

DARKOV, A., KOUZNETSOV, V. (1982). *Curso de Mecânica das Estruturas*. Lopes da Silva Editora, Porto, Portugal.

DORFI, H. R., BUSBY, H. R. (1994). An effective composite beam finite element based on the hybrid-mixed formulation. *Computers & Structures*, 53, 43-52.

ERIKSSON, A., PACOSTE, C. (1999). Symbolic software tools in the development of finite elements. *Computers & Structures*, 72, 579-593.

FRIEDMAN, Z., KOSMATKA, J. B. (1998). An accurate two-node finite element for shear deformable curved beams. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 41, 473-498.

GALVÃO, A. S. (2000). *Formulações Não-Lineares de Elementos Finitos para Análise de Sistemas Estruturais Metálicos Reticulados Planos*. *Dissertação de Mestrado*, Escola de Minas – UFOP, Ouro Preto, Minas Gerais.

GODEFROID, L. (1995). *Aplicação da Mecânica de Fratura no Projeto Estrutural*, UFOP, Ouro Preto, Minas Gerais.

KIM, J. G., KIM, Y. Y. (1998). A new higher-order hybrid-mixed curved beam element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 43, 925-940.

KRISHANAN, A., and SURESH, Y. J. (1998). A simple cubic linear element for static and free vibration analyses of curved beams. *Computers & Structures*, 68, 473-489.

- LEITHOLD, L. (1982). O Cálculo com Geometria Analítica. Editora Harper & Row do Brasil Ltda., 2ª Edição, São Paulo, Brasil.
- LEONTOVICH, V. (1959). Frames and arches. McGraw-Hill, U.S.A.
- LIN, S. M., LEE, S. Y. (2001). Closed-form solutions for dynamic analysis of extensional circular Timoshenko beams with general elastic boundary conditions. *International Journal of Solids and Structures*, 38, 227-240.
- LITEWKA, P., and RAKOWSKI, J. (1997). An efficient curved beam finite element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40, 2629-2652.
- LITEWKA, P., and RAKOWSKI, J. (1998). The exact thick arch finite element. *Computers & Structures*, 68, 369-379.
- MARQUIS, J. P., and WANG, T. M. (1989). Stiffness matrix of parabolic beam element. *Computers & Structures*, 31(6), 863-870.
- PARAMASIVAM, S. P., RAMACHANDRE, G., Raj, D. M. (1992). Timoshenko beam finite element with four DOF and convergence $C^0(h^4)$. *Computers & Structures*, 43, 1187-1189.
- RAKOWSKI, J. (1990). The interpretation of the shear locking in beam elements. *Computers & Structures*, 37(5), 769-776.
- RAVEENFRANATH, P., SINGH, G., PARADHAN, B. (1999). A Two-noded locking-free shear flexible curved beam element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44, 265-280.
- ROCHA, G. (2000). Estratégias de Incremento de Carga e de Iteração para Análise Não-Linear de Estruturas. *Dissertação de Mestrado*, Escola de Minas – UFOP, Ouro Preto, Minas Gerais.
- SALEEB, A. F., CHANG, T. Y. (1987). On the hybrid-mixed formulation of C^0 curved beam elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 60, 95-121.
- SILVEIRA, R. A. M. (1995). Análise de Elementos Estruturais Esbeltos com Restrições Unilaterais de contato. *Tese de Doutorado*, PUC-RJ, Rio de Janeiro, RJ.
- TIMOSHENKO, S. P., and GERE, J. M. (1982). Mecânica dos Sólidos 1. LTC S.A., Rio de Janeiro, Brasil.
- TIMOSHENKO, S. P., and GERE, J. M. (1982). Mecânica dos Sólidos 2. LTC S.A., Rio de Janeiro, Brasil.

TSENG, Y. P., HUANG, C. S., KAO, M. S. (2000). In-plane vibration of laminated curved beams with variable curvature by dynamic stiffness analysis. *Composite Structures*, 50, 103-114.

YUNHUA, L. (1998). Explanation and elimination of shear locking and membrane locking with field consistence approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 162, 249-269

REFERÊNCIAS ADICIONAIS

AHMAD, S., and IRONS, B. M., and ZIENKIEWICZ, O. C. (1970). Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2, 419-451.

ASHWELL, D. G., and SABIR, A. B. (1971). Limitations of certain curved finite elements when applied to arches. *International Journal of Mechanics Science*, Vol. 13, 133-139.

ASHWELL, D. G., and SABIR, A. B. (1974). On the finite element calculation of stress distributions in arches. *International Journal of Mechanics Science*, Vol. 16, 21-29.

ASPLUND, S. O. (1961). Deflection theory of arches. *Journal of Structural Division*, ASCE, 87(7), 125-149.

ASSAN, A. E. (1996). Métodos Energéticos e Análise Estrutural. UNICAMP, Campinas(SP).

ASSAN, A. E. (1999). Método dos elementos finitos: primeiros passos. UNICAMP, Campinas(SP).

AUSTIN, W. J., and ROSS, T. J. (1976). Elastic buckling of arches under symmetrical loading. *Journal of Structural Division*, ASCE, 102(5), 1085-1095.

AUSTIN, W. J., and ROSS, T. J., and TAWFIK, A. S., and VOLZ, R. D. (1982). Numerical bending analysis of arches. *Journal of Structural Division*, ASCE, 108(4), 849-868.

BADAWY, E. I., JORDAAN, I. J. (1977). Plastic analysis of curved beams under point loads. *Journal of Structural Division*, ASCE, 103(7), 1429-1445.

BARSOUM, R. S., and GALLAGHER, R. H. (1970). Finite element analysis of torsional and torcional-flexural stability problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2, 335-352.

BATHE, K. J. (1982). Finite element procedures in engineering analysis. Prentice-Hall, New Jersey(USA).

- BENEDETTI, A., and DESERI, L., and TRALLI, A. (1996). Simple and effective equilibrium models for vibration analysis of curved rods. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 122(4).
- BROOKHART, G. C. (1967). Circular-arc I-type girders. *Journal of the Structural Division*, ASCE, 93(6), 133-159.
- BRUSH, D. O., ALMROTH, B. O. (1975). Buckling of bars, plates, and shells. Mc. Graw-Hill, International Student Edition, Kogakusha.
- BUCHANAN, G. R. Schaum's outline of Theory and problems of Finite Elements Analysis. Mc. Graw-Hill, U.S.A.
- BUCHANAN, G. R., and HUANG, J.-C., and CHENG, T. K. M. (1970). Effect of shear on nonlinear behavior of elastic bars. *Journal of Applied Mechanics*, 3, 212-215.
- BUDIANSKY, B., and FRAUENTHAL, J. C., and HUTCHINSON, J. W. (1969). On optimal arches. *Journal of Applied Mechanics*, ASME, 880-882.
- CALHOUN, P. R., and DADEPPO, D. A. (1983). Nonlinear finite element analysis of clamped arches. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 109(3), 599-612.
- CHINI, S. A., and WOLDE-TINSAE, A. M. (1988). Buckling test of prestressed arches in centrifuge. *Journal of Engineering Mechanics*, ASME, 114(6), 1063-1075.
- CHINI, S. A., and WOLDE-TINSAE, A. M. (1988). Critical load and postbuckling of arch frameworks. *Journal of Engineering Mechanics*, ASME, 114(9), 1435-1453.
- CHINI, S. A., and WOLDE-TINSAE, A. M. (1988). Effect of prestressing on elastica Arches. *Journal of Engineering Mechanics*, ASME, 114(10), 1791-1800.
- CHOI, J.-K., and LIM, J.-K. (1995). General curved beam elements based on the assumed strain fields. *Computers & Structures*, 55(3), 379-386.
- CLARKE, M. J., and HANCOCK, G. J. (1991). Finite-element nonlinear analysis of stressed-arch frames. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 117(10), 2819-2837.
- CLARKE, M. J., and HANCOCK, G. J. (1995). Design of top chord of stressed-arc frames. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 121(2), 201-213.
- CLARKE, M. J., and HANCOCK, G. J. (1995). Tests and nonlinear analysis of small-scale stressed-arch frames. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 121(2), 187-200.
- CLIFTON, R. J. (1970). Snap-buckling of shallow prestressed arches. *Journal of Engineering Mechanics Division*, ASCE, 96(6), 1157-1170.

CLOSE, R. A. (1964). Deflection of circular curved I-beams. *Journal of Structural Division*, ASCE, 90(1), 203-207.

CodeWarrior Professional *Release 2* (1993-1997), Metrowersks Inc.

CONWAY, H. D., and LO, C. F. (1967). Further studies on the elastic stability of curved beams. *International Journal of Mechanical Science*, 9, 707-718.

COOK R. D., MALKUS, D. S., PLESHA, M. E. (1989). Concepts and applications of finite element analysis. 3rd. John Wiley & Sons. Toronto(Canada).

CORNFORTH, R. C., and CHILDS, S. B. (1966). Computer analysis of two-hinged circular arches. *Journal of the Structural division*, ASCE, 93(2), 319-338.

DADEPPO, D. A., and SCHMIDT, R. (1969). Sideway buckling of deep circular arches under a concentrated load. *Journal of Applied Mechanics*, ASME, 325-327.

DADEPPO, D. A., and SCHMIDT, R. (1971). Stability of heavy circular arches with hinged ends. *AIAA Journal*, 9(6), 1200-1201.

DADEPPO, D. A., and SCHMIDT, R. (1974). Stability of two-ringed circular arches with independent loading parameters. *AIAA Journal*, 12(3), 385-386.

DAWE, D. J. (1971). A finite-deflection analysis of shallow arches by the discrete element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 3, 529-552.

DAWE, D. J. (1974). Curved finite elements for the analysis of shallow and deep arches. *Computers & Structures*, 4, 559-580.

DAWE, D. J. (1974). Numerical studies using circular arch finite elements. *Computers & Structures*, 4, 729-740.

DONALD, P. T. A., and GODDEN, W. G. (1963). A numerical solution to the curved beam problem. *The Structural Engineer*, 41(6), 179-191.

ELIAS, Z. M., and CHEN, K.-L. (1988). Nonlinear shallow curved-beam finite element. *Journal of Engineering Mechanics*, ASME, 114(6), 1076-1087.

FRIED, I. (1973). Shape functions and the accuracy of arch finite elements. *AIAA Journal*, 11(3), 287-291.

FUJII, F. (1989). Scheme for elasticas with snap-back and looping. *Journal of Engineering Mechanics*, 115(10), 2166-2181.

FUJII, F., and GONG, S. (1988). Field transfer matrix for nonlinear curved beams. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 114(3), 675-691.

- FUKUMOTO, Y., and NISHIDA, S. (1981). Ultimate load behavior of curved I-beams. *Journal of Engineering Mechanics Division*, ASCE, 107(2), 367-385.
- GALAMBOS, T. V. (1960). Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures. 4th ed., John Wiley & Sons, Inc., New York.
- GHALI, A., and NEVILLE, A. M. (1997). Structural Analysis. E & FN Spon, 4nd ed., New York (U.S.A.).
- GJELSVIK, A. and BODNER, S. R. (1962). The energy criterion and snap buckling of arches. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, 88(5), 87-134.
- GOPU, V. K. A. (1980). Radial stressed in curved glulam beams. *Journal of Structural Division*, ASCE, 106(11), 2143-2150.
- GUPTA, K. K. (1973). Eigenproblem solution by a combined sturm sequence and inverse iteration technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 7, 17-42.
- HARRISON, H. B. (1982). In-plane stability of parabolic arches. *Journal of Structural Division*, ASCE, 108(1), 195-205.
- HEAL, K. M., HANSEN, M. L., RICKARD, K. M. (2000) Maple 6 Learning Guide. Waterloo Maple Inc., Canada.
- HEINS, C. P., and SPATES, K. R. (1970). Behavior of single horizontally curved girder. *Journal of Structural Division*, ASCE, 96(7), 1511-1523.
- HILL, C. D., and BLANDFORD, G. E., and WANG, S. T. (1989). Post-buckling Analysis of steel space trusses. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 115(4), 900-919.
- HUDDLESTON, J. V. (1968). Finite deflections and snap-through of high circular arches. *Journal of Applied Mechanics*, ASME, 763-769.
- HUDDLESTON, J. V. (1971). Nonlinear analysis of steep, compressible arches of any shape. *Journal of Applied Mechanics*, ASME, 942-946.
- KANG, Y. J., and YOO, C. H. (1994). Thin-walled curved beams. I: Formulation of nonlinear equations. *Journal of Engineering Mechanics*, ASME, 120(10), 2072-2101.
- KANG, Y. J., and YOO, C. H. (1994). Thin-walled curved beams. II: Analytical solutions for buckling of arches. *Journal of Engineering Mechanics*, ASME, 120(10), 2102-2125.

- KEE, C. F. (1961). Lateral inelastic buckling of tied arches. *Journal of Structural Division*, ASCE, 87(1), 23-39.
- KITIPORNCHAI, S., and WANG, C. M., and TRAHAIR, N. S. (1986). Buckling of monosymmetric I-beams under moment gradient. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 112(4), 781-799.
- KOMATSU S., and SAKIMOTO, T. (1977). Ultimate load carrying capacity of steel arches. *Journal of Structural Division*, ASCE, 103(12), 2323-2336.
- KUO, S., and YANG, Y. (1991). New Theory on buckling of curved beams. *Journal of Engineering Mechanics*, ASME, 117(8), 1698-1717.
- LIND, N. C. (1966). Numerical buckling analysis of arches and rings. *The Structural Engineer*, 44(7), 245-248.
- LO, C. F., and CONWAY, H. D. (1967). The elastic stability of curved beams. *International Journal of Mechanical Science*, 9, 527-538.
- MALLETT, R. H., and MARCAL, P. V. (1968). Finite element analysis of nonlinear structures. *Journal of the Structural division*, ASCE, 94(9), 2081-2105.
- MANZI, E. N., SILVEIRA, R. A. M., ARAÚJO, E. C. (2000). Elemento finito curvo para análise de arcos” III Seminário Internacional. “O Uso de Estruturas Metálicas na Construção Civil”, Belo Horizonte (Brasil).
- Maple 6 (2000), Waterloo Maple Inc.
- MCMANUS, P. F., and NASIR, G. A., and CULVER, C. G. (1969). Horizontally curved girders-state of the art. *Journal of Structural Division*, ASCE, 95(5), 853-870.
- MIRANDA, C., and OJALVO, M. (1965). Inelastic lateral-torsional buckling of beam columns. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, 91(6), 21-37.
- MIRMIRAN, A., and AMDE, A. M. (1993). Inelastic buckling of prestressed sandwich or homogeneous arches. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 119(9), 2733-2743.
- MIRMIRAN, A., and AMDE, A. M. (1995). Effects of fabrication process on prestressed composite arches. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 121(1), 124-131.
- MIRMIRAN, A., and WOLDE-TINSAE, A. M. (1993). Buckling and postbuckling of prestressed sandwich arches. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 119(1), 262-278.
- NOOR, A. K., and PETERS, J. M. (1984). Penalty finite element formulation for curved elastica. *Journal of Engineering Mechanics*, ASME, 110(5), 694-712.

- OJALVO, I. U., NEWMAN, M. (1968). Buckling of naturally curved and twisted beams. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, 94(5), 1067-1087.
- OJALVO, M., and DEMUTS, E., and TOKARK, F. (1969). Out-of-plane buckling of curved members. *Journal of the Structural division*, ASCE, 95(10), 2305-2316.
- ORAN, C. (1967). Complementary energy method for buckling. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, 93(1), 57-75.
- ORAN, C., and BAYAZID, H. (1978). Another look at buckling of circular arches. *Journal of Engineering Mechanics Division*, ASCE, 104(6), 1417-1432.
- ORAN, C., and REAGAN, R. S. (1969). Buckling of uniformly compressed circular arches. *Journal of Engineering Mechanics Division*, ASCE, 95(4), 879-895.
- PALANI, G. S., and RAJASEKARAN, S. (1992). Finite element analysis of thin-walled curved beams made of composites. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 118(8), 2039-2062.
- PANDIAN, N., and APPA RAO, T. V. S. R., and Chandra, S. (1989). Studies on performance of curved beam finite elements for analysis of thin arches. *Computers & Structures*, 31(6), 997-1002.
- PAPANGELIS, J. P., and TRAHAIR, N. S. (1987). Flexural-torcional buckling of arches. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 113(4), 889-906.
- PAPANGELIS, J. P., and TRAHAIR, N. S. (1987). Flexural-torcional buckling tests of arches. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 113(7), 1433-1443.
- PI, Y. L., and TRAHAIR, N. S. (1992). Prebuckling deflections and lateral buckling. I: Theory. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 118(11), 2949-2966.
- PI, Y. L., and TRAHAIR, N. S. (1992). Prebuckling deflections and lateral buckling. II: Applications. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 118(11), 2967-2985.
- PI, Y.-L., and PAPANGELIS, J. P., and TRAHAIR, N. S. (1995). Prebuckling deformations and flexural-torcional buckling of arches. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 121(9), 1313-1322.
- PI, Y.-L., and TRAHAIR, N. S. (1996). In-plane inelastic buckling and strengths of steel arches. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 122(7), 734-747.
- PI, Y.-L., and TRAHAIR, N. S. (1998). Out-of-plane inelastic buckling and strength of steel arches. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 124(2), 174-183.

- PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T., FLANNERY, B. P. (1999) Numerical Recipes in C. Cambridge University Press, U.S.A.
- RAJASEKARAN, S., and PADMANABHAN, S. (1989). Equations of curved beams. *Journal of Engineering Mechanics*, ASME, 115(5), 1094-1111.
- RAO, B. S. R., and GOPALACHARAYULU, S., and SHUKLA, N. B. (1976). End effects in long curved beam. *Journal of Engineering Mechanics Division*, ASCE, 102(1), 19-29.
- ROWE, R. S. (1953). Amplification of stress in flexible steel arches. *Transactions*, ASCE, 910-925.
- RUTENBERG, A. (1979). Vibration properties of curved thin-walled beams. *Journal of Structural Division*, ASCE, 105(7), 1445-1455.
- SABIR, A. B., and LOCK, A. C. (1973). Large deflexion, geometrically non-linear finite element analysis of circular arches. *International Journal of Mechanics Science*, Vol. 15, 37-47.
- SAKIMOTO, T., and KOMATSU, S. (1982). Ultimate strength of arches with bracing systems. *Journal of Structural Division*, ASCE, 108(5), 1064-1076.
- SAKIMOTO, T., and KOMATSU, S. (1983). Ultimate strength formula for steel arches. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 109(3), 613-627.
- SAKIMOTO, T., and SAKATA, T. (1991). The out-of-plane buckling strength of through-type arches bridges. *Journal Construct. Steel Research*, 16, 307-318.
- SCHILDT, H. (1997) C Completo e Total. 3nd ed., Makron Books do Brasil Editora Ltda, Brasil.
- SCHMIDT, R., and DADEPPO, D. A. (1969). Buckling of deep arches at large deflections. *AIAA Journal*, 7(6), 1182-1183.
- SCHREYER, H. L., and MASUR, E. F. (1966). Buckling of shallow arches. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, 92(4), 1-19.
- SHAMES, I. H., DYM, C. L. (1991). Energy and Finite Element Methods in Structural Mechanics. Taylor & Francis, U.S.A.
- SHANMUGAM, N. E., and THEVENDRAN, V., and LIEW, J. Y. R., and TAN, L. O. (1995). Experimental study on steel beams curved in plan. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 121(2), 249-259.
- SHARIFI, P., and POPOV, E. P. (1971). Nonlinear buckling analysis of sandwich arches. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, 97(5), 1397-1412.

- SHEINMAN, I. (1980). Dynamic large-displacement analysis of curved beams involving shear deformation. *International Journal of Solids Structures*, Vol. 16, 1037-1049.
- SHEINMAN, I. (1982). Large deflection of curved beam with shear deformation. *Journal of Engineering Mechanics Division*, ASCE, 108(4), 636-647.
- SHUKLA, S. N., and OJALVO M. (1971). Lateral buckling of parabolic arches with tilting loads. *Journal of Structural Division*, ASCE, 97(6), 1763-1773.
- SMITH, C. V., and SIMITSES, G. J. (1969). Effect of shear and load behavior on ring stability. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, 95(3), 559-569.
- SUTJAHJO, E., and MORRIS, R. (1988). Integrated bending field finite element for curved beams. *Journal of Engineering Mechanics*, ASME, 114(9), 1497-1511.
- THASANATORN, C., and PILKEY, W. D. (1979). Torsional stresses in circular curved bars. *Journal of Structural Division*, ASCE, 105(11), 2327-2342.
- THOMPSON, J. M. T., and HUNT, G. W. (1983). On the buckling and imperfection-sensitivity of arches with or without prestress. *International Journal of Solids Structures*, Vol. 19, 445-459.
- TIMOSHENKO, S. P., and GERE, J. M. (1961). *Theory of Elastic Stability*. 2nd ed., Mc Graw-Hill, New York.
- TIMOSHENKO, S. P., and KRIEGER, S. W. (1989). *Theory of plates and shells*. 2nd ed., Mc Graw-Hill, Singapore.
- TOKARZ, F. J. (1971). Experimental study of lateral buckling of arches. *Journal of Structural Division*, ASCE, 545-559.
- TOKARZ, F. J., and SANDHU, R. S. (1972). Lateral-torsional buckling of parabolic arches. *Journal of Structural Division*, ASCE, 98(5), 1161-1179.
- TRAHAIR, N. S., and PAPANGELIS, J. P. (1987). Flexural-torsional buckling of monosymmetric arches. *Journal of Engineering Mechanics Division*, ASCE, 113(10), 2271-2288.
- TRAHAIR, N. S., and WOOLCOCK, S. T. (1973). Effect of major axis curvature on I-beam stability. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, 99(1), 85-97.
- USAMI, T., and KOH, S. Y. (1980). Large displacement theory of thin-walled curved members and its application to lateral-buckling analysis of circular arches. *International Journal of Solids and Structures*, 16, 71-95.

- VACHARAJITTIPHAN, P., and TRAHAIR, N. S. (1975). Flexural-torsional buckling of curved arches. *Journal of Structural Division*, ASCE, 101(6), 1223-1238.
- WALKER, A. C. (1969). A non-linear finite element analysis of shallow circular arches. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 5, 97-107.
- WANG, T.-M., and CHURCH, D. C. (1967). Analysis of continuous arch frames. *Journal of the Structural division*, ASCE, 93(5), 419-433.
- WANG, T.-M., and MERRILL, T. F. (1988). Stiffness coefficients of noncircular curved beams. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 114(7), 1689-1699.
- WANG, T.-M., and MERRILL, T. F. (1992). Fixed-end moments and thrusts of planar curved beams. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 118(1), 324-331.
- WEN, R. K., and LANGE, J. (1981). Curved beam element for arch buckling analysis. *Journal of Structural Division*, ASCE, 107(11), 2053-2059.
- WEN, R. K., and SUHENDRO, B. (1991). Nonlinear curved-beam element for arch structures. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 117(11), 3496-3515.
- WIESINGER, F. P., and GUELL, D. L. (1963). Analysis of arch frames. *Journal of the Structural division*, ASCE, 89(5), 15-33.
- WOLDE-TINSAE, A. M., and ASSAAD, M. C. (1984). Nonlinear stability of prebuckled tapered arches. *Journal of Engineering Mechanics*, ASME, 110(1), 84-94.
- WOUDE, F. V., and COUSINS, B. F. (1979). Deformation of arches: elastic buckling behavior. *Journal of Structural Division*, ASCE, 102(12), 2677-2694.
- WU, C.-H. (1968). The strongest circular arch – a perturbation solution. *Journal of Applied Mechanics*, ASME, 476-480.
- XU, Z., and MIRMIRAN, A. (1997). Looping behavior of arches using corotational finite element. *Computers & Structures*, 62(2), 1059-1071.
- YABUKI, T., and VINNAKOTA, S., and KURANISHI, S. (1986). Fixed-end restraint effect on steel arch strength. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 112(4), 653-664.
- YANG, Y., and KUO, S., and CHERNG, Y. (1989). Curved beam elements for nonlinear analysis. *Journal of Engineering Mechanics*, ASME, 115(4), 840-855.
- YANG, Y.-B., and KUO, S.-R. (1986). Static stability of curved thin-walled beams. *Journal of Engineering Mechanics*, ASME, 112(8), 821-841.

- YANG, Y.-B., and KUO, S.-R. (1987). Effect of curvature on stability of curved beams. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 113(6), 1185-1202.
- YANG, Y.-B., and KUO, S.-R., and YAU, J.-D. (1991). Use of straight-beam approach to study buckling of curved beams. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 117(7), 1963-1978.
- YOO, C. H. (1979). Matrix formulation of curved beams. *Journal of Engineering Mechanics Division*, ASCE, 105(6), 971-988.
- YOO, C. H. (1982). Flexural-torsional stability of curved beams. *Journal of Engineering Mechanics Division*, ASCE, 108(6), 1351-1369.
- YOO, C. H., and FEHRENBACH, J. P. (1981). Natural frequencies of curved girders. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, 107(2), 339-354.
- YOO, C. H., and KANG, Y. J., and DAVIDSON, J. S. (1996). Buckling analysis of curved beams by finite-element discretization. *Journal of Engineering Mechanics*, ASME, 122(8), 762-770.
- YOO, C. H., and PFEIFFER, P. A. (1983). Elastic stability of curved members. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 109(12), 2922-2940.
- YOO, C. H., and PFEIFFER, P. A. (1984). Buckling of curved beams with in-plane deformation. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 100(2), 291-300.
- YOSHIDA, H., and MAEGAWA, K. (1983). Ultimate strength analysis of curved I-beams. *Journal of Engineering Mechanics*, ASME, 109(1), 192-214.