



UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO  
ESCOLA DE MINAS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

---



Lorrany Miquelante Yoshida

**ESTUDO COMPARATIVO DE TÉCNICAS DE IDENTIFICAÇÃO MODAL NO  
DOMÍNIO DO TEMPO APLICADAS A ESTRUTURAS DE ENGENHARIA CIVIL**

Ouro Preto  
2016

Lorrany Miquelante Yoshida

**ESTUDO COMPARATIVO DE TÉCNICAS DE IDENTIFICAÇÃO MODAL NO  
DOMÍNIO DO TEMPO APLICADAS A ESTRUTURAS DE ENGENHARIA CIVIL**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte integrante dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, área de concentração: Construção Metálica.

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Abrahão Cury

Ouro Preto  
2016

Y655e

Yoshida, Lorrany Miquelante.

Estudo comparativo de técnicas de identificação modal no domínio do tempo aplicadas a estruturas de engenharia civil [manuscrito] / Lorrany Miquelante Yoshida. - 2016.

98f.: il.: color; grafs; tabs.

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Abrahão Cury.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de Minas. Departamento de Engenharia Civil. Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil.

Área de Concentração: Construção Metálica.

1. Dinamica estrutural. 2. Analise modal. 3. Dinâmica do tempo. I. Cury, Alexandre Abrahão. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Titulo.

CDU: 624.04

Catálogo: [www.sisbin.ufop.br](http://www.sisbin.ufop.br)

# ESTUDO COMPARATIVO DE TÉCNICAS DE IDENTIFICAÇÃO MODAL NO DOMÍNIO DO TEMPO APLICADAS A ESTRUTURAS DE ENGENHARIA CIVIL

**AUTORA: LORRANY MIQUELANTE YOSHIDA**

Esta dissertação foi apresentada em sessão pública e aprovada em 18 de março de 2016, pela Banca Examinadora composta pelos seguintes membros:



Prof. Alexandre Abrahão Cury, D.Sc. – UFOP (Presidente)



Prof. Gustavo Paulinelli Guimarães, D.Sc – UFOP



Prof. Cláudio José Martins, D.Sc – CEFET-MG

*Dedicado à minha querida família, em especial ao anjinho Otávio.*

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço, primeiramente, a Deus por me dar força e coragem quando preciso.

A minha família e ao Wallace pelo apoio

A todos os professores do PROPEC, em especial ao Professor Alexandre, pela paciência e dedicação.

Ao meu cunhado Vinícius, por estar sempre disposto a me auxiliar.

E finalmente, agradeço a todos os meus colegas de mestrado por enfrentarem essa jornada comigo, em especial Fabrício, Keoma, Luís e Marielle.

*Quanto mais aumenta nosso conhecimento,  
mais evidente fica nossa ignorância.  
John F. Kennedy*

## RESUMO

O monitoramento dinâmico na área da Engenharia Civil desempenha um papel muito importante no que diz respeito à manutenção de estruturas, tais como: pontes, barragens, estádios e estruturas *offshore*. Esse monitoramento é normalmente realizado a partir da análise das respostas das estruturas quando submetidas a ensaios de vibração e devidas, também, às ações ambientais.

Quando o monitoramento dinâmico é feito a partir da análise das respostas submetidas à vibração forçada das estruturas, normalmente faz-se necessária a interrupção do seu funcionamento operacional. Em contrapartida, quando estas estão sujeitas às ações ambientais (tráfego de veículos, vento, entre outros), essa interrupção não é necessária na maioria dos casos.

De maneira geral, o monitoramento dinâmico se faz a partir do acompanhamento dos parâmetros modais que são as frequências naturais, as taxas de amortecimento e os modos de vibração.

Os ensaios estruturais, geralmente, nos fornecem medidas dinâmicas em função do tempo, como é o caso das acelerações, dos deslocamentos, das deformações, etc. Este fato motiva o desenvolvimento de técnicas de identificação modal que trabalham diretamente com estas medidas, eliminando assim possíveis erros gerados pela integração numérica, quando se passa do domínio do tempo para outros domínios.

Este trabalho tem por objetivo realizar uma análise comparativa de algumas técnicas de identificação modal no domínio do tempo, existentes na literatura, utilizadas para a identificação modal de estruturas. Dentre elas, podemos citar: Método do Decremento Aleatório (RD) associado ao Método de Ibrahim (ITD) e o Método das Realizações Estocásticas (SSI). Com o intuito de avaliar estes métodos e compará-los, foram utilizados dados de simulações numéricas e de ensaios experimentais realizados em estruturas de pequeno e grande porte.

Pretende-se, ao final deste trabalho, destacar a técnica mais robusta para identificação modal experimental de estruturas no que concerne à menor sensibilidade a efeitos externos, tais como a presença de ruídos nos sinais de vibração registrados e ao tipo de excitação atuante sobre a estrutura.

**Palavras-chave:** Dinâmica das Estruturas; Métodos de Identificação Modal; Domínio do Tempo.

## ABSTRACT

In Civil Engineering, dynamic monitoring has a very important role to the maintenance of structures such as bridges, dams, stadiums and offshore structures. The monitoring procedure is usually done by the analysis of the structures' results when subjected to vibration tests and also environmental effects.

If the dynamic monitoring is performed when the structure is under forced vibration, it is usually necessary to interrupt its operation. In contrast, when the structure is subjected to environmental action (vehicle traffic, wind, etc.) the interruption is not necessary in most cases.

In general, the dynamic monitoring is done by the monitoring of modal parameters, which are the natural frequencies, damping ratios and mode shapes.

Generally, the structural tests provide the dynamic measurements in function of time, like the accelerations, the displacements, the deformations, etc. This fact motivates the development of modal identification techniques that work directly with these measurements, thus eliminating possible numerical integration errors. These errors are generated by the numerical integration, when we transform the time domain for others domains.

This study aims to conduct a comparative analysis of some modal identification techniques in the time domain, which exist in the literature, used for modal identification of structures. Among them, we can mention Random Decrement Method (RD) associated with Ibrahim Method (IT) and the Stochastic Subspace Identification (SSI). In order to evaluate these methods and compare them, numerical simulations and experimental tests will be used.

Generally, the structural tests provide dynamic measurements in function of time, such as acceleration, displacements, deformations, etc. This fact motivates the development of modal identification techniques that Works directly with measures, eliminating some errors generated by numerical integration, when switching from the time domain to other domain.

The intention of this study is to show the most robust technique for experimental modal identification of structures with the respect to the lower sensitivity to external effects such as the presence of noise in the recorded vibration signals and the type of active excitation of the structure.

**Key Words:** Dynamics of structures; Modal Identification Methods, Time Domain.

## SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO .....	1
1.1 Considerações gerais.....	1
1.1.1 Equipamentos .....	3
1.2 Motivação.....	6
1.3 Objetivos.....	7
1.4 Apresentação.....	7
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	9
2.1 Transformada Rápida de Fourier .....	9
2.2 Método do decréscimo aleatório.....	10
2.3 Método de Ibrahim .....	20
2.4 Método da identificação estocástica em subespaços – Stochastic Subspaces Identification (SSI) .....	26
3 METODOLOGIA E RESULTADOS .....	33
3.1 Caso - Controle.....	34
3.1.1 Sinal sem ruído .....	34
3.1.2 Sinal com 10% de ruído .....	37
3.1.3 Sinal com 20% de ruído .....	41
3.2 Viga biapoiada .....	44
3.2.1 Ensaio com vibrações aleatórias .....	46
3.2.2 Ensaio de impacto .....	52
3.3 Ponte PI – 57 sobre o rio Oise .....	57
3.4 Viaduto Ferroviário PK 075 + 317 .....	68
4 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES.....	83
REFERÊNCIAS.....	85

# CAPÍTULO 1

## 1 INTRODUÇÃO

O monitoramento de estruturas de engenharia civil vem sendo cada vez mais utilizado no mundo, com o objetivo de proporcionar segurança aos usuários. O desempenho estrutural é baseado em valores medidos *in situ*, seguido de uma análise sistemática desses valores.

As técnicas de identificação modal são alguns dos meios de realizar esse monitoramento. Elas avaliam a “saúde” estrutural por meio de análises dos parâmetros modais (leia-se: frequências naturais, modos de vibração e taxas de amortecimento) obtidos como resposta das estruturas quando submetidas a ensaios de vibração e devidas, também, às ações ambientais.

As primeiras avaliações experimentais foram feitas no campo da engenharia mecânica, que utiliza estruturas geralmente de menor porte. Sendo assim, as avaliações experimentais das características dinâmicas dessas estruturas poderiam ser realizadas em laboratórios, em condições bem controladas; enquanto na engenharia civil, as estruturas possuem grandes dimensões, o que gera maiores dificuldades para excitação das mesmas.

Para a obtenção de tais respostas dinâmicas (*Output*) são necessários dados de entrada (*Input*), os quais são provocados por equipamentos de excitação. Estes são bastante caros e geralmente possuem grandes dimensões, o que dificulta a realização de ensaios. Esse tipo de avaliação é comumente denominado de Análise Modal Experimental (*EMA – Experimental Modal Analysis*) ou *Input-Output Modal Analysis*.

### 1.1 Considerações gerais

As estruturas que são analisadas experimentalmente ou por método numérico são chamadas de modelos modais. Eles são identificados por um conjunto de modos naturais de vibração, traduzidos em termos de suas frequências e taxas de amortecimento.

Grande parte das técnicas de ensaio para identificação modal envolvem uma força controlada ou um excitador (*shaker*) com frequências de excitação definidas. As respostas dinâmicas das estruturas em relação ao excitador são medidas com transdutores apropriados. Esta análise modal experimental com controle e medição das forças de excitação é conhecida como *identificação modal clássica* (Rodrigues, 2004). Por outro lado, há também a identificação modal estocástica, onde ações naturais como vento, sismos, tráfegos de veículos ou até mesmo carregamento humano induzem uma resposta dinâmica nas estruturas.

A avaliação dinâmica das estruturas é de suma importância para evitar catástrofes, como o famoso caso da ponte Tacoma Narrows, de Tacoma, nos Estados Unidos, que havia sido projetada baseada no tráfego de veículos, não levando em consideração a ação dos ventos. Nesse caso, a frequência natural do sistema mecânico coincidiu com a frequência de vibração de operação da ponte, causando o efeito físico conhecido como ressonância. Somada a isso, tinha-se a existência de uma força vertical exercida sobre os cabos e pilares, o que acabaram por provocar grandes oscilações na ponte até o seu colapso.

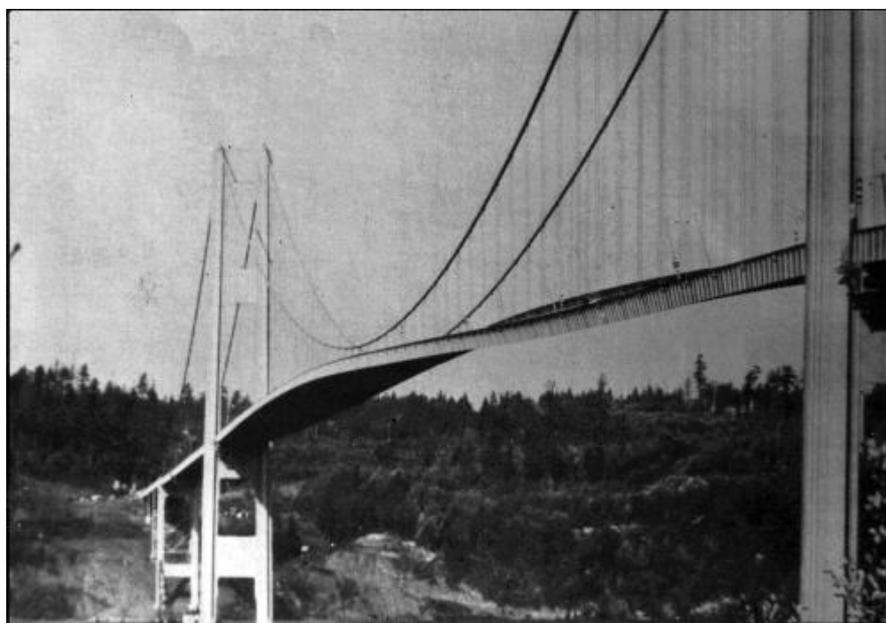


FIGURA 1 - Oscilações na Ponte Tacoma Narrows.

Para a realização de uma identificação modal clássica em uma estrutura é necessária, na maioria das vezes, a interrupção da estrutura ou de parte dela. No caso de uma ponte, por exemplo, o seu tráfego seria suspenso para a instalação de um excitador que, em geral, são máquinas grandes e caras, para simular o tráfego, o

vento, os sismos e obter dados de entrada para a análise. Esse processo gera custos e transtornos, o que levou ao desenvolvimento de análises nas quais as respostas dinâmicas são baseadas nas ações da sua própria utilização. Nesse caso, as respostas dinâmicas identificadas por vibrações ambientes não podem ser medidas experimentalmente, nem controladas, levando a assumir determinadas hipóteses quanto às suas características. Esse tipo de identificação modal recebeu o nome de *identificação modal estocástica*, onde se assume que as forças excitadoras são idealizáveis através de um processo estocástico gaussiano de tipo ruído branco (Rodrigues, 2004).

A identificação modal estocástica de sistemas estruturais pode ser realizada apenas por meio da sua resposta, tendo em vista a hipótese referida anteriormente, que diz respeito às características das ações ambiente. Em alguns casos, os ensaios são feitos em estruturas mais rígidas e podem apresentar respostas com amplitudes de vibração de nível muito baixo, pelo fato de não se ter o controle das forças de excitação. Por esse motivo, os equipamentos de medição utilizados em uma identificação modal estocástica necessitam ser mais sensíveis do que os de uma identificação modal clássica.

### **1.1.1 Equipamentos**

Para a realização de uma identificação modal clássica é necessário seguir as etapas abaixo:

- Instalação de um equipamento ou estrutura vibratória;
- Colocação dos transdutores ou sensores de vibração na estrutura em pontos adequados;
- Os transdutores ou sensores de vibração são conectados a um instrumento de aquisição de sinal;
- As respostas dinâmicas são apresentadas em um computador, onde também é possível controlar os parâmetros modais da máquina ou estrutura vibratória;

- Finalmente, é feita a análise de dados e extração dos parâmetros modais da estrutura.

Como dito anteriormente, na identificação modal estocástica não é necessária instalação de máquinas ou estruturas vibratórias; as ações ambientais e outros fatores, como é o caso do tráfego numa ponte, serão responsáveis por excitar a estrutura, com a “desvantagem” de não se conhecer esses dados dinâmicos.

A identificação modal pode ser feita por três tipos distintos, sendo eles: a vibração forçada, a vibração livre e a vibração ambiente, conforme podem ser observadas nas Figuras 2, 3 e 4 a seguir:

- Vibração forçada:



FIGURA 2 - Excitador servo hidráulico utilizado no EMPA. FONTE – CANTIENI, 2001.

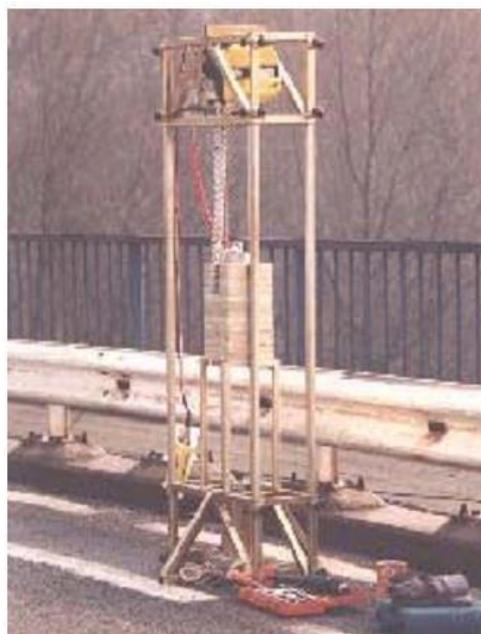


FIGURA 3 - Dispositivo de aplicação de impulsos na Universidade Católica de Leuven.

- Vibração Livre:

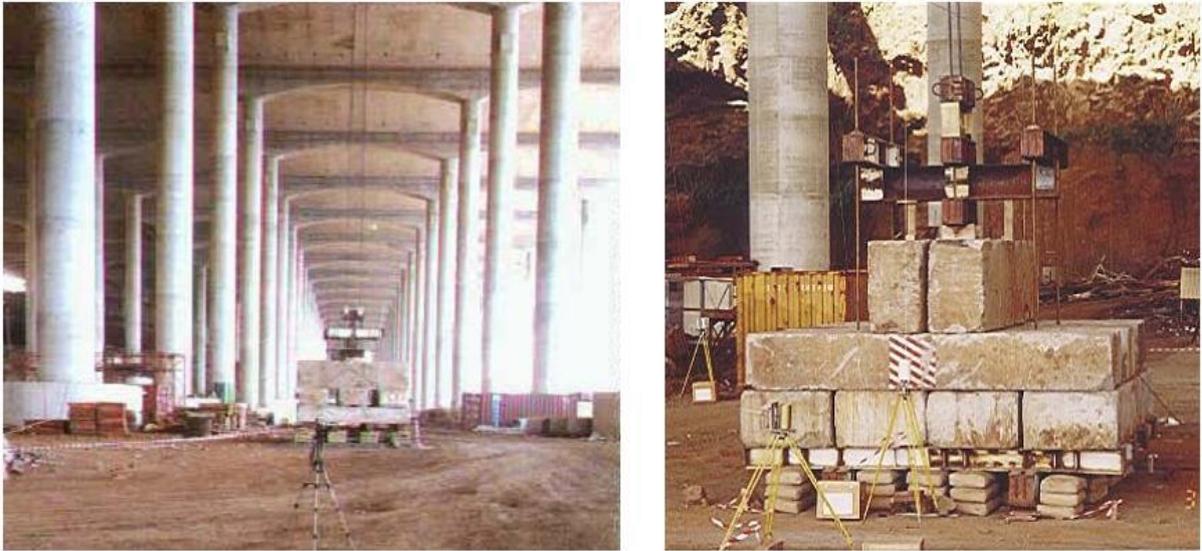


FIGURA 4 - Peso de 608 kN utilizado nos ensaios da estrutura de ampliação do aeroporto de Madeira.

- Vibração ambiente:



FIGURA 5 - Ponte da Amizade Foz do Iguaçu.

Os sensores ou transdutores utilizados na identificação modal são responsáveis por capturar a resposta dos sistemas estruturais e converter a resposta dos sistemas, que é dada em uma grandeza física, num sinal elétrico. Os tipos de sensores utilizados são: acelerômetros, transdutores de velocidade, transdutores de deslocamento, sistema GPS, micro-ondas, extensômetros, etc. Os transdutores devem ter uma boa sensibilidade e uma resposta em frequência pertinente com o que se quer medir. Os pontos de medição devem estar desobstruídos e serem

escolhidos da melhor forma possível para que não haja interferência na frequência. Dentre os transdutores citados, os que mais se destacam são:

- Flexímetros – Medem deslocamentos. São usados em ensaios estáticos ou dinâmicos de baixa velocidade e precisa de um ponto fixo. Geralmente, funcionam com o acoplamento de engrenagens, e apresentam mostradores digitais ou analógicos. São equipamentos bastante robustos (Barbosa, 2014).
- Extensômetros elétricos ou *Strain-Gages* – Medem deformações, podendo ser resistivos ou a base de cristais (piezoelétricos). O seu funcionamento é baseado em variações na sua resistência elétrica causadas por deformações impostas a esse sistema. Podem ser usados tanto em ensaios estáticos como dinâmicos (Barbosa, 2014).
- Acelerômetros – Medem acelerações. Apresentam resultados bastante confiáveis, mas a medição de deslocamentos considerando as acelerações nem sempre geram bons resultados, devido ao erro gerado pelas integrações numéricas (Barbosa, 2014).

Os acelerômetros ainda são divididos em: piezoelétricos, eletromecânicos, resistivos, capacitivos e sísmicos.

Alguns dos sensores citados anteriormente precisam de condicionamento de sinal, com o objetivo de efetuar uma medição de forma eficaz e exata. Algumas técnicas utilizadas para o condicionamento de sinais são: amplificação, atenuação, isolamento, filtragem, excitação, linearização, compensação de junção fria e configuração de ponte.

## **1.2 Motivação**

No Brasil, não é comum a prática de monitoramento estrutural para identificação modal. Interromper uma estrutura para que seja realizada a sua manutenção, de fato, gera transtornos; mas não tão grandes se comparados aos transtornos gerados pelo colapso de uma estrutura ou sua interdição por vibrações excessivas. Com a análise e a identificação das características modais, é possível

concluir sobre certas condições físicas de uma estrutura, como por exemplo, o grau de integridade, o estado de danos e seu nível de segurança (Cury, 2008).

A principal motivação desse trabalho é estudar alguns métodos de identificação modal que vêm sendo utilizados nos últimos anos e poder identificar o mais robusto em termos das estimativas das frequências naturais, modos de vibração e taxas de amortecimento. Pretende-se, também, verificar qual é o menos sensível à presença de ruído nos sinais registrados, bem como ao tipo de excitação aplicada sobre a estrutura.

### **1.3 Objetivos**

Atualmente, a literatura apresenta diferentes métodos para a identificação modal de estruturas, que consistem em identificar seus parâmetros modais. O presente trabalho terá como objetivo comparar algumas dessas técnicas, para avaliar, de um modo geral, qual a mais robusta em situações de monitoramento real e simulados numericamente.

As técnicas comparadas serão: Método do Decremento Aleatório associado ao Método de Ibrahim (RD + ITD) e Método de Identificação Estocástica em Subespaços (SSI-DATA). Como mencionado anteriormente, neste trabalho o Decremento Aleatório foi utilizado juntamente com Ibrahim. Este último funciona sozinho, mas não apresenta uma robustez considerável. Com isso, o RD foi utilizado como uma forma de “suavizar” as respostas dinâmicas.

### **1.4 Apresentação**

Esta dissertação é composta por 5 capítulos, incluindo o presente, o qual faz uma breve introdução do assunto que será discorrido. Também são apresentados a motivação e o objetivo deste trabalho.

No segundo capítulo, apresenta-se uma revisão bibliográfica da FFT e dos três métodos de identificação modal que foram estudados nessa dissertação: Método do Decremento Aleatório (*Random Decrement* – RD), Método de Ibrahim (ITD) e o Método de Identificação Estocástica em Subespaços (*Stochastic Subspaces Identification* – SSI).

No terceiro capítulo é apresentada a metodologia de identificação modal que foi seguida para desenvolvimento deste trabalho. Além disso, para fins de comparação entre as técnicas citadas anteriormente, dados de ensaios simulados numericamente e dados obtidos de ensaios experimentais de estruturas reais foram utilizados e geraram os resultados que estão reunidos no quarto capítulo desta dissertação.

Finalmente, a conclusão e as sugestões para trabalhos futuros são apresentadas no quarto capítulo.

# CAPÍTULO 2

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A literatura nos apresenta diversos tipos de algoritmos capazes de realizar o processo de estimativa dos parâmetros modais de uma estrutura. Estes algoritmos são divididos em dois grupos distintos de métodos: os métodos que trabalham no domínio da frequência e os métodos que trabalham no domínio do tempo. O primeiro trabalha a partir do espectro de frequências do sinal, enquanto o segundo recorre à própria série temporal deste sinal e realiza um ajuste destes dados a um modelo paramétrico (Cardoso, 2015).

Dentre os métodos que trabalham com o domínio da frequência, pode-se citar a FFT (*Fast Fourier Transform* – Transformada Rápida de Fourier), FDD (*Frequency Domain Decomposition* – Decomposição do Domínio da Frequência), EFDD (*Enhanced Frequency Domain Decomposition* – Decomposição do Domínio Avançado da Frequência) e P-LSCF (*Poly-reference Least Squares Complex Frequency Domain* – Domínio da Frequência de Poli-referência de Mínimos Quadrados). E como sendo pertencentes ao grupo do domínio do tempo pode-se citar o Método do Decremento Aleatório (RD), Método de Ibrahim (ITD) e a Identificação Estocástica em Subespaços (*Subspace Stochastic Identification* - SSI). Essas técnicas foram citadas em (Cardoso, 2015).

Primeiramente, foi utilizada a FFT (técnica que trabalha com o domínio do tempo) com a intenção de verificar o acelerômetro que melhor representou os picos de frequência. Em seguida, foram utilizadas técnicas de identificação modal que são amplamente utilizadas na identificação de sistemas estruturais no domínio do tempo e que se apresentam como RD, ITD e SSI. Que fique claro que as técnicas do domínio do tempo que são comparadas neste trabalho, sendo a FFT utilizada somente como um auxílio na identificação do melhor canal.

### 2.1 Transformada Rápida de Fourier

A transformada rápida de Fourier foi desenvolvida na década de 60 por J. W. Colley e J. W. Tukey, com a motivação inicial de criar um algoritmo que permitisse

acelerar o processamento da interpolação de uma grande quantidade de dados por polinômios trigonométricos. A interpolação de  $2m$  pontos de dados pelo cálculo direto necessita de algo em torno de  $4m^2$  multiplicações e o mesmo número de adições. Quando se faz necessário cálculos com milhares de pontos são gerados milhões de operações, onde podem surgir vários erros de arredondamento (Gonçalves, 2004).

A FFT é um algoritmo que economiza custo computacional, pois ele possibilita a diminuição do tempo de processamento em aplicações que variam desde resolução de equações diferenciais, equações integrais, problemas inversos até a inclusão da teoria dos números (Gonçalves, 2004).

Essencialmente, a transformada de Fourier é uma ferramenta matemática que realiza a transição entre as variáveis tempo e frequência de sinais. Ela existe na forma discreta (DFT, do inglês “*Discrete Fourier Transform*”) e a FFT é um algoritmo rápido utilizado para calcular a DFT.

Seja uma sequência  $x_m$  que represente  $N$  amostras consecutivas de um sinal contíguo  $x(t)$ . A transformada discreta de Fourier (DFT) de  $N$  termos é definida por:

$$\bar{X}_k = \sum_{m=0}^{N-1} x_m W^{mk}, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (2.1)$$

onde,  $W = e^{-i\left(\frac{2\pi}{N}\right)}$ ,  $i = \sqrt{-1}$ .

## 2.2 Método do decremento aleatório

Neste tópico será discutido sobre o método do decremento aleatório. O texto a seguir foi baseado na referência (Rodrigues, 2004).

O método do decremento aleatório ou RD (*Random Decrement*) foi proposto por Cole (1968) em trabalhos realizados na NASA (*National Aeronautics and Space Administration* – Administração Nacional da Aeronáutica e Espaço). Esses trabalhos abordavam a caracterização dinâmica e detecção de danos em estruturas aeroespaciais em condições normais de operação. Assim como Cole, outros autores se dedicaram ao estudo do RD ao longo dos anos, por exemplo, Ibrahim (1977,

1979, 2001), Vandiver *et al.* (1982), Yang *et al.* (1990), Brincker *et al.* (1991, 1992) e Asmussen (1997).

O método do decremento aleatório pode ser utilizado para avaliar as funções de correlação, com as médias de amostras obtidas como resposta das ações ambientais. A partir da formulação dessas funções é possível obter os parâmetros modais da estrutura, assumindo-se a resposta em vibrações livres do sistema. Sendo assim, este é considerado um método simples, direto e com um tempo de processamento relativamente pequeno. As funções obtidas com o método RD são denominadas de funções RD ou funções de Decremento Aleatório.

Inicialmente, as funções RD foram obtidas como respostas dos sistemas estruturais em regime livre. Cole (1968) apresentou a justificativa seguinte para fundamentar o método:

A resposta de um sistema estrutural a ações de tipo aleatório num determinado instante  $t + t_0$  pode ser considerada como sendo composta por três parcelas: 1) a resposta devida aos deslocamentos iniciais; 2) a resposta devido às velocidades iniciais; 3) a resposta às ações aleatórias desde o instante  $t_0$  até o instante  $t + t_0$ . Se dos registros da resposta total forem extraídas amostras sempre com o mesmo deslocamento inicial e se for feita uma média dessas amostras, à medida que o número dessas amostras aumenta, a parcela 3) da resposta vai-se anulando e tendendo a desaparecer; a parcela 2) também tenderá a anular-se uma vez que a velocidade inicial variará aleatoriamente nas diversas amostras; restará assim a parcela 1) ou seja, a resposta em vibrações livres devida aos deslocamentos iniciais.

Cole (1968), em seus primeiros trabalhos desenvolvidos sobre o método do decremento aleatório referia-se somente à análise de um único registro de resposta. A análise de situações em que a resposta é constituída por vários pontos de um sistema estrutural pôde ser feita com a técnica de Ibrahim (1977), que apresentou os conceitos de *autofunções RD* e de *funções RD cruzadas*, o que possibilitou a utilização de funções RD não apenas para avaliação das frequências naturais de vibrações e coeficientes de amortecimento, como também das componentes modais nos pontos instrumentados.

Vandiver *et al.* (1982) estabeleceram a relação entre as funções de correlação e as funções RD, confirmando que as autofunções RD (apenas um registro de resposta) são proporcionais às funções de auto correlação, quando se faz o uso da condição de passagem por um nível (que será descrito logo a seguir) para processos estocásticos gaussianos de média nula. Posteriormente, Brincker *et al.* (1992) apresentaram a definição de uma condição inicial generalizada e observaram a relação das funções RD com as funções de correlação e com as suas primeiras derivadas em ordem ao tempo.

*Definição das funções de decremento aleatório:*

Tendo em vista dois processos estocásticos estacionários  $x(t)$  e  $y(t)$ , as respectivas autofunções RD são definidas como o valor possível sob a condição  $T$ , indicado nas expressões (2.2) a seguir:

$$D_{xx}(\tau) = E[x(t + \tau)|T_{x(t)}] \quad D_{yy}(\tau) = E[y(t + \tau)|T_{y(t)}] \quad (2.2)$$

onde:

$E$  – representa o valor médio condicional do processo,

$T$  – é a condição de desencadeamento e

$\tau$  – é a variação de tempo

O primeiro índice das funções RD se refere ao processo do qual a média é calculado e o segundo se refere ao processo em que a condição é satisfeita.

As respectivas funções RD cruzadas são:

$$D_{xy}(\tau) = E[x(t + \tau)|T_{y(t)}] \quad D_{yx}(\tau) = E[y(t + \tau)|T_{x(t)}] \quad (2.3)$$

Os processos estocásticos são estacionários e ergódicos, situação em que os seus históricos independem das condições iniciais. Assim, as funções de RD podem ser estimadas como:

$$\widehat{D}_{XX}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X(t_i + \tau) | T_{X(t)} \quad (2.4)$$

$$\widehat{D}_{YY}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y(t_i + \tau) | T_{Y(t)}$$

$$\widehat{D}_{XY}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X(t_i + \tau) | T_{Y(t)} \quad (2.5)$$

$$\widehat{D}_{YX}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y(t_i + \tau) | T_{X(t)}$$

onde,  $N$  é o número de pontos iniciais.

Um das vantagens do método do decrémento aleatório é que as estimativas das funções RD, mostradas pelas expressões (2.4) e (2.5) são estimativas não enviesadas (Brincker *et al.* 1992; Asmussen, 1997).

O número de pontos iniciais  $N$  é um fator importante do método do decrémento aleatório; ele é determinado pelos limites estabelecidos para obter as condições iniciais.

#### *Condição inicial não generalizada*

Como mostrado anteriormente, as funções RD são calculadas como uma média de amostras dos registros de resposta, a partir de uma condição inicial  $T$ . De forma a abranger as diferentes condições iniciais que são utilizadas na prática, pode-se definir essa condição inicial como uma forma generalizada  $T^G$ . A condição inicial generalizada para um processo estacionário gaussiano de média nula,  $x(t)$ , é representada por:

$$T_{x(t)}^G = \{a_1 \leq x(t) < a_2, b_1 \leq \dot{x}(t) < b_2\} \quad (2.6)$$

Com a condição inicial generalizada (2.6) torna-se possível observar que as funções RD são iguais a uma soma ponderada das funções de correlação e das suas primeiras derivadas em ordem ao tempo; como é mostrado a seguir:

$$D_{xx}(\tau) = \frac{R_{xx}(\tau)}{\sigma_x^2} \tilde{a} - \frac{\dot{R}_{xx}(\tau)}{\sigma_x^2} \tilde{b} \quad (2.7)$$

$$D_{yx}(\tau) = \frac{R_{yx}(\tau)}{\sigma_x^2} \tilde{a} - \frac{\dot{R}_{yx}(\tau)}{\sigma_x^2} \tilde{b} \quad (2.8)$$

A seguir são apresentadas as quatro condições iniciais que geralmente são utilizadas no método do decremento aleatório:

- condição inicial de passagem por um nível;
- condição inicial de máximos locais;
- condições iniciais de pontos positivos e
- condição inicial de passagem por zero com inclinação positiva.

#### *Condição inicial de passagem por um nível*

A condição inicial de passagem por um nível é a mais comumente utilizada no método do decremento aleatório e pode ser definida por:

$$T_{x(t)}^L = \{x(t) = a\} \quad (2.9)$$

A condição inicial de passagem por um nível também pode ser definida como um caso particular da condição inicial generalizada (2.6), onde  $[a_1 \ a_2] = [a \ a + \Delta a](\Delta a \rightarrow 0)$  e  $[b_1 \ b_2] = [-\infty \ +\infty]$ . Assim, tem-se:

$$T_{x(t)}^L = \{a \leq x(t) < a + \Delta a, -\infty \leq \dot{x}(t) < +\infty\}, \quad \Delta a \rightarrow 0 \quad (2.10)$$

As funções RD, para este caso, são proporcionais às funções de correlação para processos estocásticos de média nula, como é mostrado pela expressão (2.11) a seguir:

$$D_{xx}(\tau) = \frac{R_{xx}(\tau)}{\sigma_x^2} a \quad D_{yx}(\tau) = \frac{R_{yx}(\tau)}{\sigma_x^2} a \quad (2.11)$$

Considerando um caso não muito comum na prática para a condição inicial de passagem por um nível, que seria assumir as amostras consideradas para estimar as funções RD independentes entre si, a variância na estimativa das funções RD pode ser calculada por meio de (Asmussen, 1997):

$$Var[\widehat{D}_{xx}(\tau)] \approx \frac{\sigma_x^2}{N} \left( 1 - \left( \frac{R_{xx}(\tau)}{\sigma_x^2} \right)^2 \right) \quad (2.12)$$

$$Var[\widehat{D}_{yx}(\tau)] \approx \frac{\sigma_y^2}{N} \left( 1 - \left( \frac{R_{yx}(\tau)}{\sigma_y \sigma_x} \right)^2 \right)$$

O valor do número de pontos iniciais  $N(a)$ , para a condição inicial de passagem por um nível pode ser obtida por meio de (Asmussen, 1997):

$$E[N(a) = \Delta t(N_x - N_\tau) \frac{1}{\pi} \frac{\sigma_x}{\sigma_x} e^{\left( \frac{a^2}{2\sigma_x^2} \right)} \quad (2.13)$$

onde:  $\Delta t$  é o intervalo de tempo de amostragem das séries observadas;

$N_x$  é o número de pontos das séries observadas;

$N_\tau$  é o número de pontos das funções RD.

O nível  $a$  é definido como um múltiplo do desvio padrão da série que está a ser analisada, por exemplo,  $a = 1\sigma_x$  ou  $a = 2\sigma_x$ . De acordo com Asmussen (1997), o nível ótimo que deve ser considerado, levando em consideração a minimização da variância das funções RD, é  $a = \sqrt{2\sigma_x}$ .

Na Figura 6 a seguir são mostrados os pontos iniciais selecionados de acordo com a aplicação do método de passagem por um nível:

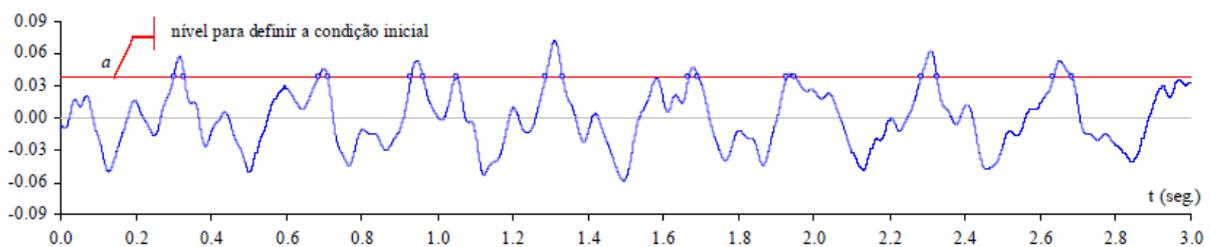


FIGURA 6 - Pontos iniciais definidos através da condição inicial de passagem por um nível. FONTE – JORGE RODRIGUES, 2004.

Condição inicial de máximos locais:

Os pontos de máximo locais de um processo são os pontos iniciais. Esta condição inicial pode ser expressa através de:

$$T_{x(t)}^E = \{a_1 \leq x(t) < a_2, \dot{x}(t) = 0\}, \quad 0 \leq a_1 < a_2 \quad (2.14)$$

A condição inicial de máximos locais também pode ser expressa como uma caso particular da condição inicial generalizada, em que, normalmente, se considera  $[a_1 \ a_2] = [a_1 \ a_2]$  e  $[b_1 \ b_2] = [0 \ 0 + \Delta b]$  ( $\Delta b \rightarrow 0$ ), ou seja:

$$T_{x(t)}^E = \{a_1 \leq x(t) < a_2, 0 \leq \dot{x}(t) < 0 + \Delta b\}, \quad \Delta b \rightarrow 0 \quad (2.15)$$

Na Figura 7 a seguir é representado os pontos iniciais seleccionados através da aplicação do método dos máximos locais, considerando  $[a_1 \ a_2] = [0 \ +\infty]$ , que é a opção mais usual para essa condição inicial (Jorge Rodrigues, 2004):

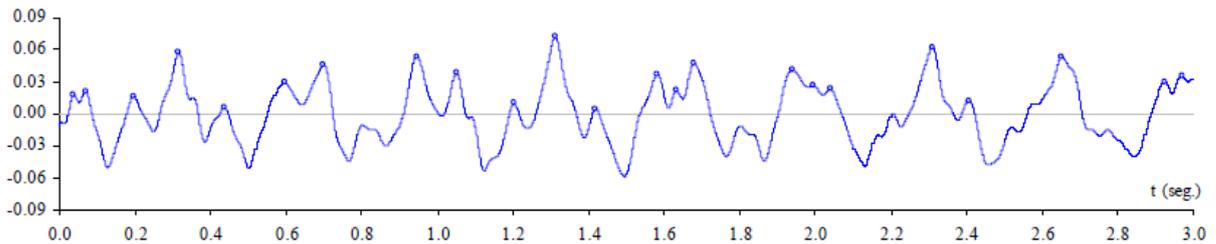


FIGURA 7 - Pontos iniciais definidos através da condição de máximos locais. FONTE – JORGE RODRIGUES, 2004.

As funções RD também são proporcionais às funções de correlação para processos estocásticos estacionários de média nula na condição de máximos locais, como é possível ver a seguir:

$$D_{xx}(\tau) = \frac{R_{xx}(\tau)}{\sigma_x^2} \tilde{a} \quad (2.16)$$

$$D_{yx}(\tau) = \frac{R_{yx}(\tau)}{\sigma_x^2} \tilde{a}$$

De acordo com Asmussem (1997), a variância na estimativa das funções RD no caso da condição inicial de máximos locais, considerando que as amostras utilizadas para estimar as funções RD são independentes entre si, pode ser dada por:

$$Var[\widehat{D}_{xx}(\tau)] \approx \frac{\sigma_x^2}{N} \left( 1 - \left( \frac{R_{xx}(\tau)}{\sigma_x^2} \right)^2 - \left( \frac{\dot{R}_{xx}(\tau)}{\sigma_x \sigma_{\dot{x}}} \right)^2 \right) + \frac{k^E}{N} \left( \frac{R_{xx}(\tau)}{\sigma_x^2} \right)^2 \quad (2.17)$$

$$Var[\widehat{D}_{yx}(\tau)] \approx \frac{\sigma_y^2}{N} \left( 1 - \left( \frac{R_{yx}(\tau)}{\sigma_y \sigma_x} \right)^2 - \left( \frac{\dot{R}_{yx}(\tau)}{\sigma_y \sigma_{\dot{x}}} \right)^2 \right) + \frac{k^E}{N} \left( \frac{R_{yx}(\tau)}{\sigma_y \sigma_x} \right)^2 \quad (2.18)$$

em que o valor de  $k^E$  é dado por:

$$k^E = \frac{\int_{a_1}^{a_2} x^2 p_x(x) dx}{\int_{a_1}^{a_2} p_x(x) dx} - \left( \frac{\int_{a_1}^{a_2} x p_x(x) dx}{\int_{a_1}^{a_2} p_x(x) dx} \right)^2 \quad (2.19)$$

De acordo com Asmussem (1997), para processos estocásticos gaussianos de banda estreita, o valor do número de pontos iniciais  $N(a_1, a_2)$  para a condição de máximos locais pode ser estimado por:

$$E[N(a_1, a_2)] = \Delta t (N_x - N_\tau) \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_x} \left( e^{\left( -\frac{a_1^2}{2\sigma_x^2} \right)} - e^{\left( -\frac{a_2^2}{2\sigma_x^2} \right)} \right) \quad (2.20)$$

*Condição inicial de pontos positivos:*

Nesta condição os pontos iniciais são seleccionados sempre que se encontrarem entre os limites estabelecidos com o mesmo sinal, como na Figura 8 abaixo, os limites são  $a_1$  e  $a_2$ .

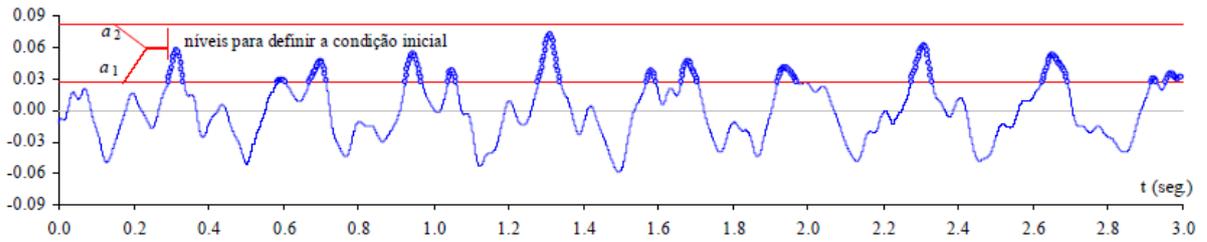


FIGURA 8 - Pontos iniciais definidos pelo método da condição inicial de pontos positivos. FONTE – JORGE RODRIGUES, 2004.

A condição inicial de pontos positivos pode ser expressa por:

$$T_{x(t)}^P = \{a_1 \leq x(t) < a_2\}, 0 \leq a_1 < a_2 \quad (2.21)$$

Que também pode ser expressa como um caso particular da condição generalizada:

$$T_{x(t)}^P = \{a_1 \leq x(t) < a_2, -\infty \leq \dot{x}(t) < +\infty\}, 0 \leq a_1 < a_2 \quad (2.22)$$

As funções RD também são proporcionais às funções de correlação para processos estocásticos estacionários de média nula na condição inicial de pontos positivos, como é possível ver a seguir:

$$D_{xx}(\tau) = \frac{R_{xx}(\tau)}{\sigma_x^2} \tilde{a}$$

$$D_{yx}(\tau) = \frac{R_{yx}(\tau)}{\sigma_x^2} \tilde{a} \quad (2.23)$$

De acordo com Asmussem (1997), a variância na estimativa das funções RD no caso da condição inicial de pontos positivos, considerando que as amostras utilizadas para estimar as funções RD são independentes entre si, pode ser dada por:

$$Var[\hat{D}_{xx}(\tau)] \approx \frac{\sigma_x^2}{N} \left( 1 - \left( \frac{R_{xx}(\tau)}{\sigma_x^2} \right)^2 \right) + \frac{k^P}{N} \left( \frac{R_{xx}(\tau)}{\sigma_x^2} \right)^2 \quad (2.24)$$

$$Var[\hat{D}_{yx}(\tau)] \approx \frac{\sigma_y^2}{N} \left( 1 - \left( \frac{R_{yx}(\tau)}{\sigma_x \sigma_y} \right)^2 \right) + \frac{k^P}{N} \left( \frac{R_{xx}(\tau)}{\sigma_x \sigma_y} \right)^2 \quad (2.25)$$

em que o valor  $k^P$  é dado por:

$$k^P = \frac{\int_{a_1}^{a_2} x^2 p_x(x) dx}{\int_{a_1}^{a_2} p_x(x) dx} - \left( \frac{\int_{a_1}^{a_2} x p_x(x) dx}{\int_{a_1}^{a_2} p_x(x) dx} \right)^2 \quad (2.26)$$

De acordo com Asmussem (1997), para processos estocásticos gaussianos de banda estreita, o valor do número de pontos iniciais  $N(a_1, a_2)$  para a condição inicial de pontos positivos pode ser estimado por:

$$E[N(a_1, a_2)] = \Delta t (N_x - N_\tau) \int_{a_1}^{a_2} p_x(x) dx \quad (2.27)$$

*Condição inicial de passagem por zero com inclinação positiva:*

Nesta condição, os pontos iniciais são selecionados quando o processo passa por zero com inclinação positiva, como é mostrado na Figura 9 a seguir:

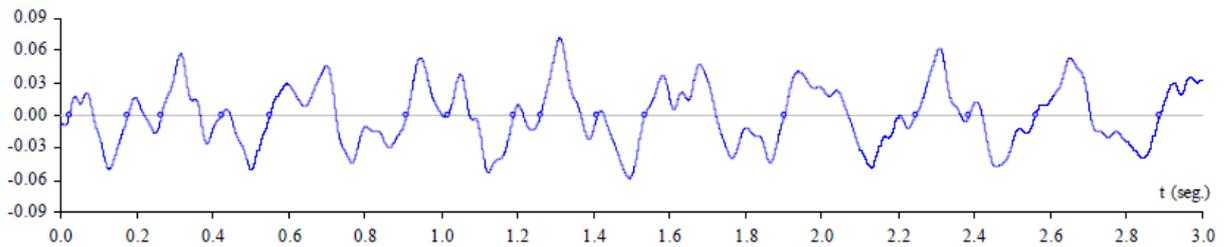


FIGURA 9 - Pontos iniciais definidos através da condição inicial de passagem por zero com inclinação positiva. FONTE - JORGE RODRIGUES, 2004.

A condição inicial de passagem por zero com inclinação positiva pode ser expressa como:

$$T_{x(t)}^Z = \{x(t) = 0, \dot{x}(t) \geq 0\} \quad (2.28)$$

Que também pode ser expressa como um caso particular da condição generalizada:

$$T_{x(t)}^Z = \{0 \leq x(t) < 0 + \Delta a, 0 \leq \dot{x}(t) < +\infty\}, \quad \Delta a \rightarrow 0 \quad (2.29)$$

As funções RD também são proporcionais às funções de correlação para processos estocásticos estacionários de média nula na condição inicial de passagem por zero com inclinação positiva, como é possível ver a seguir:

$$D_{xx}(\tau) = -\frac{R_{xx}(\tau)}{\sigma_x^2} \tilde{b} \quad (2.30)$$

$$D_{yx}(\tau) = -\frac{R_{yx}(\tau)}{\sigma_x^2} \tilde{b}$$

De acordo com Asmussem (1997), a variância na estimativa das funções RD no caso da condição inicial de passagem por zero com inclinação positiva, considerando que as amostras utilizadas para estimar as funções RD são independentes entre si, pode ser dada por:

$$Var[\hat{D}_{xx}(\tau)] \approx \frac{\sigma_x^2}{N} \left( 1 - \left( \frac{R_{xx}(\tau)}{\sigma_x^2} \right)^2 \right) - \frac{2}{\pi} \left( \frac{\dot{R}_{xx}(\tau)}{\sigma_x \sigma_{\dot{x}}} \right)^2 \quad (2.31)$$

$$Var[\hat{D}_{yx}(\tau)] \approx \frac{\sigma_y^2}{N} \left( 1 - \left( \frac{R_{yx}(\tau)}{\sigma_x \sigma_y} \right)^2 \right) + \frac{2}{\pi} \left( \frac{\dot{R}_{yx}(\tau)}{\sigma_x \sigma_y} \right)^2 \quad (2.32)$$

De acordo com Asmussem (1997), para processos estocásticos gaussianos de banda estreita, o valor do número de pontos iniciais  $N(a_1, a_2)$  para a condição inicial de pontos positivos pode ser estimado por:

$$E[N(0)] = \Delta t (N_x - N_\tau) \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_x} \quad (2.33)$$

### 2.3 Método de Ibrahim

O texto sobre o método de Ibrahim foi baseado na dissertação de Cury, 2008.

O método de Ibrahim, utilizado juntamente com as funções de RD, nos permite conhecer as características modais da estrutura, que são: frequências naturais, amortecimento e modos de vibração. Isso ocorre devido à

proporcionalidade das funções de RD com as funções de correlação, que são equivalentes às respostas em vibração livre do sistema.

O método de Ibrahim é uma técnica de identificação modal baseada no tempo e em duas matrizes deduzidas a partir da resposta transiente do sistema.

Uma estrutura em vibração livre com N graus de liberdade medida na posição n e no tempo t<sub>j</sub> fornece uma resposta que pode ser escrita através da fórmula seguinte:

$$x_n(t_j) = \sum_{r=1}^{2N} \phi_{nr} e^{S_r t_j} \quad (2.34)$$

onde:

$\phi_{nr}$  - é a n-ésima componente do r-ésimo autovetor e

$S_r$  - representa o r-ésimo par de raízes conjugadas do sistema, dado por:

$$S_r = a_r \pm ib_r = -\xi_r \omega_r \pm i \omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2} \quad (2.35)$$

onde:

$i = \sqrt{-1}$ ,  $\xi_r$  - é a r-ésima taxa de amortecimento,

$\omega_r$  - é a r-ésima frequência natural de vibração correspondente ao r-ésimo modo próprio de vibração.

Assumindo que a resposta do sistema seja tomada sob p pontos de medição em q intervalos de tempo, a equação (2.34) que define o número de pontos de desencadeamento máximo, para um limite  $[a_1 \ a_2] = [0 \ \infty]$ , para um sistema de dimensões p x q é dada por:

$$\begin{bmatrix} x_1(t_1) & x_1(t_2) & \cdots & x_1(t_q) \\ x_2(t_1) & x_2(t_2) & \cdots & x_2(t_q) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_p(t_1) & x_p(t_2) & \cdots & x_p(t_q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1 \ 2N} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2 \ 2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{p1} & \phi_{p2} & \cdots & \phi_{p \ 2N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{s_1 t_1} & e^{s_1 t_2} & \cdots & e^{s_1 t_q} \\ e^{s_2 t_1} & e^{s_2 t_2} & \cdots & e^{s_2 t_q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{s_{2N} t_1} & e^{s_{2N} t_2} & \cdots & e^{s_{2N} t_q} \end{bmatrix}$$

Ou, de forma reduzida,

$$\mathbf{X}_{(p \times q)} = \boldsymbol{\Phi}_{(p \times 2N)} \boldsymbol{\Lambda}_{(2N \times q)} \quad (2.36)$$

sendo:

X- a matriz de resposta (conhecida),

$\phi$  - a matriz de autovetores (desconhecida) e

$\Lambda$ - a matriz de autovalores (desconhecida) nos instantes  $t_j$  (conhecidos).

Um segundo sistema é formado a partir da Equação (2.34) defasada no tempo de um incremento  $\Delta t$ :

$$x_n(t_j + \Delta t) = \sum_{r=1}^{2N} \phi_{nr} e^{s_r(t_j + \Delta t)} \quad (2.37)$$

ou

$$\hat{x}_n(t_j) = \sum_{r=1}^{2N} \hat{\phi}_{nr} e^{s_r t_j} \quad (2.38)$$

sendo,

$$\hat{x}_n(t_j) = x_n(t_j + \Delta t) \quad (2.39)$$

e

$$\hat{\boldsymbol{\Phi}}_{nr} = \boldsymbol{\Phi}_{nr} e^{s_r(\Delta t)}, \quad (2.40)$$

Isto é,

$$\hat{\mathbf{X}}_{(p \times q)} = \hat{\boldsymbol{\Phi}}_{(p \times 2N)} \boldsymbol{\Lambda}_{(2N \times q)} \quad (2.41)$$

onde  $\hat{\mathbf{X}}$  e  $\hat{\boldsymbol{\Phi}}$  representam as matrizes de resposta e de autovetores defasadas no tempo, respectivamente.

Considerando  $p = 2N$ , é possível operar a inversão das matrizes  $\boldsymbol{\Phi}$  e  $\hat{\boldsymbol{\Phi}}$  das Equações (2.36) e (2.41). Assim:

$$\boldsymbol{\Lambda}_{(2N \times q)} = \boldsymbol{\Phi}_{(2N \times 2N)}^{-1} \mathbf{X}_{(2N \times q)} \quad (2.42)$$

e

$$\Lambda_{(2N \times q)} = \hat{\Phi}_{(2N \times 2N)}^{-1} \hat{X}_{(2N \times q)} \quad (2.43)$$

Igualando a Equação (2.42) e (2.43), vem:

$$\Phi^{-1}X = \hat{\Phi}^{-1}\hat{X} \rightarrow AX = \hat{X} \quad (2.44)$$

onde,

$$A = \hat{\Phi}\Phi^{-1} \quad (2.45)$$

A matriz A é denominada matriz de estado do sistema, uma vez que quando operada sobre a matriz X no instante t, o sistema é levado ao estado t + Δt.

Multiplicando-se então a Equação (2.44) por X<sup>T</sup>, vem:

$$AXX^T = \hat{X}X^T \quad (2.46)$$

Multiplicando à direita agora a Equação (2.46) por (XX<sup>T</sup>)<sup>-1</sup> tem-se:

$$A = (\hat{X}X^T)(XX^T)^{-1} \quad (2.47)$$

Desta forma, a matriz de estado A fica definida apenas em função de medições, podendo ser, portanto, determinada.

Substituindo as Equações (2.36) e (2.41) na Equação (2.44), tem-se:

$$A(\Phi\Lambda) = \hat{\Phi}\Lambda \quad (2.48)$$

e considerando a relação da Equação (2.40), vem:

$$A(\Phi\Lambda) = \Phi e^{sr\Delta t}\Lambda \rightarrow (A - e^{sr\Delta t}I)\Phi = \mathbf{0} \quad (2.49)$$

onde I é a matriz identidade.

A Equação (2.49) representa um problema de autovalor. Uma vez determinado os autovalores e autovetores da matriz A, torna-se então possível

determinar as frequências naturais, as taxas de amortecimento e os modos de vibração do sistema.

As frequências naturais e os coeficientes de amortecimento podem ser calculados a partir das Equações (2.34) e (2.49). Considerando os autovalores da matriz A escritos na forma:

$$e^{s_r \Delta t} = \beta_r + I \gamma_r \quad (2.50)$$

onde I indica o número imaginário e utilizando  $S_r = a_r + I b_r$ , vem:

$$e^{(a_r + I b_r) \Delta t} = \beta_r + I \gamma_r \quad (2.51)$$

A partir da relação de Euler, tem-se que:

$$e^{I \alpha} = \cos \alpha + I \sin \alpha \quad (2.52)$$

e utilizando a representação no plano mostrado pela Figura 10 a seguir, pode-se escrever as seguintes expressões:

$$\beta_r + I \gamma_r = \rho (\cos \alpha + I \sin \alpha) = \rho e^{I \alpha} \quad (2.53)$$

Onde  $\rho = \sqrt{\beta_r^2 + \gamma_r^2}$  e  $\alpha = \arctan\left(\frac{\gamma_r}{\beta_r}\right)$  são, respectivamente, o módulo e o ângulo de fase entre as componente real e imaginária de um número complexo.

Substituindo a Equação (2.51) na Equação (2.53) com os valores de  $\rho$  e  $\alpha$ , tem-se:

$$e^{(a_r + I b_r) \Delta t} = \sqrt{\beta_r^2 + \gamma_r^2} e^{I \arctan\left(\frac{\gamma_r}{\beta_r}\right)} \quad (2.54)$$

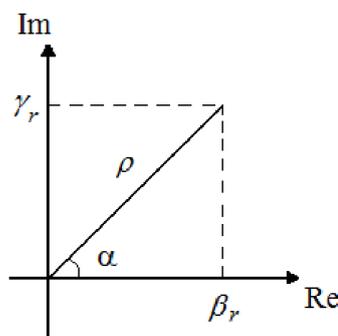


FIGURA 10 - Representação de um número complexo. FONTE - CURY, 2008

Aplicando o logaritmo natural em ambos os membros da Equação (2.54), tem-se:

$$(a_r + Ib_r)\Delta t = \ln\left(\sqrt{\beta_r^2 + \gamma_r^2}\right) + I \arctan\left(\frac{\gamma_r}{\beta_r}\right) \quad (2.55)$$

Igualando os termos reais e imaginários:

$$a_r = \frac{1}{2\Delta t} \ln(\beta_r^2 + \gamma_r^2) \quad (2.56)$$

$$b_r = +\frac{1}{\Delta t} \arctan\left(\frac{\gamma_r}{\beta_r}\right) \quad (2.57)$$

Uma vez determinados os coeficientes  $a_r$  e  $b_r$ , as frequências naturais e as taxas de amortecimento são obtidas da Equação (2.35):

$$\omega_r = \sqrt{a_r^2 + b_r^2} \quad (2.58)$$

$$\xi_r = -\frac{a_r}{\omega_r} \quad (2.59)$$

Desenvolvendo-se as Equações (2.50) até (2.59) para o conjugado  $e^{s_r \Delta t} = \beta_r - I\gamma_r$ , pode-se que cada par de polos  $s$  complexos e conjugados (autovalores da matriz  $A$ ) produzem frequências naturais amortecidas e taxas de amortecimento idênticas.

Analisando-se as Equações (2.44) e (2.55) e considerando que a matriz de respostas  $X$  descreve um sistema em vibrações livres, pode-se concluir que os autovetores de  $A$  são os modos próprios de vibração  $\phi_r$  do sistema instrumentado.

Uma vez que estes modos são também representados por números complexos e conjugados, torna-se necessário desenvolver um procedimento para a obtenção de valores reais.

Os modos de vibração complexos podem ser escritos na forma:

$$\phi_r = c_r + Id_r \quad (2.60)$$

onde,  $c_r$  e  $d_r$  são os vetores contendo as partes reais e imaginárias do modo  $\phi_r$ , respectivamente. O módulo da  $n$ -ésima componente do  $r$ -ésimo modo real  $\phi_{nr}^*$  pode ser obtido da seguinte forma:

$$\phi_{nr}^* = \sqrt{c_{nr}^2 + d_{nr}^2} \quad (2.61)$$

onde  $c_{nr}$  e  $d_{nr}$  representam a  $n$ -ésima componente do  $r$ -ésimo vetor contendo as partes reais e imaginárias do modo  $\phi_{nr}^*$ , respectivamente.

Entretanto, o valor obtido na Equação (2.61) deve ser multiplicado por uma constante  $\eta$  dada por:

$$\eta = \begin{cases} -1, & \text{se } \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}, \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.62)$$

onde  $\alpha = \arctan\left(\frac{d_{nr}}{c_{nr}}\right)$ .

Observa-se que para o modo conjugado  $\phi_r = c_r - Id_r$ , obtêm-se componentes reais de mesmo módulo, porém simétricas àquelas obtidas para o modo  $\phi_r = c_r + Id_r$ , representando, portanto, a mesma forma modal de vibração.

Uma dificuldade aparente da aplicação do Método de Ibrahim é o fato de serem necessários dois sinais de medidas para a determinação de uma frequência natural.

Esta dificuldade, porém, pode ser superada a partir da utilização de artifícios como a divisão ou a defasagem dos sinais, criando-se as chamadas pseudomedidas. As pseudomedidas têm por objetivo “fatiar” a resposta dinâmica em vários pedaços, gerando mais janelas para o processo de identificação modal.

#### **2.4 Método de identificação estocástica em subespaços – *Stochastic Subspace Identification (SSI)***

Os algoritmos para a identificação modal estocástica em subespaços são classificados em dois grupos distintos: SSI-COV e SSI-DATA. O que os difere é que o primeiro se baseia em um ajuste às funções de correlação da resposta e o

segundo funciona por meio de um ajuste do modelo ao próprio histórico de resposta (Cardoso, 2015).

### Método SSI-COV

O método SSI-COV soluciona o problema chamado de *realização estocástica* (Peeters, 2000), que se baseia na identificação das matrizes da representação de estado de sistemas estocásticos no tempo discreto, ou seja, apenas com base na resposta dos sistemas (Rodrigues, 2004).

Akaike (1974), Aoki (1987) e Arun e Kung (1990) foram os primeiros a realizar trabalhos que analisaram o problema de realização estocástica.

Seguindo a abordagem utilizada por Van Overschee e De Moor (1996), o modelo de espaço de estados determinísticos-estocástico é descrito pelo seguinte conjunto de equações:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + w_k \\ y_k &= Cx_k + Du_k + v_k \end{aligned} \quad (2.63)$$

com

$$E \left[ \begin{pmatrix} w_p \\ v_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_q^T & v_q^T \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} Q & S_v \\ S_v^T & R \end{pmatrix} \delta_{pq} \geq 0 \quad (2.64)$$

onde  $E$  representa o operador estatístico de valor esperado,  $\delta_{pq}$  é o delta de Kronecker e  $k$ ,  $p$  e  $q$  são índices do vetor discreto do tempo representando um instante genérico.

O método SSI-COV baseia-se na expressão de fatoração da matriz das funções de correlação e organizadas numa matriz de Hankel  $H_0$ .

$$(2.65)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_2 & \Lambda_3 & \cdots & \Lambda_q \\ \Lambda_2 & \Lambda_3 & \Lambda_4 & \cdots & \Lambda_{q+1} \\ \Lambda_3 & \Lambda_4 & \Lambda_5 & \cdots & \Lambda_{q+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_p & \Lambda_{p+1} & \Lambda_{p+2} & \cdots & \Lambda_{p+q-1} \end{pmatrix}}_{\text{Matriz de Hankel}} = \begin{pmatrix} CG & CAG & CA^2G & \cdots & CA^{q-1}G \\ CAG & CA^2G & CA^3G & \cdots & CA^qG \\ CA^2G & CA^3G & CA^4G & \cdots & CA^{q+1}G \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{p-1}G & CA^pG & CA^{p+1}G & \cdots & CA^{p+2}G \end{pmatrix}$$

ou seja:

$$H_0 = \underbrace{\begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{p-1} \end{pmatrix}}_{O_p} (G \quad AG \quad A^2G \quad \cdots \quad A^{q-1}G) \Leftrightarrow H_0 = O_p \Gamma_q \quad (2.65)$$

em que a matrizes  $O_p$  e  $\Gamma_p$  são designadas por, respectivamente, matriz de observabilidade e matriz de controlabilidade estocástica.

Observa-se que a matriz de Hankel das funções de correlação pode ser fatorada no produto da matriz de observabilidade pela matriz de controlabilidade estocástica, pelo método da Decomposição em Valores Singulares (SVD). Assim, após desprezarem-se os valores singulares nulos ou quase nulos; determinam-se as matrizes  $U, S$  e  $V$ .

$$H_0 = USV^T \quad (2.67)$$

E, comparando as Equações (2.66) e (2.67), pode-se então escrever:

$$O_p = US^{1/2} \quad (2.68)$$

$$\Gamma_q = S^{1/2}V^T \quad (2.69)$$

Determinadas as matrizes de observabilidade e controlabilidade estocástica, o problema de identificação modal pelo método de SSI-COV encontra-se praticamente

resolvido. A matriz  $C$  pode ser retirada das primeiras linhas da matriz de observabilidade  $O_p$  e que a matriz  $G$  pode ser retirada das primeiras colunas da matriz de controlabilidade  $\Gamma_q$ . A matriz  $A$  pode ser calculada por três métodos, do qual podemos citar o seguinte:

$$A = O_p^\dagger H_l \Gamma_q^\dagger \quad \leftrightarrow \quad A = S^{-1/2} U^T H_1 V S^{-1/2} \quad (2.70)$$

onde  $O_p^\dagger$  e  $\Gamma_q^\dagger$  são as matrizes pseudoinversas, que são facilmente extraídas das matrizes resultantes da decomposição em valores singulares da matriz de Hankel  $H_0$ .

A etapa mais importante do método do SSI-COV é a decomposição da matriz de Hankel  $H_0$  em valores singulares. Após essa operação a matriz  $H_0$  é decomposta no produto da matriz de observabilidade  $O_p$  e pela matriz de controlabilidade estocástica  $\Gamma_q$ . Os passos seguintes do método são praticamente imediatos atendendo à estrutura das matrizes  $O_p$  e  $\Gamma_q$ .

#### *Método SSI-DATA*

O SSI-DATA é um método de identificação estocástica em subespaços com ajuste direto de resposta de um sistema, que é resultado de trabalhos de investigação relativamente recentes, desenvolvidos no domínio da identificação de sistemas com aplicação mais relacionada com a engenharia eletrotécnica ou a engenharia de controle (Van Overschee e De Moor, 1996; Ljung, 1999). Sua aplicabilidade na área da engenharia civil começou na Universidade Católica de *Leuven*, na Bélgica (Peeters, 2000) e na Universidade de *Aalborg*, na Dinamarca (Kirkegaard e Andersen, 1997).

O método SSI-DATA se assemelha ao SSI-COV quando o modelo que contém as informações experimentais é parametrizado sob a forma das matrizes da representação de estado de um sistema estocástico no tempo discreto. Porém, no método SSI-DATA não é necessário efetuar a avaliação explícita das funções de correlação da resposta dos sistemas. Essa avaliação é substituída por uma operação que, de acordo com a apresentação efetuada por Van Overschee e De

Moor (1996), pode ser interpretada como uma projeção geométrica do espaço das séries de resposta do “futuro” no espaço das séries de resposta do “passado”.

O ajuste de um modelo às séries de resposta observadas experimentalmente no SSI-DATA, é feito com a utilização de variadas técnicas numéricas robustas, das quais podemos citar: decomposição ortogonal ou decomposição QR, a decomposição em valores singulares (SVD) e a técnica de mínimos quadrados.

Inicialmente, é necessário avaliar a projeção do espaço das séries de resposta “futuro” no espaço das séries de resposta “passado”. Essa projeção é definida através da expressão que se indica em seguida:

$$P_i^{ref} = O_i \hat{X}_i = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{i-1} \end{bmatrix} [\hat{x}_i \quad \hat{x}_{i+1} \quad \dots \quad \hat{x}_{i+N-1}] \quad (2.71)$$

A projeção  $P_i^{ref}$  pode ser decomposta no produto da matriz de observabilidade  $O_i$  pela sequência de estado de um filtro de Kalman  $\hat{X}_i$ . O filtro de Kalman tem como objetivo obter uma estimativa ótima do vetor de estado de um sistema num instante  $k$ , utilizando: as respostas observadas até o instante  $k - l$ , as matrizes do sistema e as matrizes de correlação do ruído que se considera que atua o sistema e afeta a resposta observada.

Utilizando o método de decomposição em valores singulares (SVD), para estimar as características de uma matriz, obtém-se:

$$P_i^{ref} = U_1 S_1 V_1^T \quad (2.72)$$

onde pode ser observado a matriz de observabilidade  $O_i$  e a matriz de sequência de estado de um filtro de Kalman  $\hat{X}_i$ , através das seguintes expressões:

$$O_i = U_1 S_1^{1/2}$$

$$\hat{X}_i = O_i^\dagger P_i^{ref} \quad (2.73)$$

A partir daí faz-se uma segunda projeção para obter as matrizes  $A$ ,  $G$ ,  $C$  e  $R_0$  da representação de estado de um sistema estocástico no tempo discreto. Para tanto, a segunda projeção é definida como:

$$P_{i-1}^{ref} = \frac{Y_{f-}}{Y_{p+}^{ref}} = O_{i-1} \hat{X}_{i+1} \quad (2.74)$$

Eliminando as últimas linhas da matriz  $O_i$  é possível obter a matriz de observabilidade  $O_{i-1}$ , que é expressa por:

$$O_{i-1} = O_i(1:n_e(i-1), :) \quad (2.75)$$

A sequência de estado de um filtro de Kaman  $\hat{X}_{i+1}$  pode ser estimada por:

$$\hat{X}_{i+1} = O_{i-1}^\dagger P_{i-1}^{ref} \quad (2.76)$$

O sistema de equação seguinte pode ser escrito baseado na representação de um sistema estocástico no tempo discreto:

$$\begin{bmatrix} \hat{X}_{i+1} \\ Y_{i/i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} \hat{X}_i + \begin{bmatrix} W_i \\ V_i \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

onde,  $Y_{i/i}$  é uma matriz de Hankel e  $W_i$  e  $V_i$  são os resíduos, ou seja, as séries correspondentes ao ruído, sendo, respectivamente, ruído do processo e ruído de medição.

Como os resíduos não são correlacionados com a sequência de estado  $\hat{X}_i$ , e as respostas e as sequências de estado são conhecidas, podem-se estimar as matrizes  $A$  e  $C$  com a solução de mínimos quadrados, levando em consideração a expressão (2.77):

$$\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{X}_{i+1} \\ Y_{i/i} \end{bmatrix} \hat{X}_i^\dagger \quad (2.78)$$

Na solução de mínimos quadrados para as matrizes  $A$  e  $C$ ,  $W_i$  e  $V_i$  são os resíduos e podem ser estimados por:

$$\begin{bmatrix} W_i \\ V_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{X}_{i+1} \\ Y_{i/i} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} \hat{X}_i \quad (2.79)$$

As matrizes de correlação dos resíduos ( $Q, Rv$  e  $S$ ) podem ser estimadas através de:

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & Rv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_i \\ V_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_i^T & V_i^T \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

Em termos de identificação modal de um sistema é suficiente a avaliação das matrizes  $A$  e  $C$ .

No presente trabalho, apenas o SSI-DATA foi utilizado, uma vez que este método já foi implementado no Matlab por (Cardoso, 2014).

# CAPÍTULO 3

## 3 METODOLOGIA E RESULTADOS

O presente capítulo apresenta, inicialmente, a metodologia utilizada neste trabalho. Os dados para análise do primeiro caso estudado, denominado “caso-controle”, foram gerados numericamente, simulando diversos níveis de ruído no sinal. A segunda aplicação (viga biapoiada - COPPE) foram utilizados dados de ensaios dinâmicos cedidos pela COPPE/UFRJ. Finalmente, os dois últimos casos estudados (Ponte PI-57 e Viaduto PK 075+317) foram baseados nos dados coletados no trabalho de (Cury, 2010).

Os dados de entrada de cada estrutura analisada (sinal simulado, viga biapoiada, ponte PI-57 e viaduto PK 075+317) foram trabalhos dentro do programa Matlab. Cada técnica de identificação modal apresentou um resultado para estes parâmetros modais. Como descrito no objetivo deste trabalho, as técnicas foram comparadas entre si com a intenção de definir a mais robusta, ou seja, aquela que apresentou resultados mais próximos dos valores teóricos e/ou analíticos previamente conhecidos. O fluxograma da Figura 11 esquematiza os processos da metodologia citada.

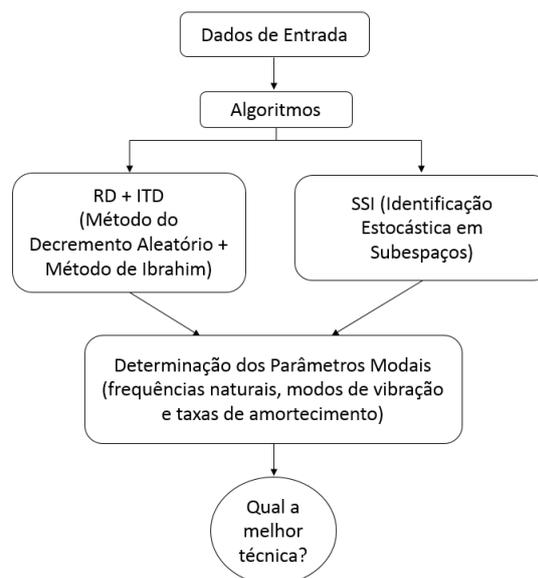


FIGURA 11 -Fluxograma com esquema da metodologia adotada neste trabalho.

### 3.1 Caso-controle

O caso-controle é uma forma de teste, no qual as técnicas de identificação modal são avaliadas. Foi simulado um sinal dinâmico contendo cinco frequências naturais e taxas de amortecimento conhecidas, que são: 0,5 Hz; 1,0 Hz; 1,5 Hz; 2,0 Hz e 4 Hz, e 1%, 0,8%, 0,6%, 0,4% e 0,20%, respectivamente.

Primeiramente, a simulação foi feita desconsiderando qualquer tipo de ruído, ou seja, ruído nulo. Em seguida, a simulação foi realizada com o sinal acrescido de ruído de 10% e, por último, com um sinal acrescido de um ruído de 20%. A resposta dinâmica com ruído é obtida adicionando à resposta sem ruído o vetor de ruído, calculado da seguinte maneira:

$$X_{i,ruído} = X_i + \eta_{ruído} \cdot \sigma_{X_i} \cdot V \sim N(0,1) \quad (3.1)$$

em que  $X_i$  e  $X_{i,ruído}$  representam, respectivamente, as respostas dinâmicas da estrutura sem e com ruído medidas pelo sensor  $i$ ,  $\eta_{ruído}$  é o nível de ruído adicionado,  $\sigma_{X_i}$  o desvio-padrão de  $X_i$  e  $V \sim N(0,1)$  um vetor gaussiano de média nula e desvio-padrão unitário.

Nesta seção encontram-se os resultados das técnicas (FFT, RD + ITD e SSI, respectivamente) para uma estrutura qualquer (sem levar em consideração sua geometria) com sinal puro (lê-se: sem ruído) e com níveis de ruído branco de 10% e de 20%. A taxa de aquisição de dados foi de 100 Hz, gerando o equivalente a 10 segundos de sinal.

#### 3.1.1 Sinal sem ruído

O sinal temporal de uma estrutura qualquer, gerado numericamente, pode ser visto na Figura 12 a seguir.

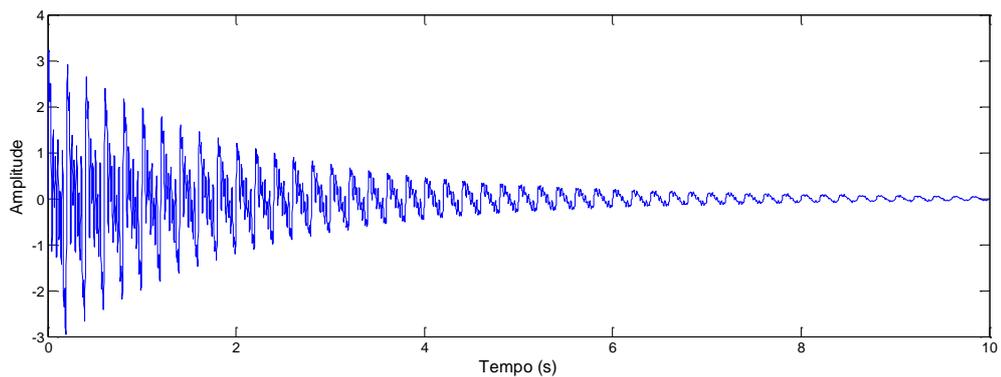


FIGURA 12 - Sinal temporal sem ruído.

A fim de se realizar uma análise prévia sobre a identificação das frequências naturais, foi calculada a FFT (Transformada Rápida de Fourier, ou em inglês, *Fast Fourier Transform*). Os parâmetros de entrada da FFT foram: canal (1), número de pontos utilizados no sinal (1024), taxa de amostragem (100 Hz), sensibilidade (0.95) e frequência máxima (5). Quanto mais próximo de 1 for o valor da sensibilidade, maior a possibilidade de o algoritmo identificar o pico como frequência própria da estrutura.

O resultado obtido pela FFT para a estrutura sem ruído é mostrado na Figura 13.

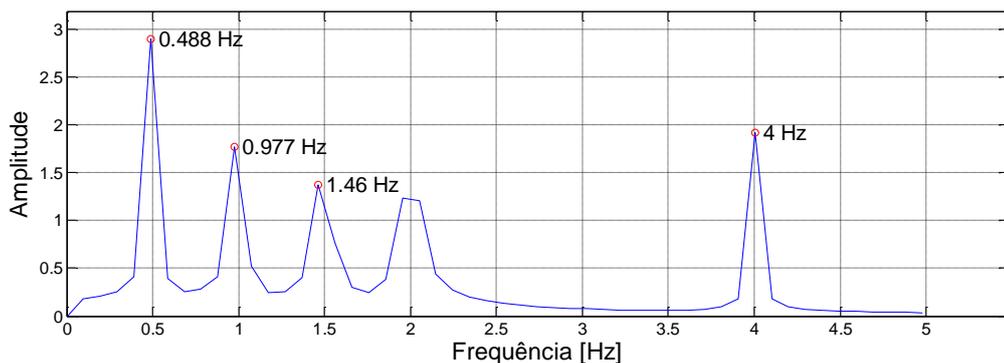


FIGURA 13 - FFT da estrutura sem ruído.

Em seguida, foram utilizados os métodos RD + ITD. Os parâmetros de entrada do RD foram: taxa de amostragem (100 Hz), número de frequências desejadas (7), porcentagem de pontos utilizados no sinal (0.5, que representa 50% da duração total do sinal) e canal (1). Foram solicitadas sete frequências para evitar

a “perda” de algum valor físico. Para o ITD, foi utilizado o procedimento de “divisão de sinais”, resultando em 20 realizações (pseudomedidas). O método RD implica numa condição de desencadeamento (ou *triggering condition*). Cada condição foi avaliada separadamente. Em seguida, verificou-se qual delas apresentou os melhores resultados com relação às frequências teóricas e às taxas de amortecimento.

**TABELA 1** – Valores das frequências identificadas pelas condições de desencadeamento para a estrutura sem ruído (R0).

Passagem de nível	Extremo local	Passagem por zero com inclinação positiva	Pontos positivos
Frequência (Hz) R0	Frequência (Hz) R0	Frequência (Hz) R0	Frequência (Hz) R0
RD + ITD	RD + ITD	RD + ITD	RD + ITD
0,50	0,50	0,50	0,50
1,00	1,00	1,00	1,00
1,50	1,50	1,50	1,50
2,00	2,00	2,00	2,00
4,00	4,00	4,00	4,00

**TABELA 2** - Valores das taxas de amortecimento identificadas pelas condições de desencadeamento para a estrutura sem ruído (R0).

Passagem de nível	Extremo local	Passagem por zero com inclinação positiva	Pontos positivos
Taxa de amortecimento (%) R0	Taxa de amortecimento (%) R0	Taxa de amortecimento (%) R0	Taxa de amortecimento (%) R0
RD+ITD	RD+ITD	RD+ITD	RD+ITD
1,00	1,00	1,00	1,00
0,80	0,80	0,80	0,80
0,60	0,60	0,60	0,60
0,40	0,40	0,40	0,40
0,20	0,20	0,20	0,20

Como era de se esperar, para a estrutura sem ruído (R0) o resultado é o mesmo para todas as condições. As frequências e as taxas de amortecimento apresentadas pelas condições foram iguais às frequências e taxas de amortecimento teóricas.

Para o SSI, os dados de entrada foram: ordem mínima (10), ordem máxima (150), intervalo de variação da ordem (2), taxa de amostragem (100), tempo inicial do sinal (1), número de pontos utilizados no sinal (4000). Quanto maior a ordem, maior a chance de aparecimento de frequências espúrias. Portanto, deve-se ter atenção na definição deste parâmetro. O resultado apresentado é do modelo de ordem 10 e está apresentado na Tabela 3 abaixo:

**TABELA 3** - Valores identificados pelo SSI para a estrutura sem ruído (R0).

R0	
Frequência (Hz)	Taxa de amortecimento (%)
0,50	1,00
1,00	0,80
1,50	0,60
2,00	0,40
4,00	0,20

Os resultados apresentados pelo SSI também não tiveram nenhuma alteração na frequência e na taxa de amortecimento, apresentando os mesmos valores teóricos.

A Tabela 4 mostra uma comparação das técnicas envolvidas, calculando-se os erros gerados por cada uma. Como a estrutura tem ausência de ruído no sinal, o erro que cada técnica encontrou foi nulo.

**TABELA 4** - Comparativo das técnicas de identificação modal para um sinal sem ruído.

R0				
Frequência Teórica (Hz)	RD + ITD (Hz)	Erro (%)	SSI (Hz)	Erro (%)
0,50	0,50	0,00	0,50	0,00
1,00	1,00	0,00	1,00	0,00
1,50	1,50	0,00	1,50	0,00
2,00	2,00	0,00	2,00	0,00
4,00	4,00	0,00	4,00	0,00

### 3.1.2 Sinal com 10% de ruído

O mesmo sinal, mostrado na Figura 12, foi acrescido de um ruído de 10%. A Figura 14 apresenta os 10 segundos de dados registrados. Comparando com a

Figura 12 da estrutura sem ruído, é possível ver uma pequena perturbação no resultado gerado.

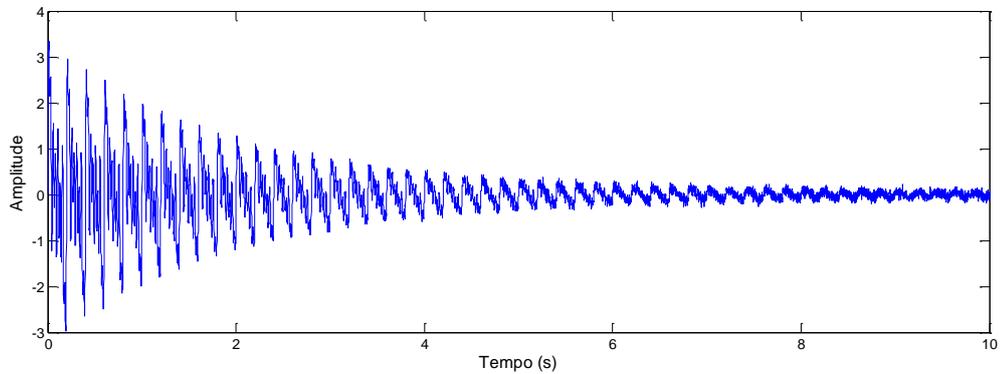


FIGURA 14 - Sinal temporal com ruído de 10%.

Para a estrutura apresentando um sinal com 10% de ruído foram feitos os mesmos procedimentos anteriores (para a estrutura com sinal livre de ruído) para a FFT, o RD + ITD e o SSI, inclusive com os mesmos parâmetros.

A Figura 15 a seguir mostra o resultado da FFT para a estrutura com 10% de ruído.

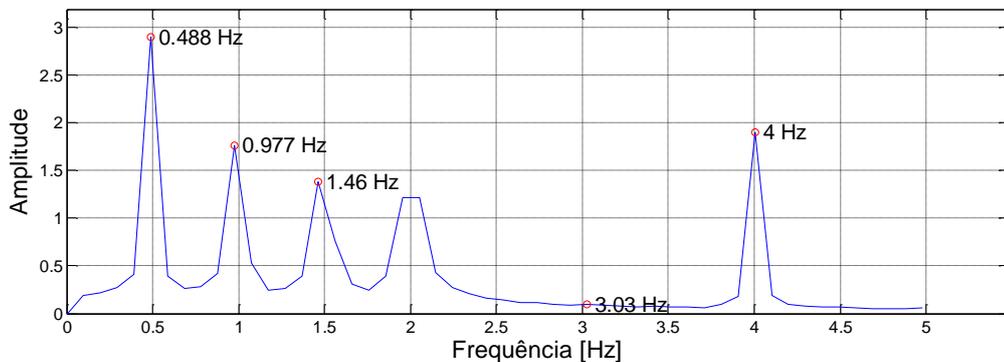


FIGURA 15 - FFT da estrutura com ruído de 10%.

Esta figura apresentou um gráfico bem próximo do gráfico da Figura 13 (estrutura sem ruído). A perturbação provocada pelo ruído fez surgir uma “nova” frequência no resultado mostrado pela Figura 15. Todavia, sua amplitude é imperceptível.

Os dados de entrada para a obtenção dos parâmetros modais da estrutura pelo RD+ITD foram os mesmos da estrutura sem ruído, como disse anteriormente. E os valores identificados por essas técnicas estão apresentados na Tabela 5 a seguir:

**TABELA 5** - Valores das frequências identificadas pelas condições de desencadeamento para a estrutura com 10% de ruído (R10).

Passagem de nível	Extremo local	Passagem por zero com inclinação positiva	Pontos positivos
Frequência (Hz) R10	Frequência (Hz) R10	Frequência (Hz) R10	Frequência (Hz) R10
RD+ITD	RD+ITD	RD+ITD	RD+ITD
2,00	0,50	1,99	0,50
3,98	1,00	3,99	1,00
0,00	1,50	0,00	1,50
0,00	2,00	0,00	2,00
0,00	4,00	0,00	4,00

Para a estrutura com 10% de ruído (R10), a condição de desencadeamento que mostrou o melhor resultado foi a “Pontos positivos”, enquanto que a condição de “Passagem por nível” e a condição de “Passagem por zero com inclinação positiva” não conseguiu identificar as frequências. Considerando as frequências com duas casas decimais, nota-se que elas foram iguais às frequências da estrutura sem ruído.

**TABELA 6** - Valores das taxas de amortecimento identificadas pelas condições de desencadeamento para a estrutura com ruído de 10% (R10).

Passagem de nível	Extremo local	Passagem por zero com inclinação positiva	Pontos positivos
Taxa de amortecimento (%) R10	Taxa de amortecimento (%) R10	Taxa de amortecimento (%) R10	Taxa de amortecimento (%) R10
RD+ITD	RD+ITD	RD+ITD	RD+ITD
2,33	1,72	2,25	0,90
2,85	1,48	2,46	0,96
0,00	1,59	0,00	0,83
0,00	0,63	0,00	0,43
0,00	1,76	0,00	0,28

As taxas de amortecimento apresentaram valores distintos das taxas de amortecimento da estrutura sem ruído no sinal.

A Tabela 7 mostra os parâmetros modais da estrutura com 10% de ruído identificados pelo SSI.

**TABELA 7** - Valores identificados pelo SSI para a estrutura com ruído de 10% (R10).

R10	
Frequência (Hz)	Taxa de amortecimento (%)
0,50	1,01
1,00	0,79
1,50	0,60
2,00	0,40
4,00	0,20

Conforme pode ser visto na Tabela 7, as frequências geradas pelo SSI foram iguais às frequências teóricas, considerando duas casas decimais. Já as taxas de amortecimento apresentaram valores distintos das taxas da estrutura sem ruído.

A Tabela 8 a seguir apresenta uma comparação entre a frequência teórica e o RD + ITD e entre a frequência teórica e o SSI, apresentando a porcentagem dos erros entre elas para cada frequência e para cada taxa de amortecimento.

**TABELA 8** - Comparativo das técnicas de identificação modal para um sinal de 10% de ruído.

R10				
Frequência Teórica (Hz)	RD + ITD (Hz)	Erro (%)	SSI (Hz)	Erro (%)
0,50	0,50	-0,07	0,50	0,00
1,00	1,00	-0,02	1,00	0,01
1,50	1,50	0,05	1,50	0,00
2,00	2,00	0,05	2,00	0,00
4,00	4,00	-0,02	4,00	0,00

De acordo com a Tabela 8, a técnica de identificação modal que apresentou o menor erro para a viga com sinal acrescido de 10% de ruído (R10) foi a SSI, apresentando apenas um erro de 0,01%, ou seja, praticamente nulo.

O gráfico da Figura 16 a seguir foi utilizado para ilustrar melhor os erros de cada técnica e poder ter uma comparação mais detalhada entre ambas.

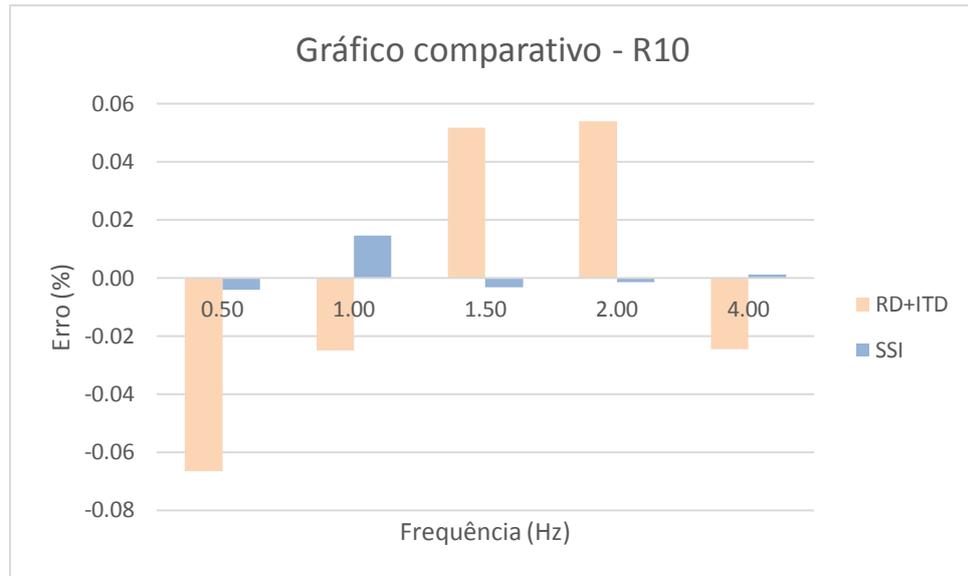


FIGURA 16 - Gráfico comparativo das técnicas de identificação modal para uma estrutura qualquer com 10% de ruído no sinal.

### 3.1.3 Sinal com 20% de ruído

Por fim, esta subseção apresenta os resultados da estrutura com 20% de ruído. Neste caso, o sinal original, mostrado na Figura 12 é perturbado com 20% de ruído branco. A Figura 17 apresenta os 10 segundos de dados registrados.

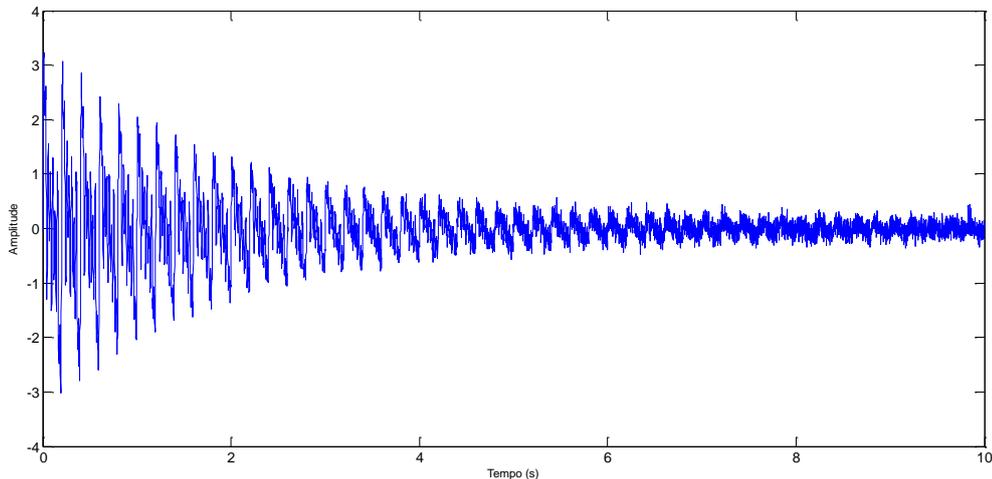


FIGURA 17 - Sinal temporal com ruído de 20%.

Novamente, foram feitos os mesmos procedimentos anteriores (para a estrutura com sinal livre de ruído) para a FFT, o RD + ITD e o SSI; também com os mesmos parâmetros utilizados no sinal sem ruído.

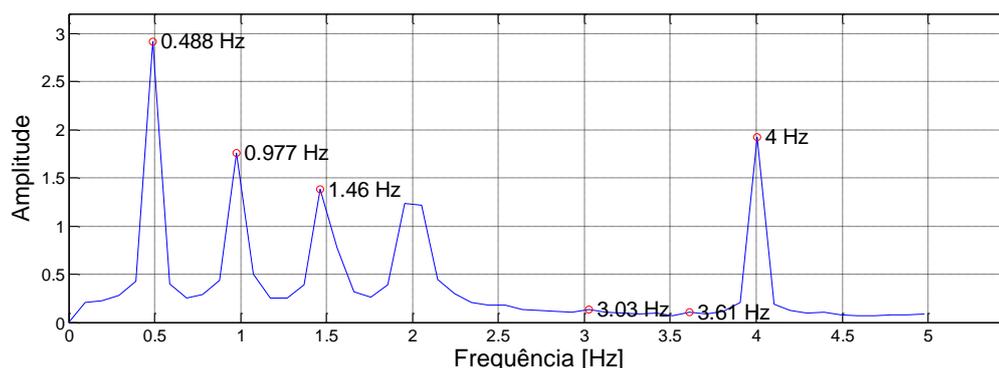


FIGURA 18 - FFT da estrutura com 20% de ruído no sinal.

As frequências identificadas foram similares às frequências geradas pela estrutura com sinal sem ruído, apresentando apenas duas “novas” frequências, que apareceram devido às perturbações causadas pelo ruído de 20% no sinal. As Tabelas 9 e 10 mostram as frequências e as taxas de amortecimento geradas pelas condições de desencadeamento do RD + ITD. A condição que apresentou melhores resultados foi a “Pontos Positivos”.

**TABELA 9** - Valores das frequências identificadas pelas condições de desencadeamento para a estrutura com 20% de ruído (R20).

Passagem de nível	Extremo local	Passagem por zero com inclinação positiva	Pontos positivos
Frequência (Hz) R20	Frequência (Hz) R20	Frequência (Hz) R20	Frequência (Hz) R20
RD+ITD	RD+ITD	RD+ITD	RD+ITD
1,99	0,50	0,00	0,50
3,93	1,00	0,00	1,00
0,00	1,50	0,00	1,50
0,00	2,00	0,00	2,00
0,00	3,99	0,00	4,00

As frequências da condição inicial por pontos positivos foram iguais às frequências teóricas; se considerarmos, como no caso anterior (sinal com ruído de 10%), apenas duas casas decimais.

**TABELA 10** - Valores das taxas de amortecimento identificadas pelas condições de desencadeamento para a estrutura com 20% de ruído (R20).

Passagem de nível	Extremo local	Passagem por zero com inclinação positiva	Pontos positivos
Taxa de amortecimento (%)	Taxa de amortecimento (%)	Taxa de amortecimento (%)	Taxa de amortecimento (%)

R20	R20	R20	R20
RD+ITD	RD+ITD	RD+ITD	RD+ITD
4,34	3,54	0,00	1,15
6,21	3,07	0,00	1,24
0,00	4,05	0,00	1,40
0,00	1,14	0,00	0,56
0,00	4,06	0,00	0,66

As taxas de amortecimento apresentadas pelo RD + ITD foram bem distintas das taxas de amortecimento da estrutura sem ruído. A Tabela 11 mostra os resultados apresentados pelo SSI para a estrutura com 20% de ruído.

**TABELA 11** - Valores identificados pelo SSI para a estrutura com ruído de 20% (R20).

R20	
Frequência (Hz)	Taxa de amortecimento (%)
0,50	0,99
1,00	0,79
1,50	0,60
2,00	0,40
4,00	0,19

Apesar do sinal poluído com um ruído de 20% o SSI conseguiu mostrar valores bem próximos dos valores teóricos apresentados no início desta seção. As frequências foram idênticas, considerando duas casas decimais e as taxas de amortecimento apresentaram valores quase iguais.

O erro apresentado por cada técnica de identificação modal estudada, comparado a frequência teórica é mostrado na Tabela 12. Em seguida é mostrado um gráfico comparativo de erros representado pela Figura 19.

**TABELA 12** - Comparativo das técnicas de identificação modal para um sinal de 10% de ruído

R20				
Frequência Teórica (Hz)	RD + ITD (Hz)	Erro (%)	SSI (Hz)	Erro (%)
0,50	0,50	-0,03	0,50	0,00
1,00	1,00	-0,01	1,00	0,03
1,50	1,50	-0,13	1,50	0,00
2,00	2,00	0,08	2,00	0,00
4,00	4,00	-0,10	4,00	0,00

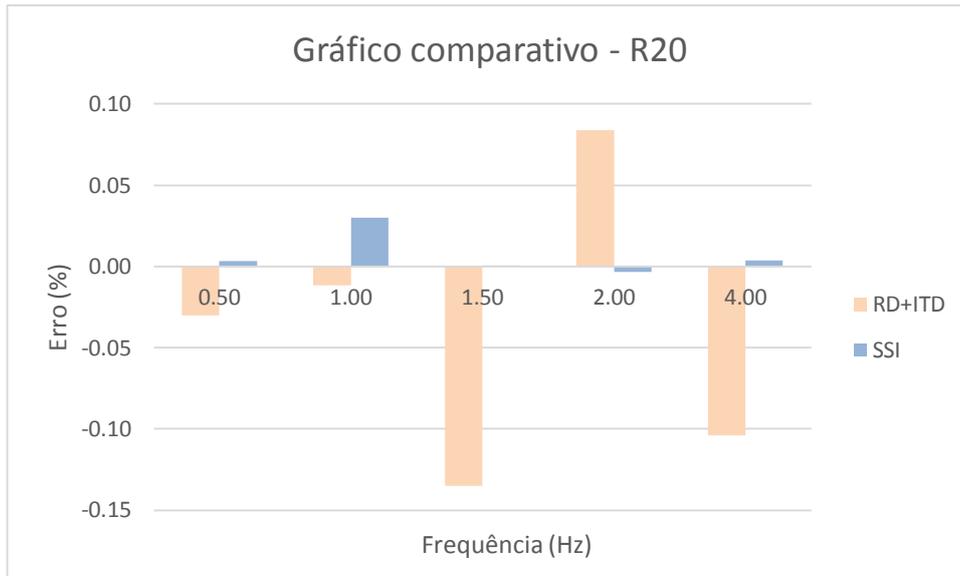


FIGURA 19 - Gráfico comparativo das técnicas de identificação modal para uma estrutura qualquer com 10% de ruído no sinal.

A Técnica SSI apresentou apenas um erro de 0,03%, enquanto que o RD + ITD apresentou erros em todas as frequências analisadas. Portanto ele apresentou resultados mais satisfatórios.

### 3.2 Viga biapoiada

A Figura 20 mostra uma viga de aço simplesmente apoiada de 1,46 m de comprimento e seção retangular de 76,2 x 8,0 mm. Os testes experimentais foram realizados na COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro (Alves et al., 2015).

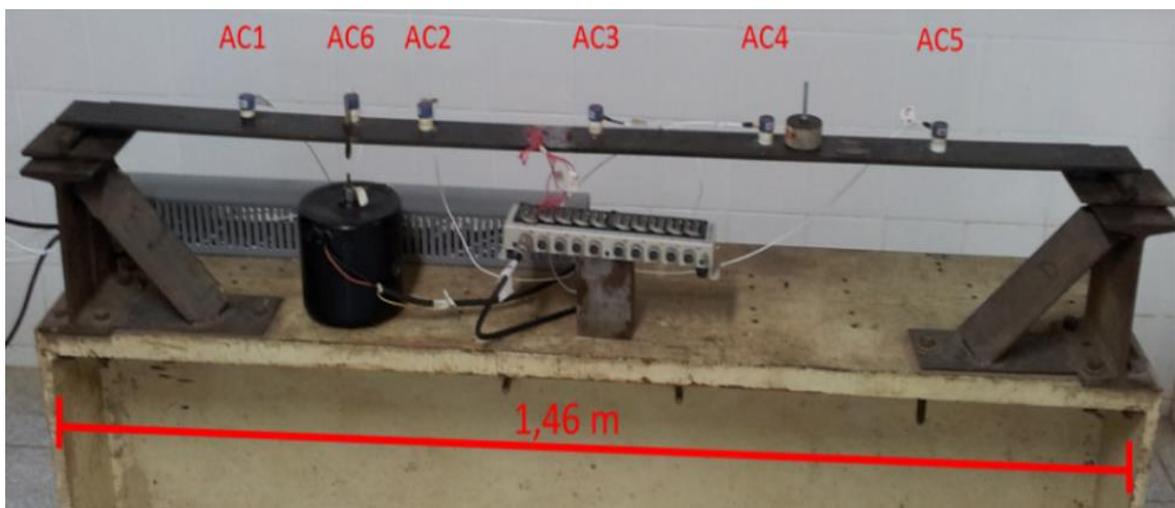


FIGURA 20 - Viga de aço instrumentada. FONTE – ALVES *et al.*, 2015.

A viga foi instrumentada com seis acelerômetros piezoelétricos (PCB, 336C31). A aquisição de dados foi realizada utilizando o sistema de aquisição de dados ADS2002 da marca Lynx. Os acelerômetros foram posicionados de acordo com a Tabela 13.

**TABELA 13** - Posição dos acelerômetros na viga.

Referência	Distância da esquerda para a direita (cm)
<b>Apoio esquerdo</b>	0,0
<b>AC1</b>	23,2
<b>AC6</b>	37,5
<b>AC2</b>	48,6
<b>AC3</b>	73,0
<b>AC4</b>	97,1
<b>AC5</b>	120,7

Foram realizados dois tipos de ensaios dinâmicos: ensaio de impacto, onde foi utilizado um martelo de impacto, e ensaio com vibrações aleatórias, onde foi utilizado um excitador.

As frequências naturais da viga foram calculadas através da expressão abaixo:

$$\omega_i = \frac{i^2 * \pi}{2} * \sqrt{\frac{E * I}{\rho * S * L^4}} \quad (3.2)$$

onde:

$i$  é o modo de vibração

$E$  é o módulo de elasticidade longitudinal, igual a 200 GPa

$I$  é o momento de inércia da seção, igual a  $3,25 \cdot 10^{-9} \text{ m}^4$

$\rho$  é a massa específica, igual a  $7850 \text{ kg/m}^3$

$S$  é a área da seção, igual a  $6,1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$

$L$  é o comprimento da viga, igual a 1,46 m.

A Tabela 14 contém a média das frequências naturais identificadas analiticamente.

**TABELA 14** - Tabela com as frequências naturais identificadas.

I	Frequência (Hz)
1	8,59
2	34,36
3	77,31
4	137,44
5	214,74

A FFT foi utilizada nesse ensaio com o objetivo de verificar qual canal apresentava melhores resultados, isto é, o que melhor identificava, ao menos, as cinco primeiras frequências naturais.

### 3.2.1 Ensaio com vibrações aleatórias

O ensaio de vibração aleatória foi feito com um excitador. A taxa de aquisição foi fixada em 4000 Hz (uma medida a cada 0,00025 s). Foram realizadas várias campanhas de ensaios. Cada ensaio possui uma duração média de 10 minutos. Ao todo, foram registrados 2,4 milhões de valores de aceleração. Pode se ter uma ideia geral dos aspectos dessa série com a Figura 21.

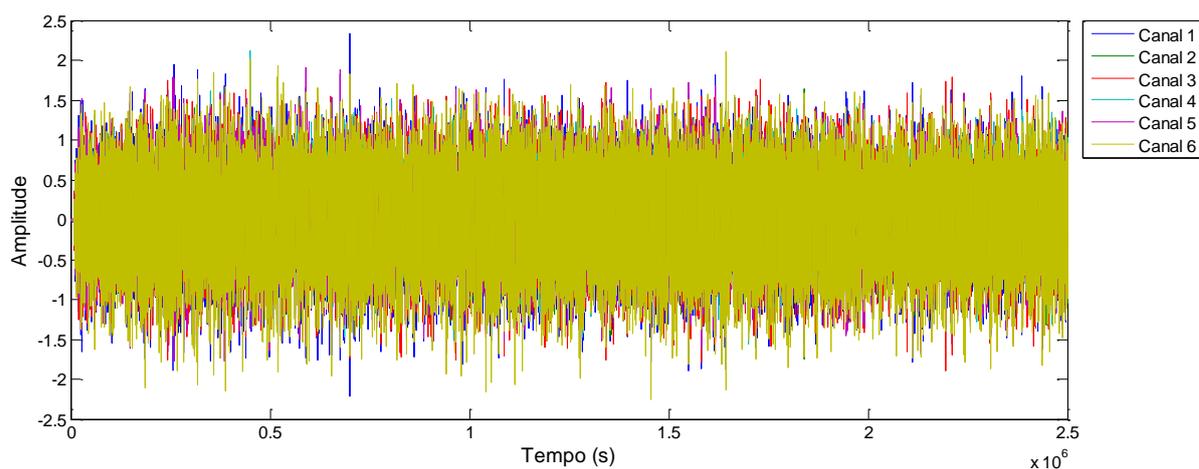


FIGURA 21 – Sinal temporal de uma viga biapoçada ensaiada com vibrações aleatórias.

Os parâmetros de entrada para a FFT foram: canal (1 a 6), número de pontos utilizados do sinal (1024), taxa de amostragem (4000 Hz), sensibilidade (0.95) e frequência máxima (300 Hz). Os canais foram trocados, sucessivamente, até que se

analisassem todos os seis canais. As Figuras 22, 23, 24, 25, 26 e 27 estão representando os canais: 1, 2, 3, 4, 5 e 6, respectivamente:

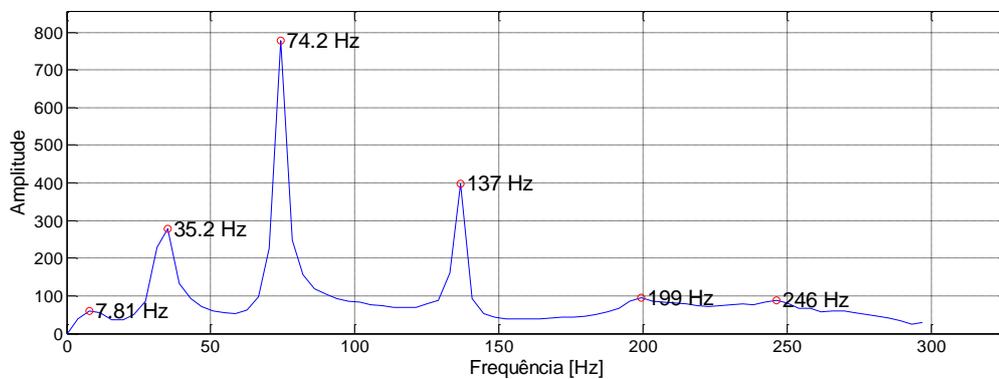


FIGURA 22 - Canal 1.

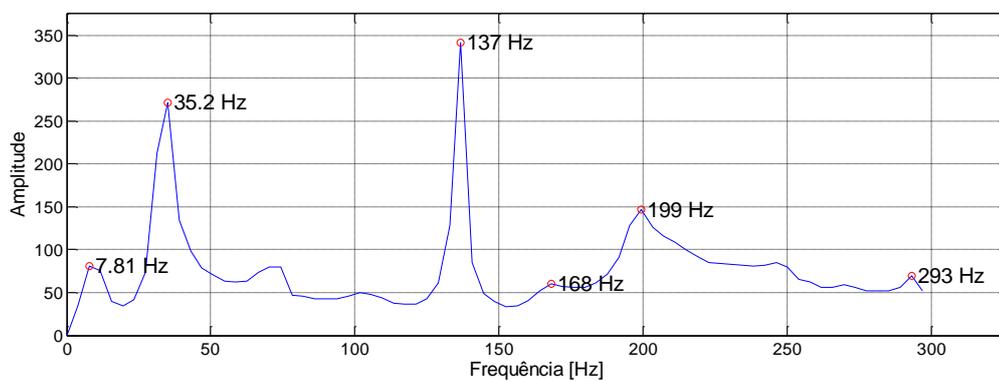


FIGURA 23 - Canal 2.

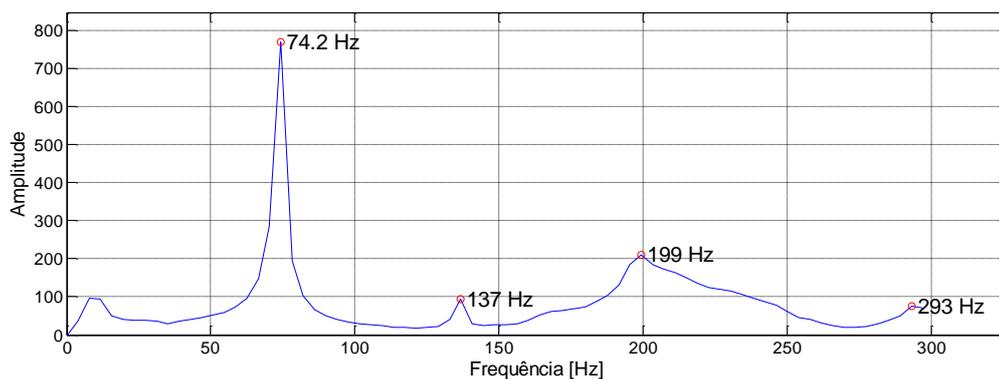


FIGURA 24 - Canal 3.

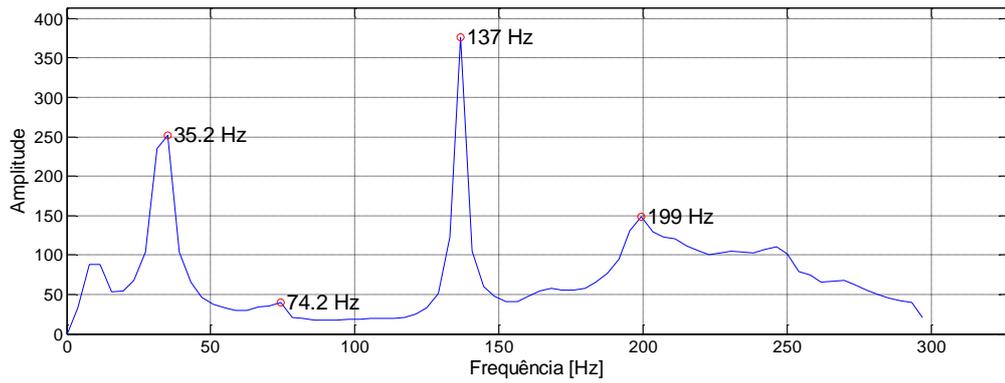


FIGURA 25 - Canal 4

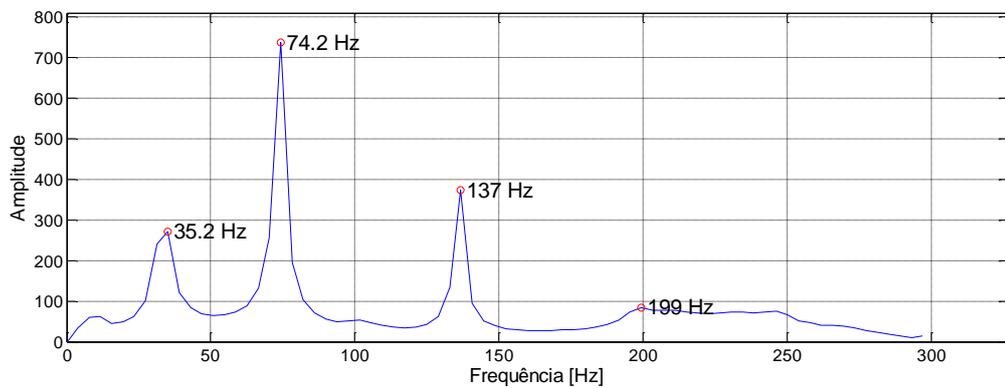


FIGURA 26 - Canal 5

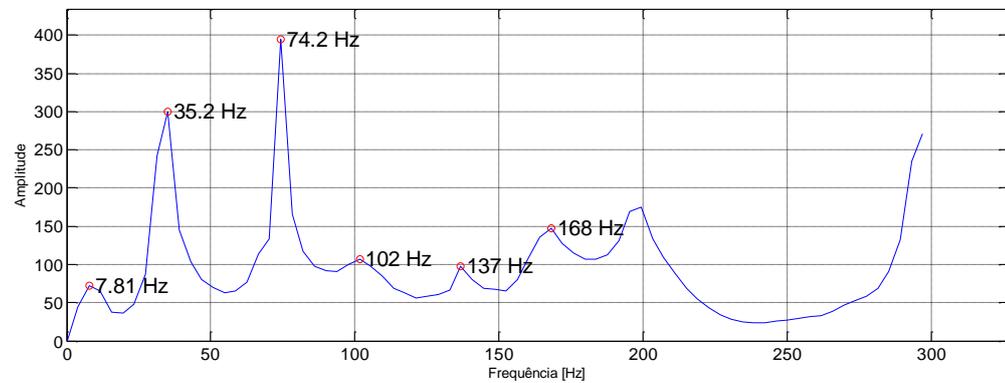


FIGURA 27 - Canal 6

O canal que permitiu a melhor identificação das cinco primeiras frequências naturais foi o de número 1 (Figura 20). Após a identificação do melhor canal, foi feita a análise pelo método RD+ITD.

Os parâmetros de entrada foram: taxa de amostragem (4000 Hz), número de frequências (10), porcentagem de pontos utilizados no sinal (0.03, isto é, 3% da duração total do ensaio) e canal (1). Para o ITD, os parâmetros foram:  $T_i$  (2) e  $T_f$  (21), resultando num "ndeltat" igual a 20.

Foi avaliada cada condição separadamente e a que apresentou as frequências com menor erro em relação às calculadas analiticamente (Tabela 14) foi a “Passagem por Zero com Inclinação Positiva”. As Tabelas 15 e 16 a seguir apresentam as frequências e as taxas de amortecimento, respectivamente, identificadas pelas condições de desencadeamento da técnica do Decremento Aleatório juntamente com a técnica de Ibrahim. A condição destacada foi a escolhida, por apresentar os melhores resultados.

**TABELA 15** - Valores das frequências identificadas pelas condições de desencadeamento do método RD+ITD para uma viga biapoiada com ensaio do tipo aleatório.

FREQUÊNCIA (Hz) - RD + ITD			
Passagem de nível	Extremo local	Passagem por zero com inclinação positiva	Pontos positivos
33,43	33,41	33,27	33,42
73,76	73,78	73,76	73,78
136,24	136,22	136,30	136,20
221,96	201,59	214,47	188,16
0,00	0,00	0,00	0,00

**TABELA 16** - Valores das taxas de amortecimento identificadas pelas condições de desencadeamento do método RD+ITD para uma viga biapoiada com ensaio do tipo aleatório.

TAXA DE AMORTECIMENTO (%) - RD + ITD			
Passagem de nível	Extremo local	Passagem por zero com inclinação positiva	Pontos positivos
5,23	3,98	3,92	3,51
0,00	0,63	0,61	0,61
0,00	0,34	0,37	0,33
0,00	9,85	6,33	0,07
0,00	6,35	0,00	0,00

As frequências naturais identificadas pela “Passagem Por Zero Com Inclinação Positiva” foram próximas das frequências calculadas analiticamente. Porém, deve-se ressaltar que o RD+ITD não foram capazes de identificar a 1ª frequência de 8,59 Hz e sua respectiva taxa de amortecimento.

As formas de vibração modais obtidas pelo RD + ITD estão representadas pela Figura 28 a seguir:

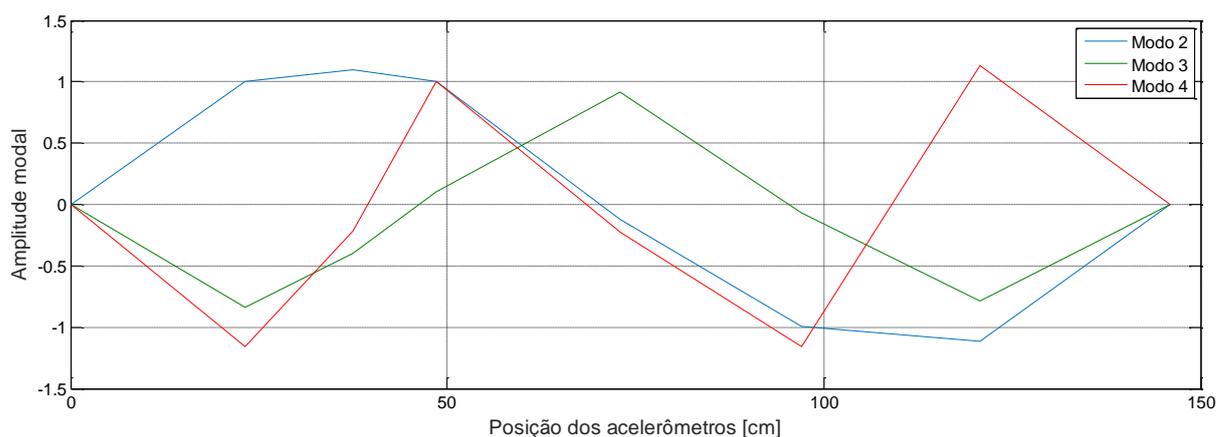


FIGURA 28 - Modos de Vibração – RD + ITD.

O RD+ITD conseguiu identificar corretamente apenas o 2º, 3º e 4º modos de vibração. Como esta técnica não conseguiu identificar a primeira frequência, o primeiro modo de vibração não foi possível de se obter.

Para o SSI, os parâmetros foram: ordem mínima (10), ordem máxima (150), intervalo da ordem (2), taxa de amostragem (4.000), tempo inicial do sinal (1) e número de pontos utilizados no sinal (100.000). A ordem do modelo utilizada foi 12; os resultados são mostrados na Tabela 17:

TABELA 17 - Frequências e taxas de amortecimento identificadas pela Identificação Estocástica em Subespaços.

SSI	
Frequência (Hz)	Taxa de amortecimento (%)
9,03	14,63
33,88	2,76
74,01	0,45
136,45	0,26
200,54	1,78

O SSI conseguiu identificar bem as frequências naturais da viga quando submetida a um ensaio de vibração aleatória.

As formas de vibração modais obtidas estão representadas na Figura 29.

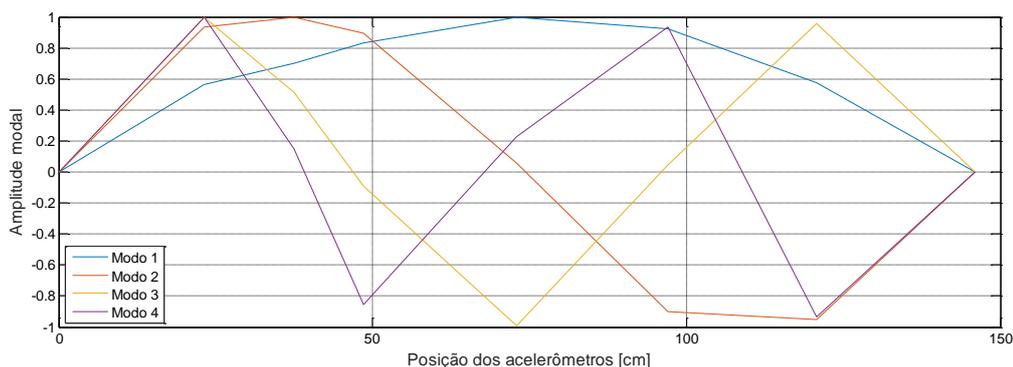


FIGURA 29 - Modos de vibração – SSI.

Percebe-se que o SSI conseguiu identificar 4 modos de vibração. Destaca-se que o primeiro modo de vibração foi identificado, o que não ocorreu no caso do RD+ITD.

A Tabela 18 mostra o resultado das técnicas RD+ITD e SSI e seus respectivos erros, em porcentagem, quando comparados com as frequências naturais calculadas analiticamente e a Figura 30 mostra um gráfico comparativo das técnicas estudadas neste trabalho.

TABELA 18 - Tabela comparativa para a estrutura com ensaio de vibrações aleatórias.

ALEATÓRIO				
Frequência teórica (Hz)	RD+ITD (Hz)	Erro (%)	SSI (Hz)	Erro (%)
8,59	-	-	9,03	5,18
34,36	33,27	-3,16	33,88	-1,40
77,31	73,76	-4,59	74,01	-4,27
137,44	136,30	-0,83	136,45	-0,72
214,74	214,47	-0,13	200,54	-6,61

Os métodos de identificação modal apresentaram erros pequenos e parecidos. Porém, os erros apresentados pelo SSI foram menores; apenas o erro relativo a frequência de 214,74 Hz foi maior.

Nesse ensaio, a técnica RD+ITD não identificou a primeira frequência e, conseqüentemente, não identificou também o primeiro modo vibracional. Ambas as técnicas não identificaram o quinto modo vibracional, uma vez que é um modo de frequência elevada e dificilmente excitada.

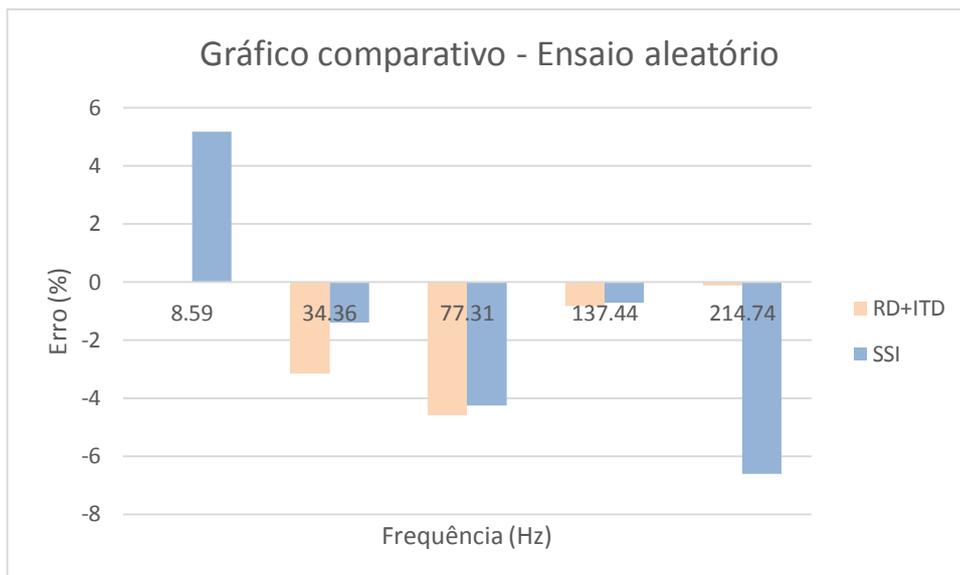


FIGURA 30 - Gráfico comparativo das técnicas de identificação modal para uma viga com ensaio aleatório.

### 3.2.2 Ensaio de impacto

Neste caso, foi utilizado um martelo de impacto a cada 10 segundos. Com a taxa de aquisição de dados de 4000 Hz e um tempo de  $2,5 \times 10^6$  de cada série. Com esses dados, foi gerado o gráfico do sinal temporal, dado pela Figura 31.

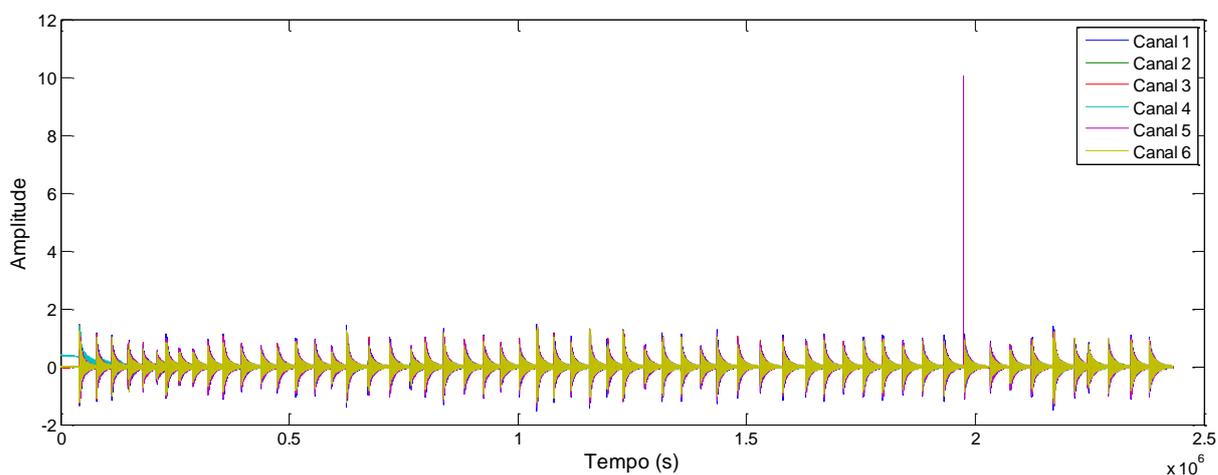


FIGURA 31 – Sinal temporal de uma viga biapoada para ensaio de impacto.

Primeiramente foi utilizada a Transformada Rápida de Fourier com a finalidade de verificar qual o melhor canal. As figuras seguintes (Figuras 32, 33, 34, 35, 36 e 37) são os gráficos que representam, respectivamente: canal 1, canal 2, canal 3, canal 4, canal 5 e canal 6:

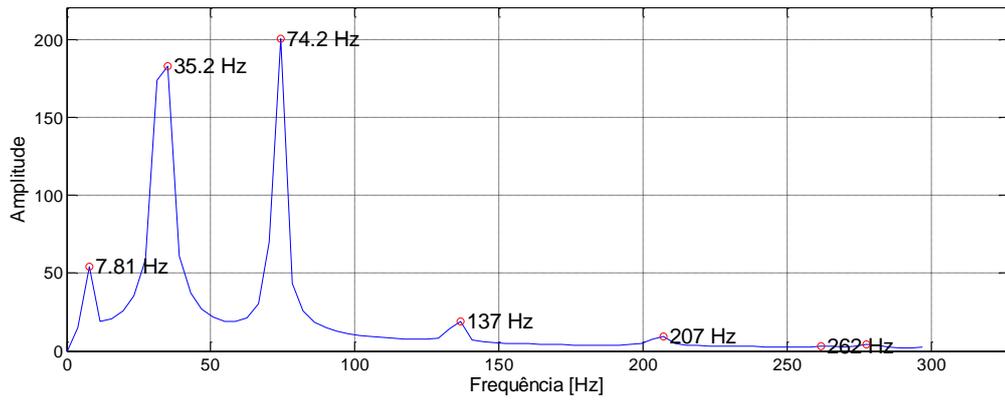


FIGURA 32 - Canal 1.

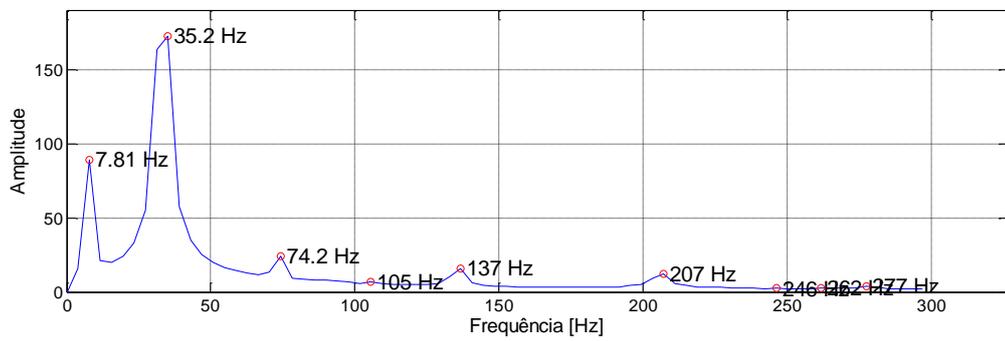


FIGURA 33 - Canal 2.

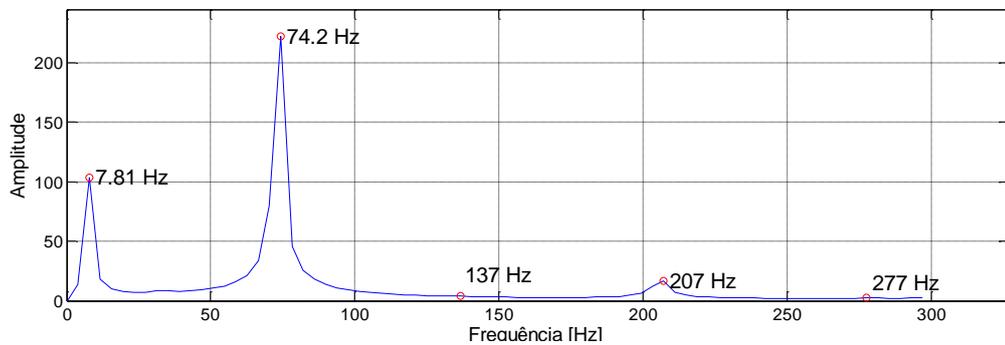


FIGURA 34 - Canal 3.

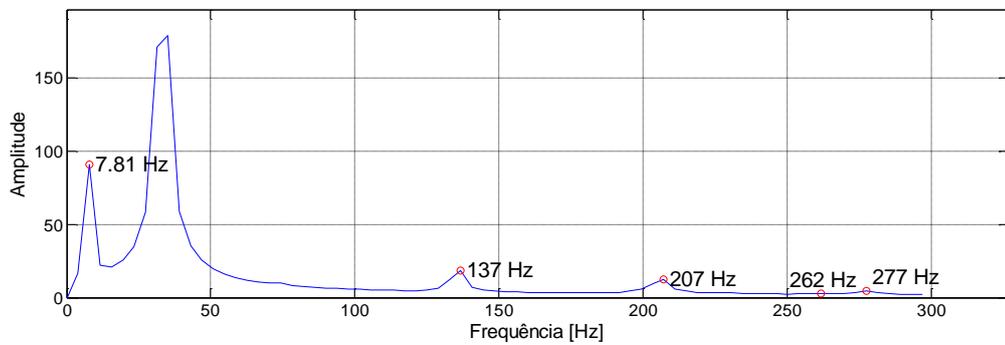


FIGURA 35 - Canal 4.

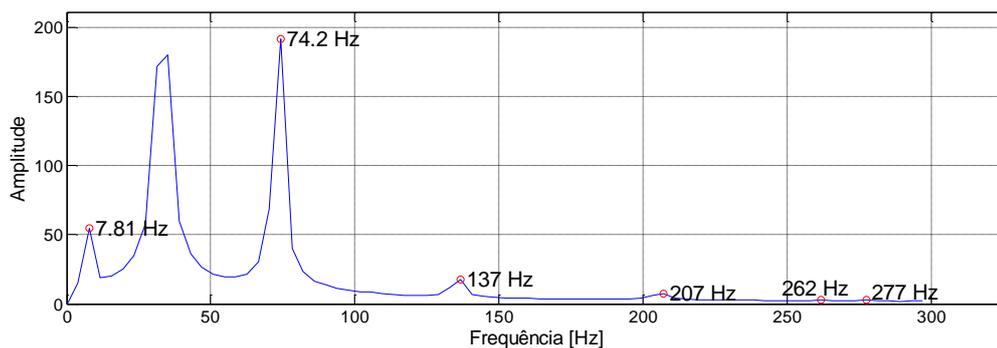


FIGURA 36 - Canal 5.

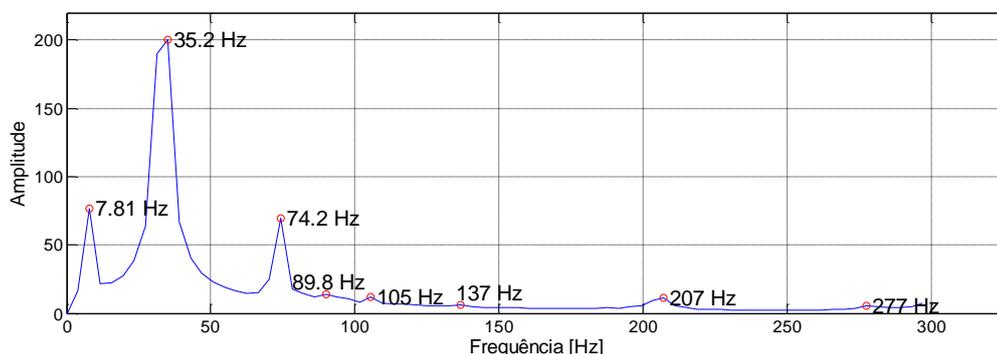


FIGURA 37 - Canal 6.

Similar à viga ensaiada com vibrações aleatórias, o melhor canal foi o de número 1. Após a identificação do melhor canal foi feita a análise pelo método do Decremento Aleatório com o método de Ibrahim. Os parâmetros de entrada utilizados foram: taxa de amostragem (4000 Hz), número de frequências (7), porcentagem de pontos utilizados no sinal (0.001) e canal (1).

Os resultados obtidos por cada condição de desencadeamento, em relação à frequência e taxa de amortecimento estão apresentados nas Tabelas 19 e 20, respectivamente. A condição que apresentou melhores resultados para esse ensaio foi a “Pontos Positivos”.

**TABELA 19** - Valores das frequências identificadas pelas condições de desencadeamento do método RD+ITD para uma viga biapoiada com ensaio do tipo impacto.

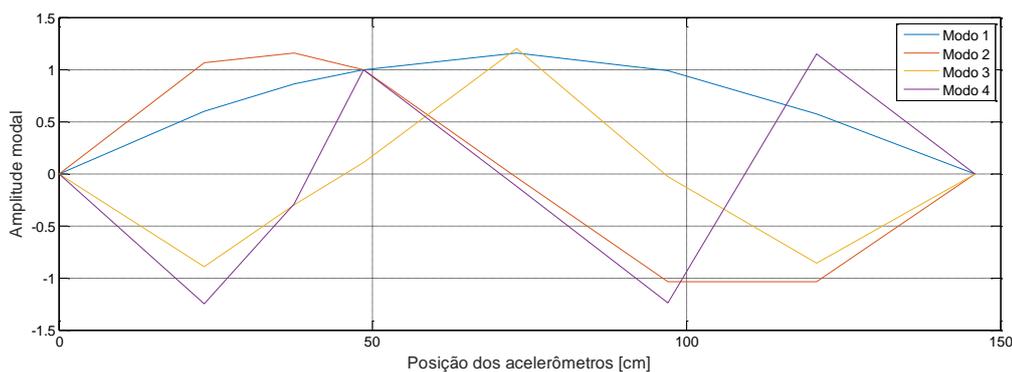
FREQUÊNCIA (Hz) - RD + ITD			
Passagem de nível	Extremo local	Passagem por zero com inclinação positiva	Pontos positivos
-	8,07	-	8,28
33,25	33,24	33,26	33,24
73,26	73,25	73,26	73,26
123,81	133,78	134,93	135,07
0,00	196,57	192,59	195,64

**TABELA 20** - Valores das taxas de amortecimento identificadas pelas condições de desencadeamento do método RD+ITD para uma viga biapoiada com ensaio do tipo impacto.

TAXA DE AMORTECIMENTO (%) - RD + ITD			
Passagem de nível	Extremo local	Passagem por zero com inclinação positiva	Pontos positivos
-	8,99	-	0,40
0,14	0,16	0,14	0,16
0,15	0,16	0,13	0,15
3,32	0,48	0,26	0,17
0,00	2,27	2,65	2,56

A condição “Pontos Positivos” gerou frequências próximas às frequências analíticas.

As formas de vibração modais obtidas pelo RD + ITD estão representadas na Figura 38:



**FIGURA 38** - Modos de Vibração – RD + ITD.

Percebe-se que o RD + ITD conseguiu identificar os quatro primeiros modos vibracionais da viga.

Para o SSI, os parâmetros de entrada foram os mesmos utilizados no ensaio do tipo aleatório, exceto a ordem do modelo escolhida, que para o ensaio com impacto foi 10. A Tabela 21 apresenta os resultados (frequências e taxas de amortecimento) identificados pelo SSI.

**TABELA 21** - Frequências e taxas de amortecimento identificadas pela identificação Estocástica em Subespaços.

SSI	
Frequência (Hz)	Taxa de amortecimento (%)
8,21	2,96

33,24	0,24
73,27	0,11
135,25	0,09
205,33	0,43

O SSI também identificou frequências similares às analíticas. As formas de vibração modais obtidas pelo SSI estão representadas na Figura 39:

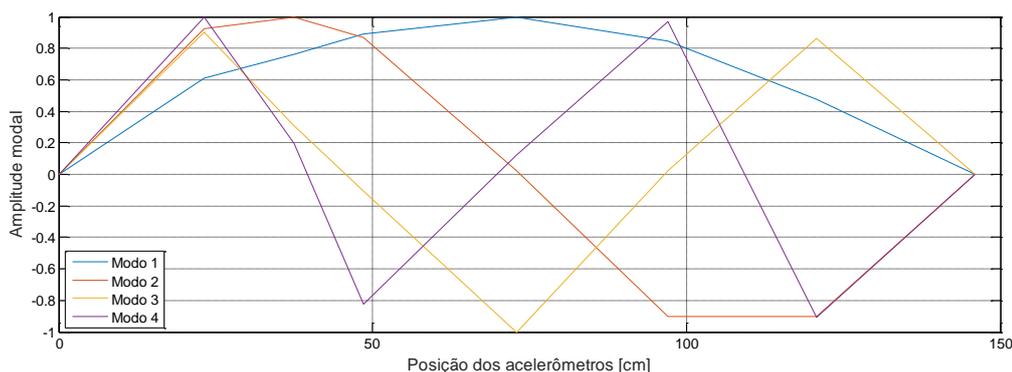


FIGURA 39 - Modos de Vibração – SSI.

Novamente, não foi possível obter o quinto modo de vibração.

A Tabela 22 apresenta o resultado das técnicas RD+ITD e SSI e seus respectivos erros, em porcentagem, quando comparados com as frequências naturais calculadas analiticamente. E a Figura 40 ilustra essa comparação entre as técnicas RD+ITD e SSI.

TABELA 22 - Tabela comparativa para a estrutura com ensaio do tipo impacto.

IMPACTO				
Frequência teórica (Hz)	RD+ITD (Hz)	Erro (%)	SSI (Hz)	Erro (%)
8,59	8,28	-3,60	8,21	-4,38
34,36	33,24	-3,26	33,24	-3,26
77,31	73,26	-5,24	73,27	-5,23
137,44	135,07	-1,73	135,25	-1,60
214,74	195,64	-8,89	205,33	-4,38

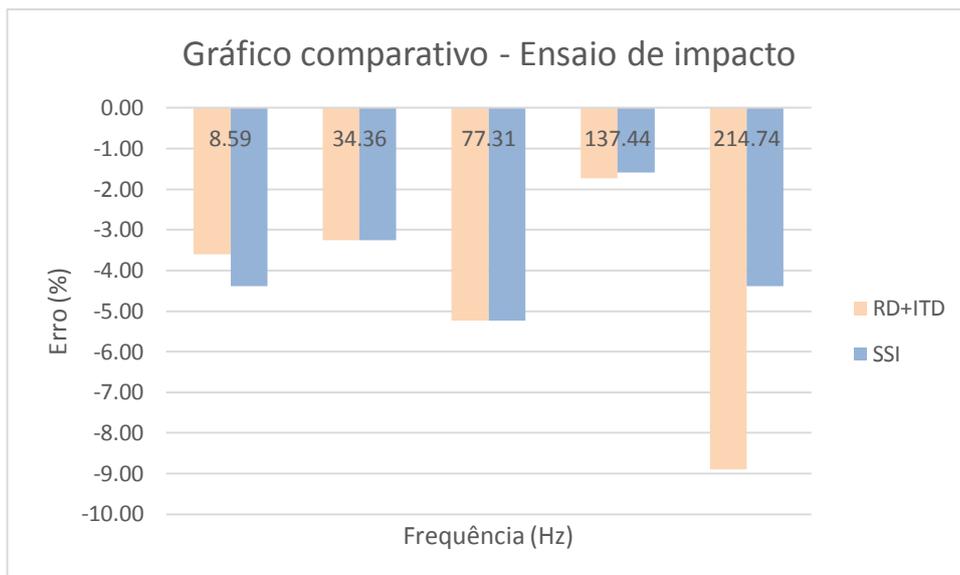


FIGURA 40 - Gráfico comparativo das técnicas de identificação modal para uma viga com ensaio de impacto.

Observando a Tabela 22 e a Figura 40, que comparam os métodos, percebe-se que os erros que as técnicas apresentaram foram pequenos e parecidos. Na média, o SSI também foi melhor.

### 3.3 Ponte PI-57 sobre o rio Oise

A Ponte PI-57 situada na cidade de Morue, no departamento de Oise, na França, é uma estrutura de concreto protendido, construída nos anos 1964-1965. Ela transpõe o Rio Oise e permite a continuidade da estrada A1, que liga Paris à cidade de Lille.

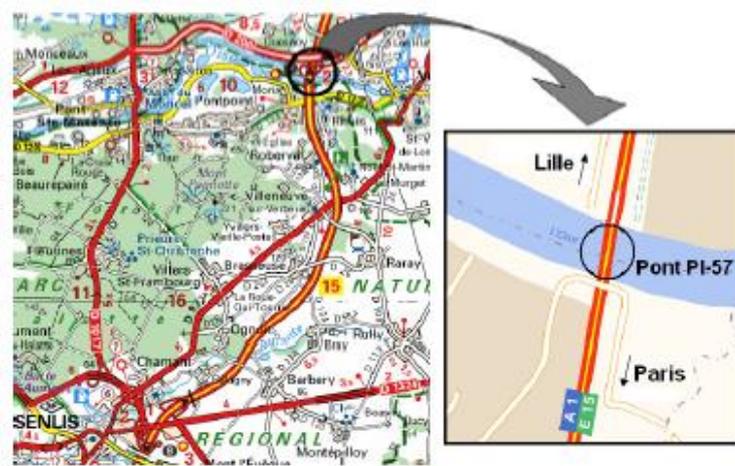


FIGURA 41 - Localização da Ponte PI-57. FONTE - Cury, 2010.

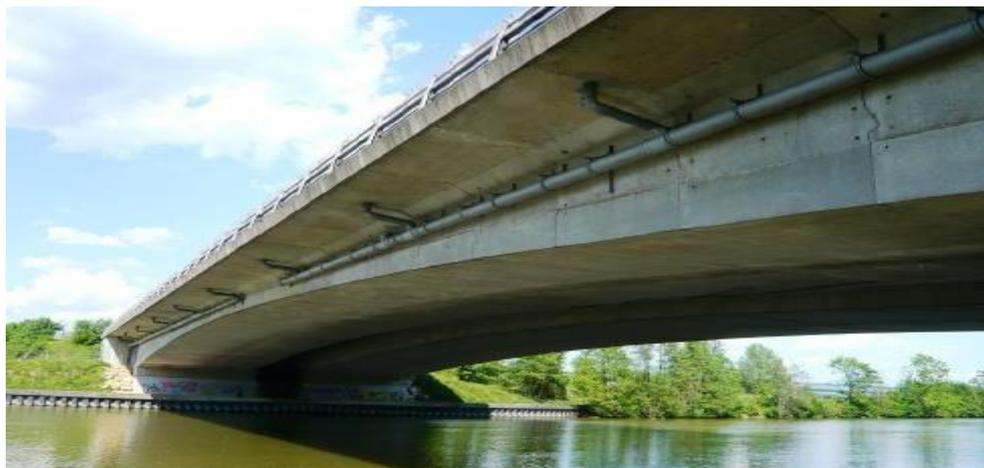


FIGURA 42 - Ponte sobre o Rio Oise. FONTE – Cury, 2010.



FIGURA 43 - Vista do limite da ponte.



FIGURA 44 – Vista do vão central da Ponte.

O ensaio da PI-57 foi por identificação modal estocástica, que é realizado sob ações ambientais, como o tráfego, o vento, etc. Foram instrumentados 16 (dezesesseis) acelerômetros no interior do tabuleiro correspondente à direção Lille - Paris, formando o sistema de aquisição de dados. Eles são do tipo piezoelétricos 4507B-005 de Bruël&Kjaær (tecnologia IEPE, -54 a 100° C) de sensibilidade 1 V/g,  $\pm$  5 g. Os acelerômetros foram posicionados com esquadros de fixação em alumínio, como mostra a Figura 45 (Cury *et al.*).



FIGURA 45 - Acelerômetros posicionados. FONTE – Cury, 2010.

A Figura 46 a seguir mostra um esquema de disposição dos acelerômetros.

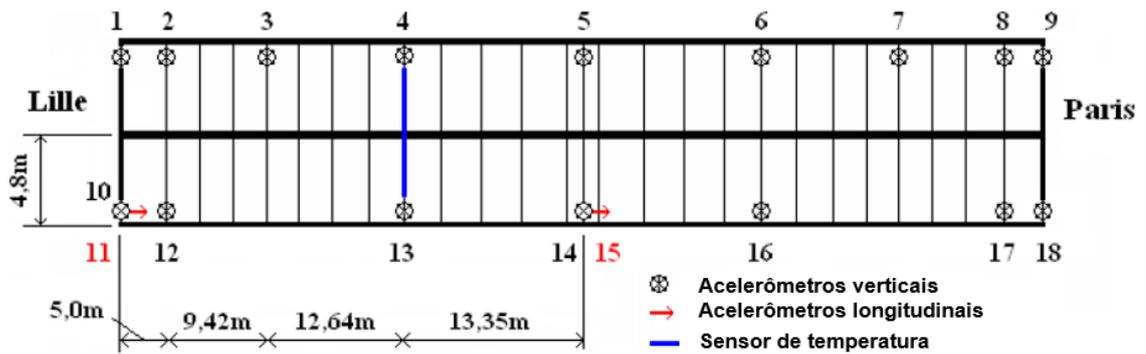


FIGURA 46 - Disposição dos acelerômetros na ponte. FONTE – Cury, 2010.

A amostragem de sinais é fixada a 250 Hz, durante um período de 5 minutos a cada 3 horas. O sinal temporal da estrutura ensaiada foi obtido pelos acelerômetros verticais, como mostra a Figura 47.

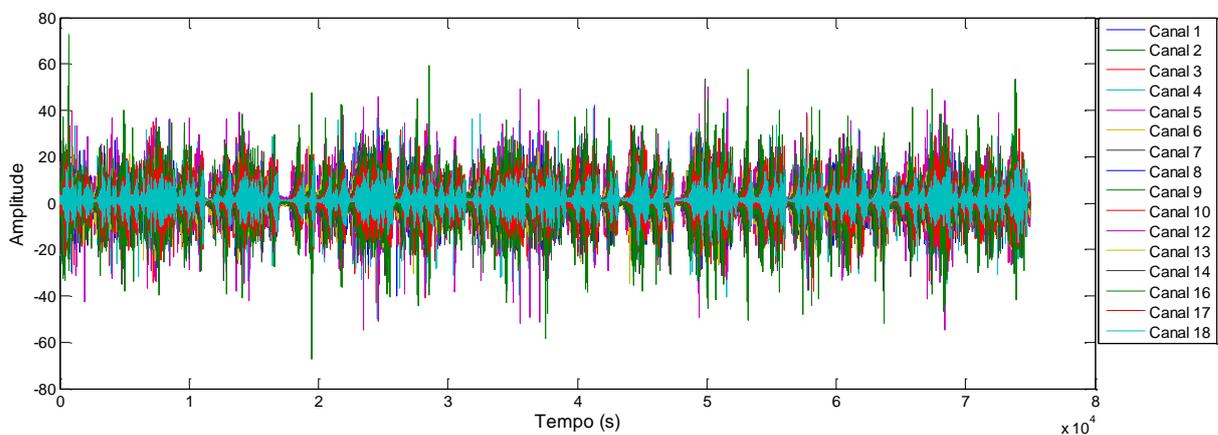


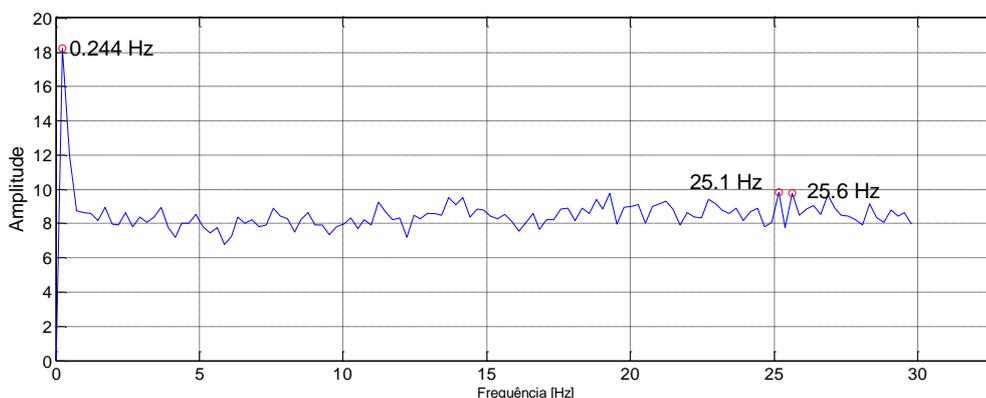
FIGURA 47 – Sinal temporal da ponte PI – 57.

Primeiramente, foi realizado um estudo usando a FFT, com o objetivo de escolher o melhor acelerômetro para prosseguir com as análises. Os dados de entrada foram: canal (apenas os acelerômetros verticais), número de pontos utilizados do sinal (1024), taxa de amostragem (250 Hz), sensibilidade (0,90) e frequência máxima (30 Hz). As frequências naturais desta ponte, segundo um modelo MEF desenvolvido na tese de (Cury, 2010), são apresentadas na Tabela 23.

**TABELA 23** – Frequências naturais da ponte PI – 57.

Frequências Naturais (Hz)
2,23
4,89
6,84
8,48
11,00
14,05
16,69

Os resultados dos canais verticais (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 16, 17 e 18) obtidos pela FFT são mostrados, nas Figuras 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62 e 63, respectivamente:



**FIGURA 48** – Canal 1.

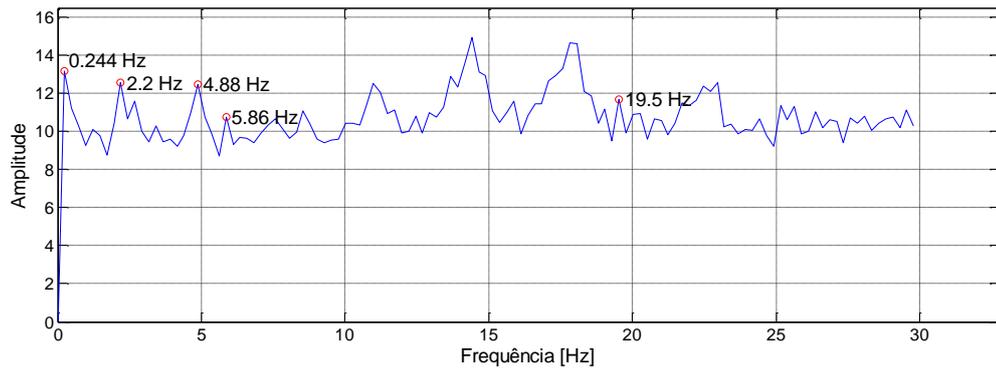


FIGURA 49 – Canal 2.

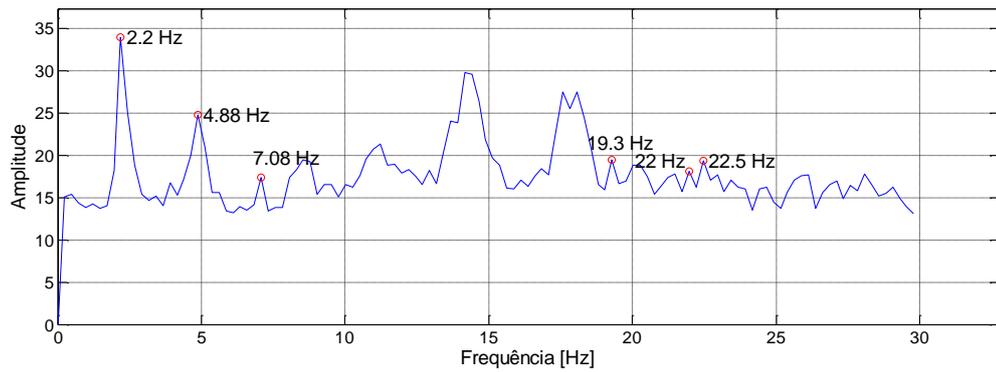


FIGURA 50 – Canal 3.

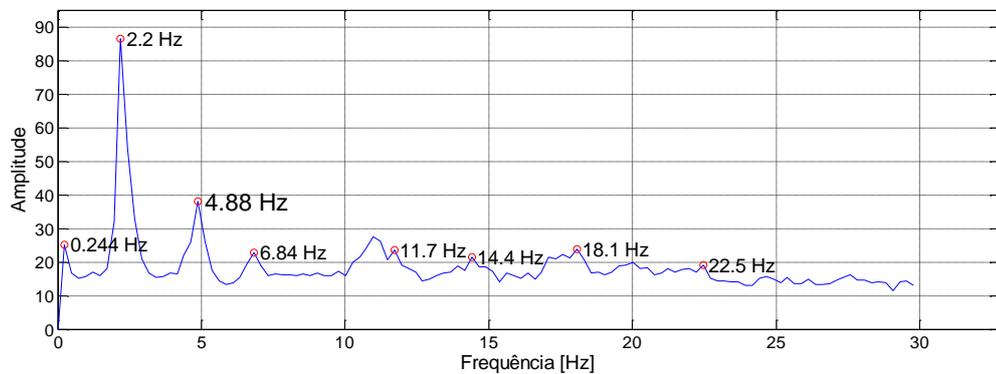


FIGURA 51 - Canal 4.

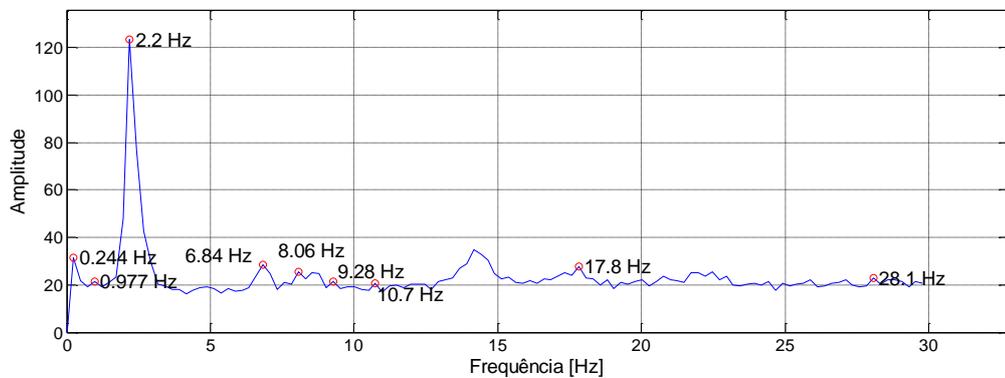


FIGURA 52 - Canal 5.

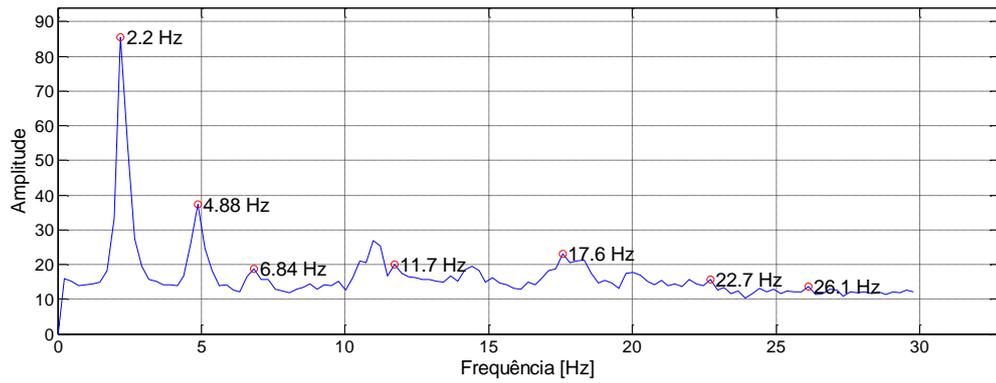


FIGURA 53 – Canal 6.

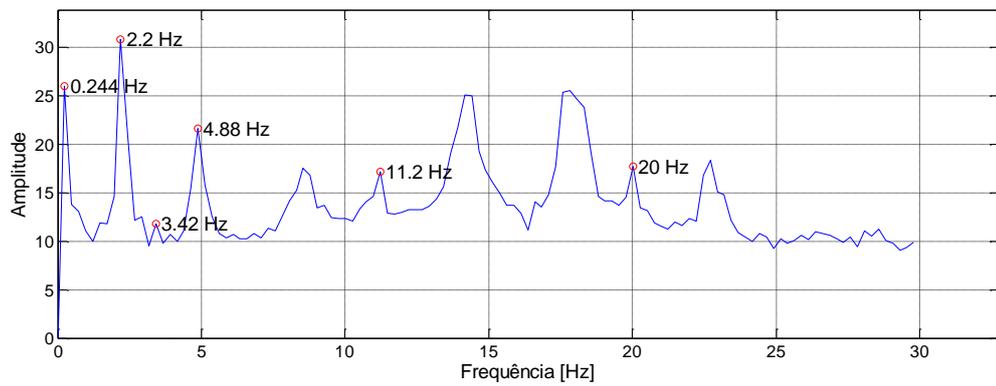


FIGURA 54 – Canal 7.

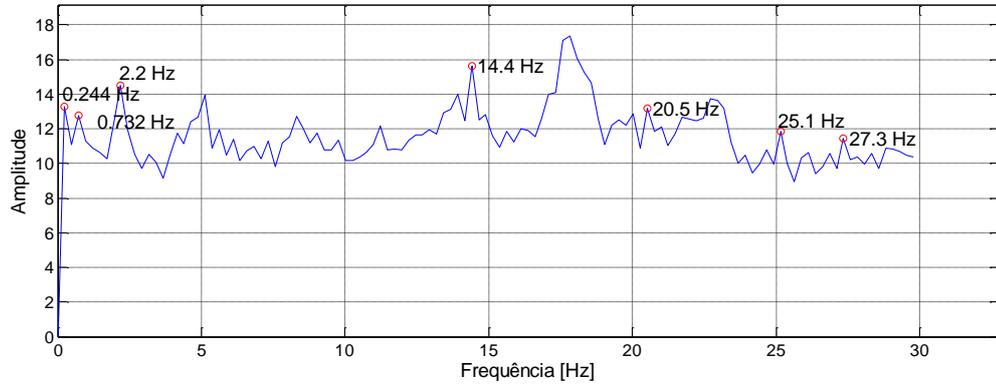


FIGURA 55 – Canal 8.

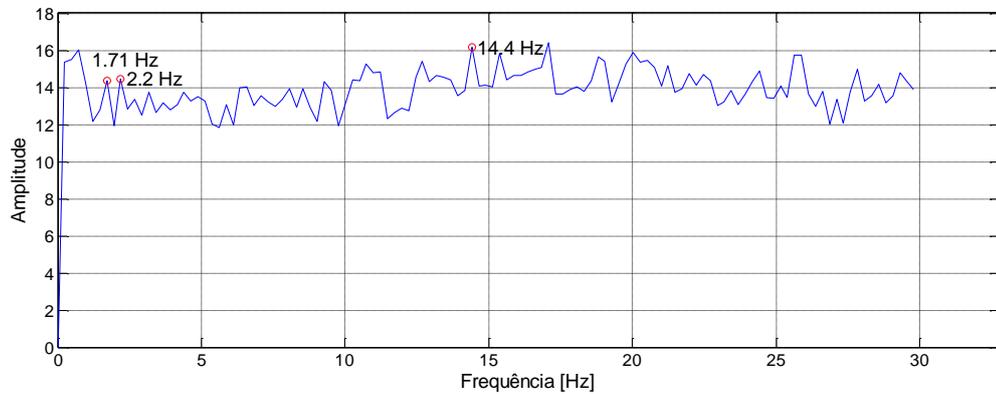


FIGURA 56 – Canal 9.

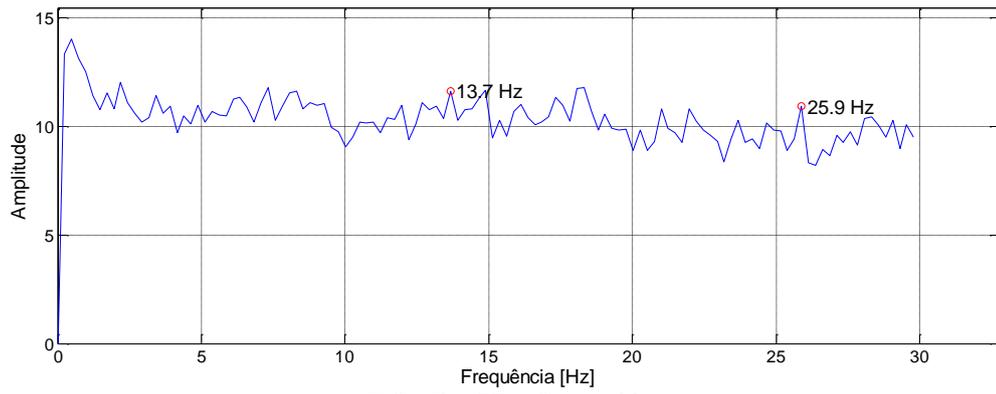


FIGURA 57 – Canal 10.

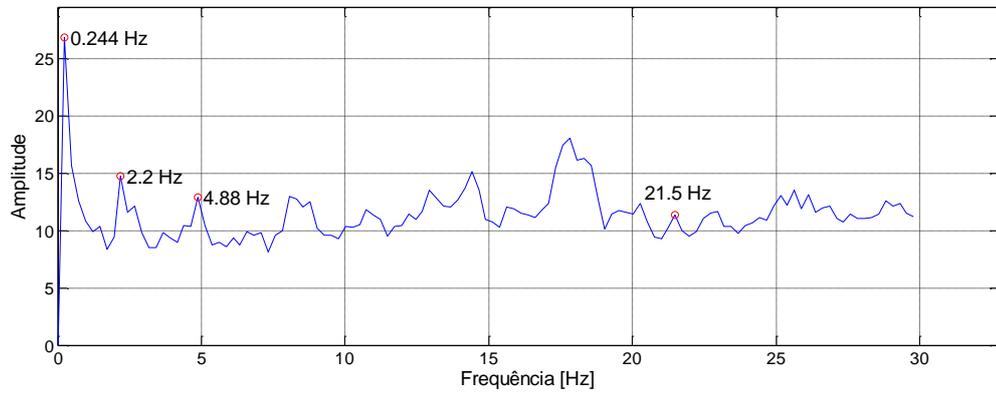


FIGURA 58 – Canal 12.

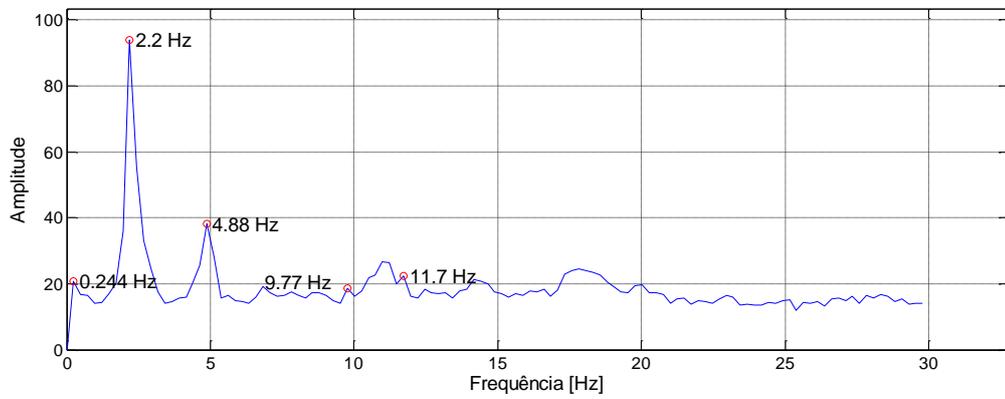


FIGURA 59 – Canal 13.

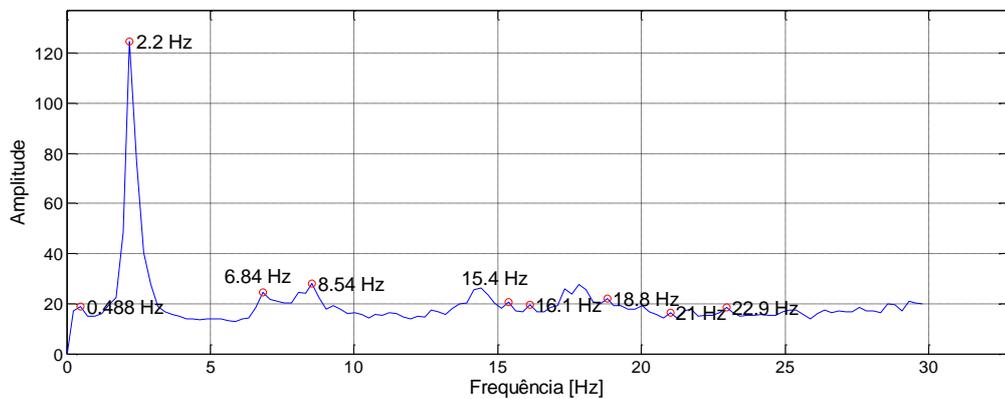


FIGURA 60 – Canal 14.

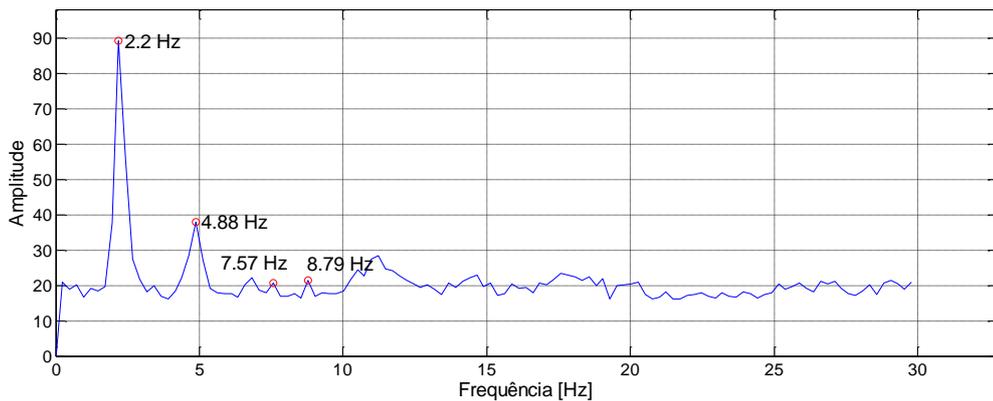


FIGURA 61 – Canal 16.

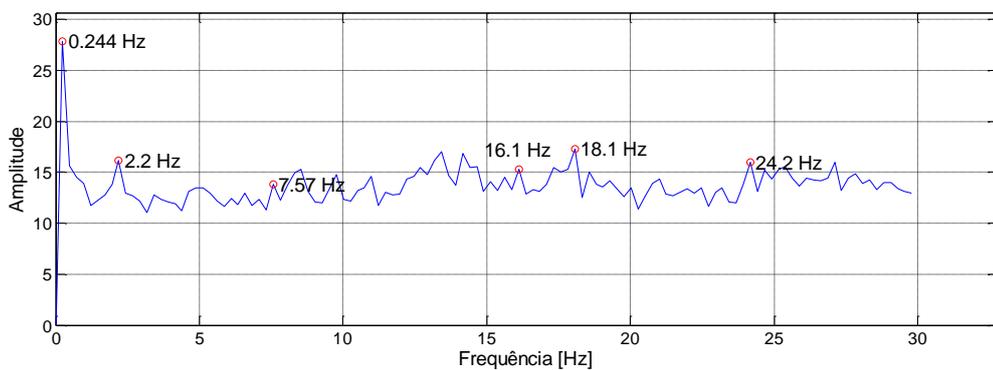


FIGURA 62 – Canal 17.

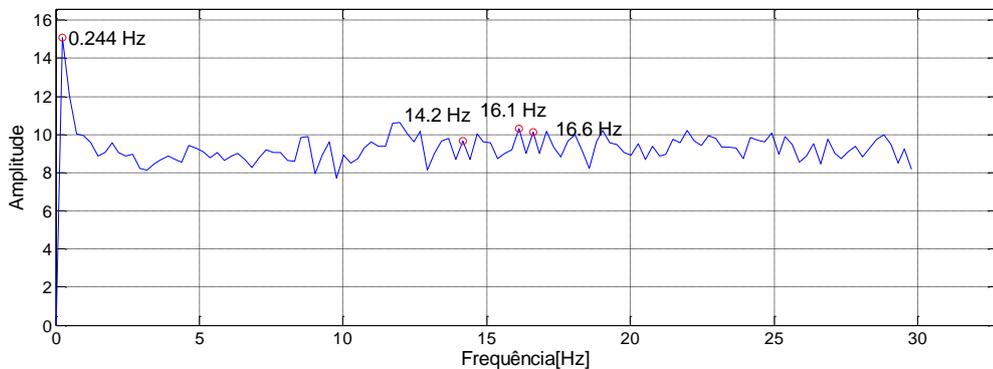


FIGURA 63 – Canal 18.

O canal que apresentou o maior número de picos representativos foi o de número 4 (Figura 51). Após a verificação de qual seria o melhor canal, foram utilizados os métodos RD+ITD.

Para o RD+ITD foram inseridos os seguintes dados de entrada: taxa de amostragem (250 Hz), número de frequências (10), porcentagem de pontos utilizados no sinal (0.005) e canal (4). O número de pseudomedidas foi alterado para 30 neste caso, com  $T_i$  (2) e  $T_f$  (31). E a condição de desencadeamento que gerou algum resultado foi a “Passagem de nível”. O resultado apresentado por esta condição de desencadeamento está representado pela Tabela 24:

**Tabela 24** - Valores das frequências e das taxas de amortecimento identificados pelo RD+ITD para a ponte PI - 57.

RD+ITD	
Frequência (Hz)	Taxa de amortecimento (%)
2,24	7,56

A única frequência que este modo conseguiu identificar foi a primeira. Este resultado demonstra a dificuldade do método RD+ITD em se realizar a identificação modal de estruturas sob vibrações ambientes.

Para o SSI, os dados de entrada foram: ordem mínima (10), ordem máxima (150), intervalo da ordem (1), taxa de amostragem (250), tempo inicial do sinal (1) e número de pontos utilizados no sinal (15000).

A ordem do modelo que gerou os melhores resultados foi a 18. Os valores das frequências e das taxas de amortecimento são mostrados na Tabela 25.

**TABELA 25** - Valores das frequências e das taxas de amortecimento identificadas pelo SSI para a ponte PI - 57.

SSI	
Frequência (Hz)	Taxa de amortecimento (%)
2,28	1,14
4,88	1,16
6,83	1,42
8,45	1,48
11,07	1,58
14,25	1,80
17,87	1,95

Na Tabela 26 é apresentado o erro (em porcentagem %) do método SSI em relação às frequências naturais calculadas no modelo MEF.

**TABELA 26** - Comparação entre a frequência teórica e a frequência obtida pela Identificação Estocástica em Subespaços (SSI) para a ponte PI – 57.

Frequência Numérica (Hz)	SSI (Hz)	Erro (%)
2,23	2,28	2,31
4,89	4,88	-0,22
6,84	6,83	-0,14
8,48	8,45	-0,32
11,00	11,07	0,63
14,05	14,25	1,45

16,69	17,87	7,07
-------	-------	------

Novamente, o SSI apresentou erros bem pequenos em relação às frequências de referência. As formas modais de vibração podem ser vistas nas Figuras 64, 65, 66, 67, 68, 69 e 70.

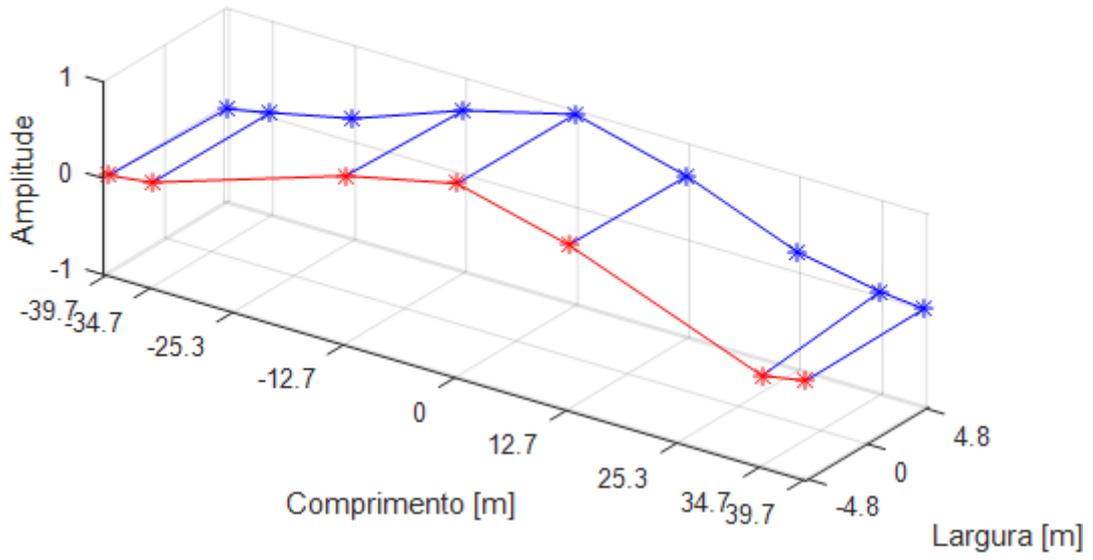


FIGURA 64 - Primeiro modo próprio.

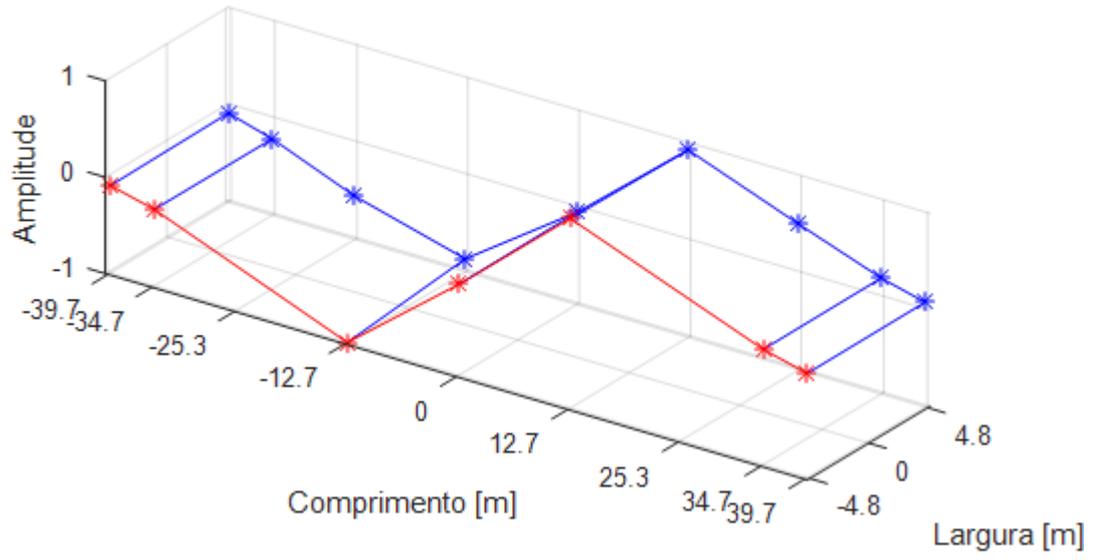


FIGURA 65 - Segundo modo próprio.

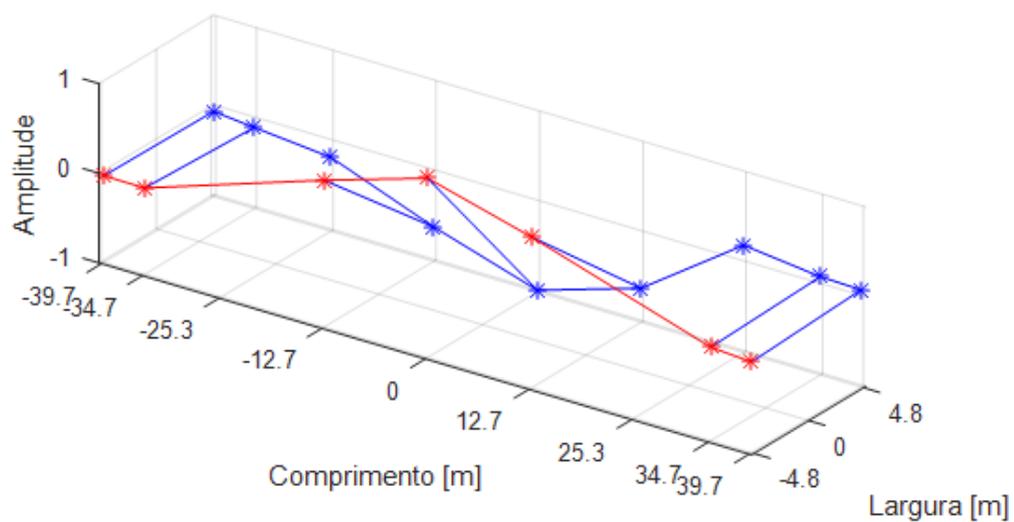


FIGURA 66 - Terceiro modo próprio.

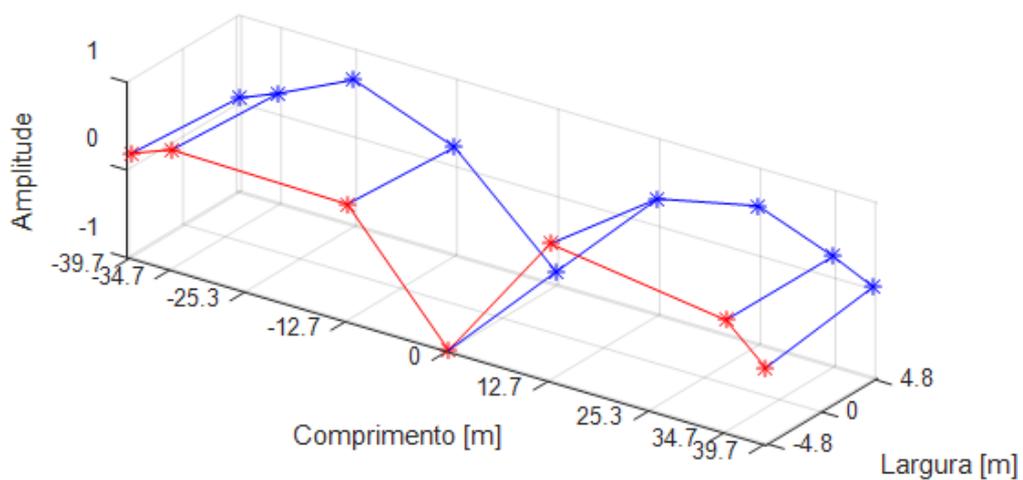


FIGURA 67 - Quarto modo próprio.

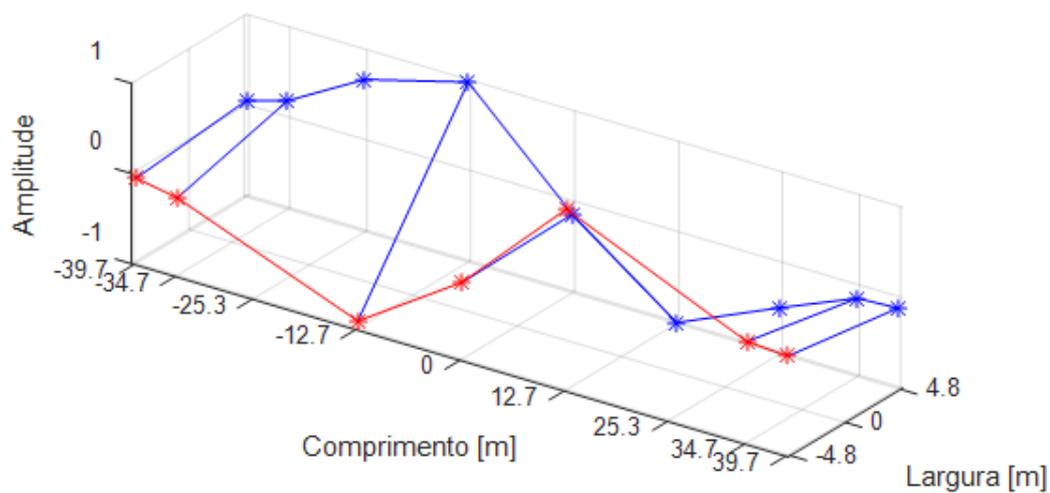


FIGURA 68 - Quinto modo próprio.

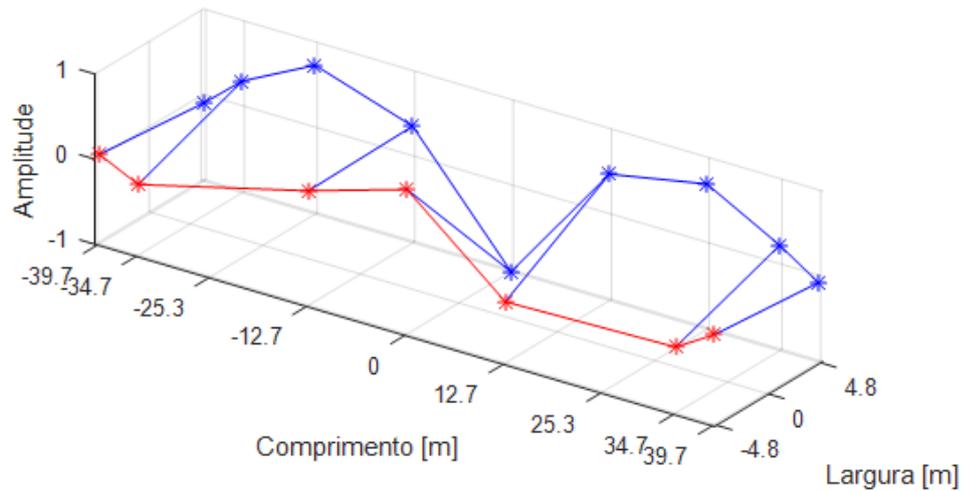


FIGURA 69 - Sexto modo próprio.

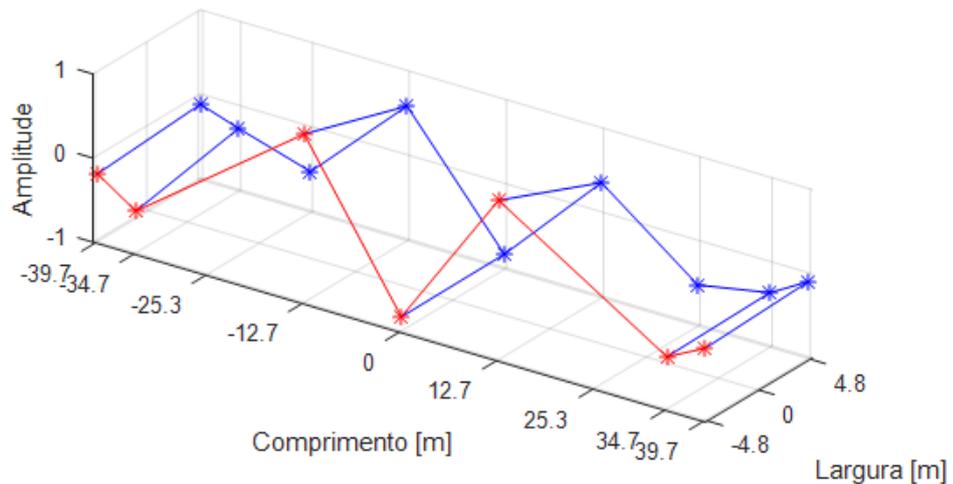


FIGURA 70 - Sétimo modo próprio.

### 3.4 Viaduto ferroviário PK 075+317

O viaduto ferroviário PK 075+317 está situado no sudeste da França, no condado de Yonne, próximo às cidades de Sens e Soucy. Ele faz a ligação das cidades de Paris e Lyon através dos trens de alta velocidade (TGV's). O monitoramento dinâmico deste viaduto foi realizado com o objetivo de caracterizar e quantificar a eficiência de um procedimento de reforço estrutural nele realizado (Crémona et al., 2003) e (Crémona, 2004). O procedimento de reforço consistiu em "apertar" os mancais de sustentação do viaduto a fim de distanciar a primeira



- 3 sensores de deslocamento vertical localizados entre o parapeito e o trilho: cada sensor é montado em um suporte fixo no parapeito e mede o deslocamento relativo entre o parapeito supostamente fixo e o trilho.
- 8 acelerômetros verticais e 2 acelerômetros horizontais (longitudinal e lateral) sob o trilho: cada acelerômetro é montado em um suporte fixado sob o trilho no nível das vigas.
- 2 sensores de passagem de trens: cada sensor mede o carregamento no eixo na entrada e na saída da estrutura.

Os suportes são fixados mecanicamente por diferentes montagens que permitem o ajuste da orientação de cada sensor. Os sensores de deslocamento e os acelerômetros são conectados através de cabos sob o pavimento (Figura 73) até um sistema de aquisição (Figura 74).



FIGURA 73 - Vistas dos sensores a2, a9 e d2. FONTE – CURY, 2010.



FIGURA 74 - Vista do sistema de aquisição de dados e dos cabos. FONTE – CURY, 2010.

A Figura 75 apresenta um esquema da localização dos sensores sob o pavimento e a numeração adotada para a determinação dos modos próprios experimentais. A fonte de excitação do pavimento dos trilhos 1 é a passagem dos TGV's sobre os trilhos. Os registros são feitos continuamente durante um período de 3,5 s.

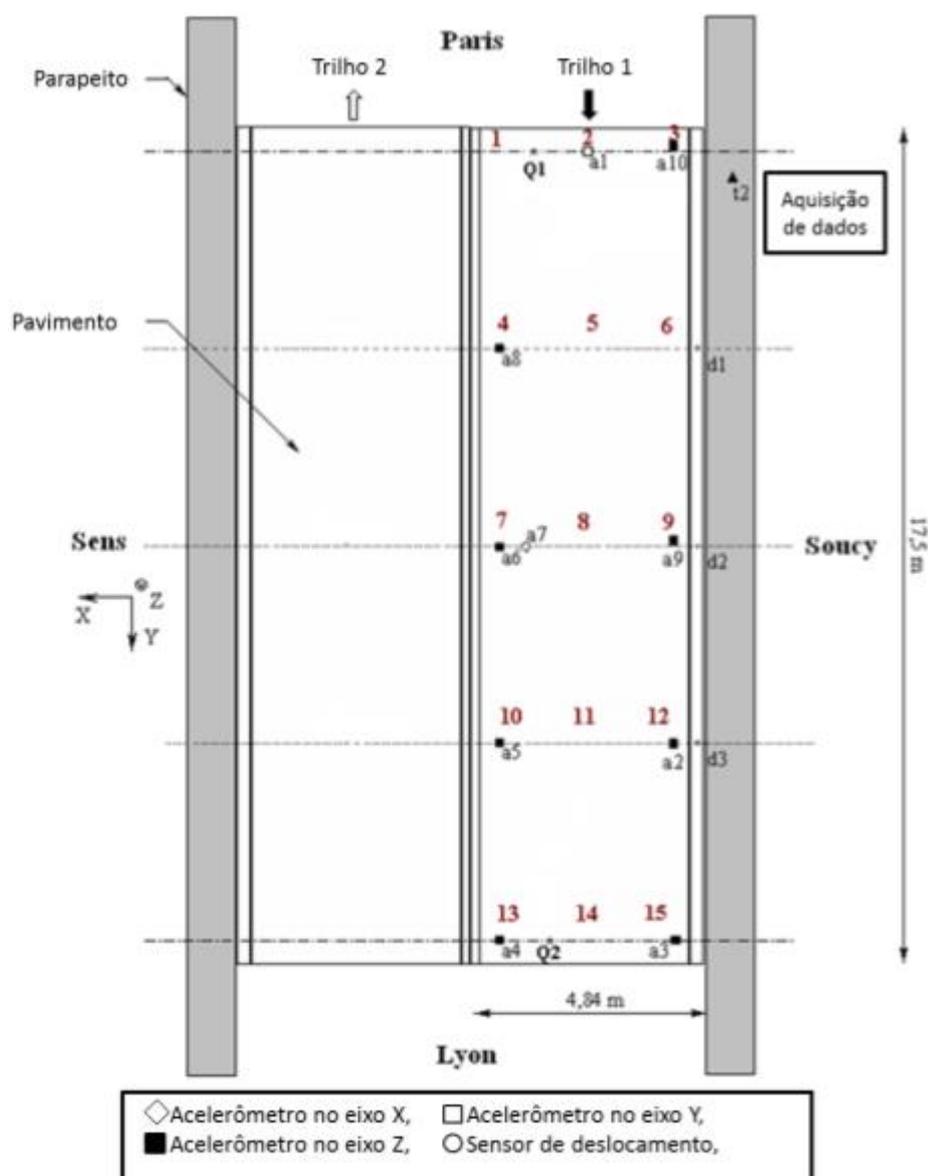


FIGURA 75 - Esquema de localização dos sensores. FONTE – Cury, 2010.

Os sensores de passagem Q1 e Q2 permitem determinar a frequência de excitação relacionada à passagem do TGV. De fato, a diferença entre o instante do primeiro pico da resposta dos sensores Q1 e Q2 permite obter a velocidade média da passagem do TGV. Por exemplo, a diferença de tempo entre os primeiros picos é

de 0,223 s, o que fornece uma velocidade média de passagem de  $17,5/0,223 = 78,47$  m.s-1. Conhecendo-se a distância entre os eixos dos vagões (18,70 m), a frequência de excitação do trem é avaliada em 4,20 Hz. (Cury, 2010)

Medições realizadas previamente na estrutura colocaram em evidência vibrações e deformações excessivas do pavimento durante a passagem do TGV. Essas constatações conduziram às modificações nas condições de apoio da estrutura. Inicialmente, a estrutura estava simplesmente apoiada e, posteriormente, foram colocados engastes mecânicos sob os apoios. Este procedimento de reforço estrutural foi realizado a fim de afastar a frequência de excitação causada pela passagem dos TGV's, da primeira frequência própria do viaduto. (Cury, 2010)

O risco de ressonância aumenta ainda mais durante a passagem do TGV, devido à massa adicional tender a diminuir a frequência própria do viaduto. Para esse procedimento de reforço, foi colocado um sistema de mancais nas extremidades da estrutura como ilustrado nas Figuras 76 e 77. Esse sistema é apertado através de uma chave de torque. (Cury, 2010)



FIGURA 76 - Representação do sistema de mancais. FONTE – CURY, 2010.

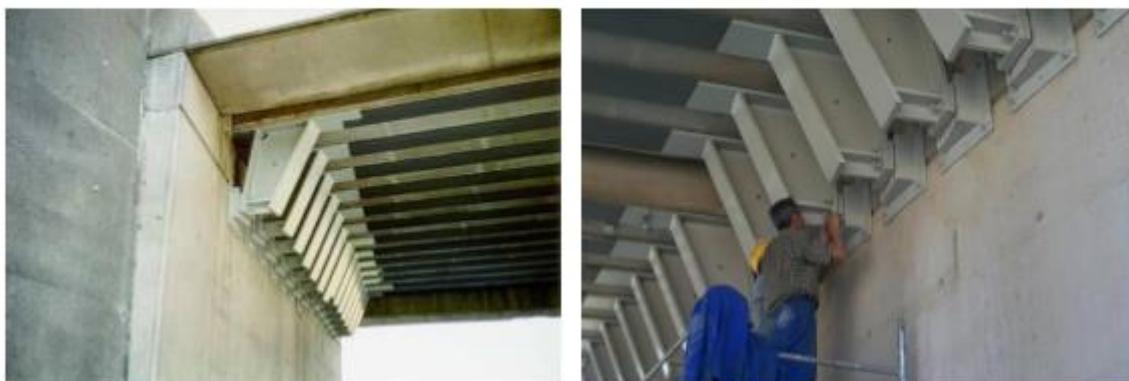


FIGURA 77 - Sistema de mancais do viaduto ferroviário. FONTE – CURY, 2010.

A resposta dinâmica obtida dos acelerômetros é representada pela Figura 78.

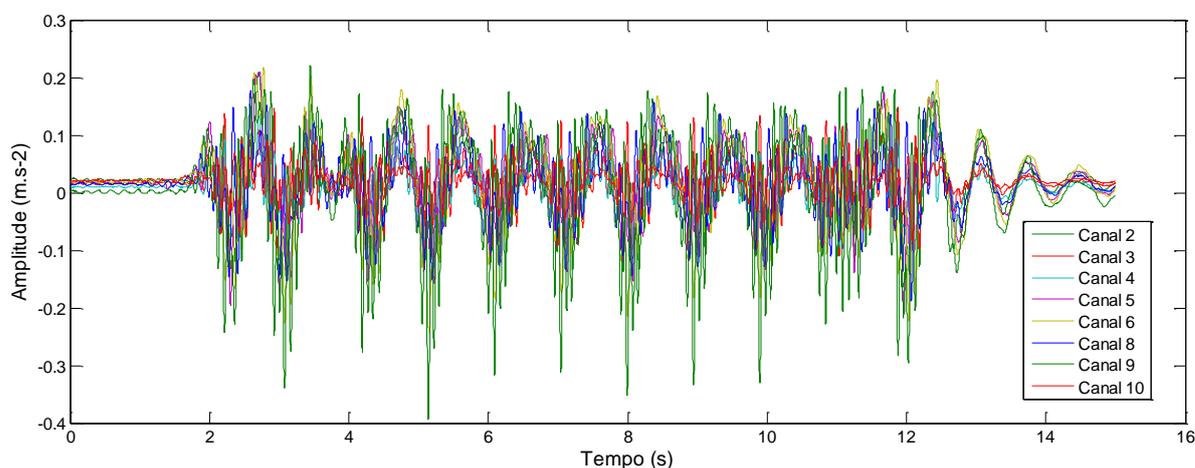


FIGURA 78 – Sinal temporal do viaduto PK 075 + 317.

Assim, como estudo inicial, foi realizado o FFT para a estrutura com os seguintes dados de entrada: canais (acelerômetros verticais), número de pontos utilizados (6144), taxa de amostragem (4096), sensibilidade (0,95) e frequência máxima (20 Hz). O valor da taxa de amostragem é bastante alto para ser possível uma boa discretização do sinal, dada a alta velocidade de passagem dos trens.

Como forma de identificar o melhor canal, foram analisados os acelerômetros verticais de número: 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 e 10, como podemos verificar nas Figuras 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85 e 86.

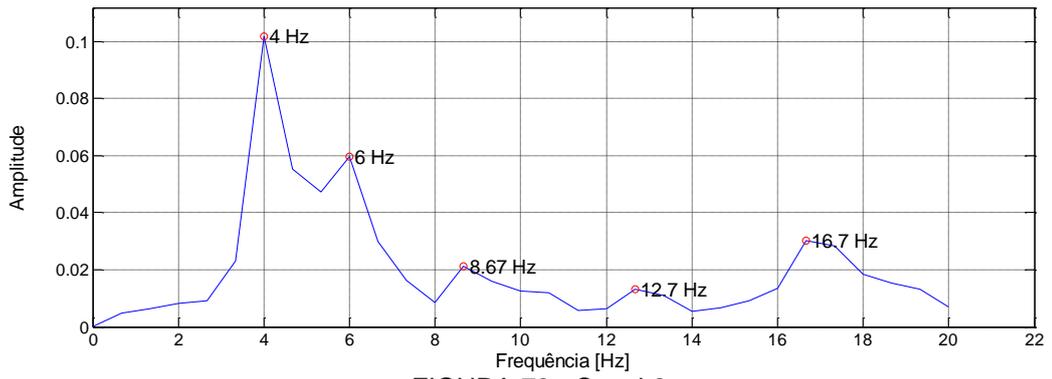


FIGURA 79 - Canal 2.

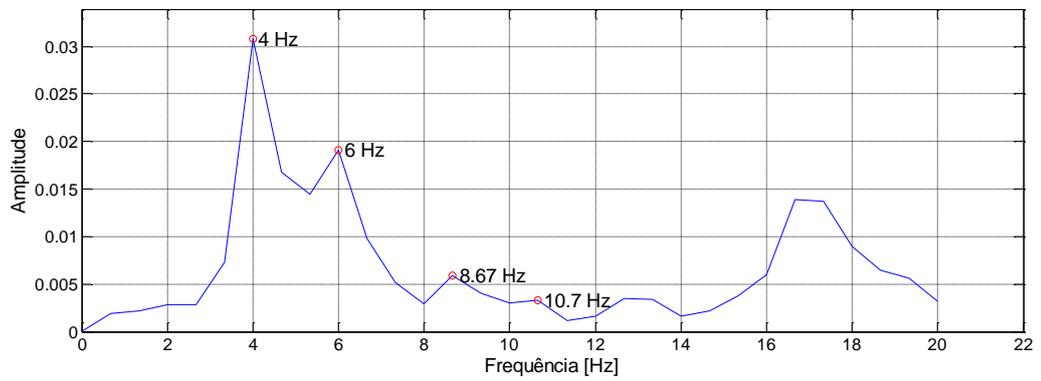


FIGURA 80 - Canal 3.

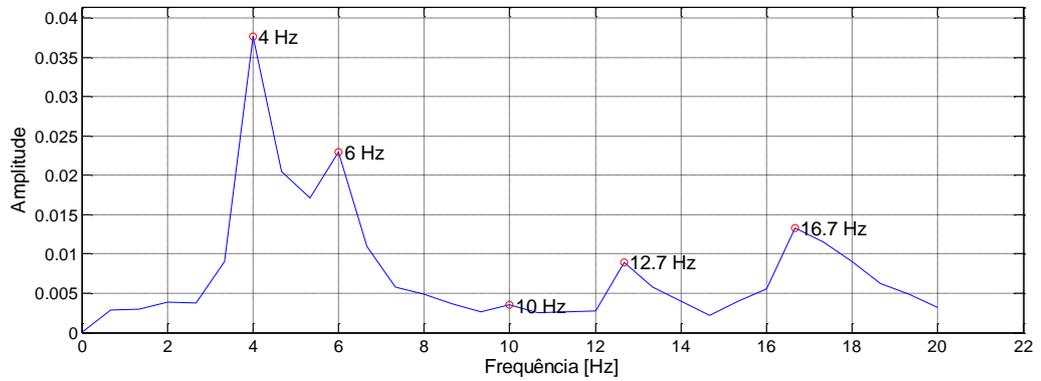


FIGURA 81 - Canal 4.

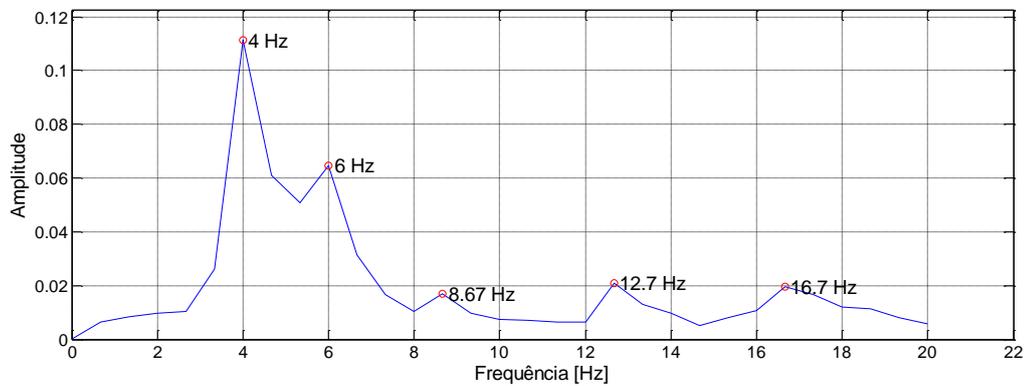


FIGURA 82 - Canal 5.

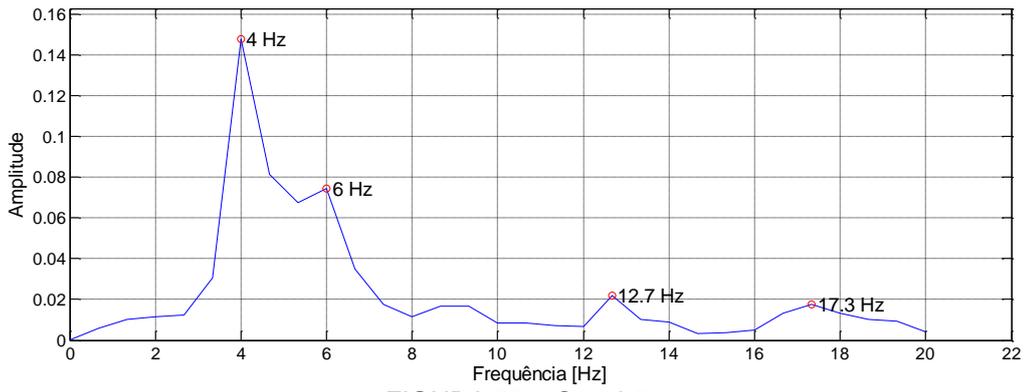


FIGURA 83 – Canal 6.

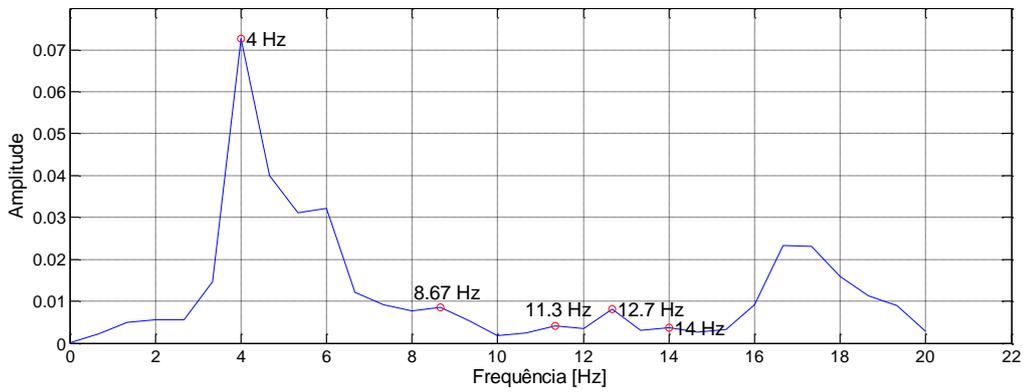


FIGURA 84 - Canal 8.

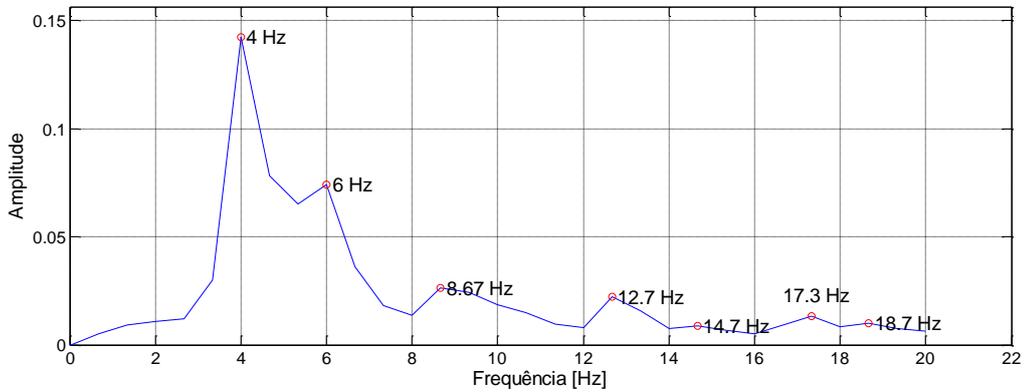


FIGURA 85 - Canal 9.

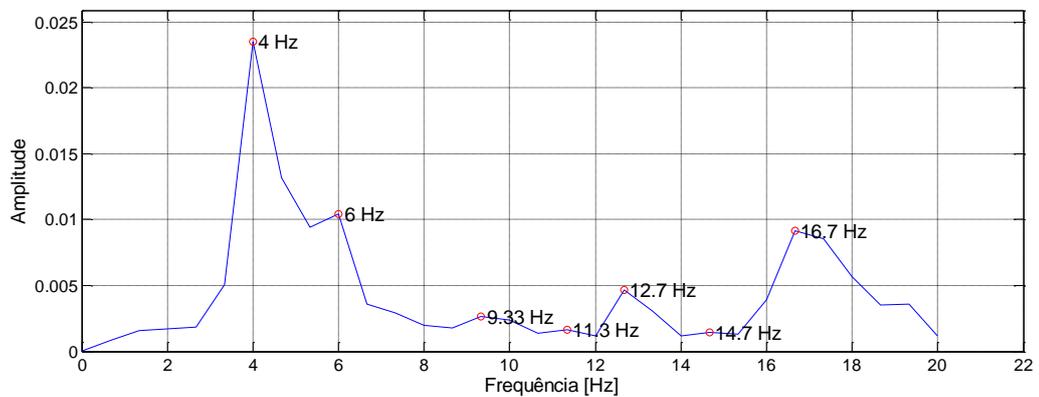


FIGURA 86 - Canal 10.

O canal 5 (Figura 82) gerou uma FTT mais representativa e foi utilizado nas técnicas RD + ITD. Os parâmetros de entrada do RD foram: taxa de amostragem (4096 Hz), número de frequências desejadas (10), porcentagem de pontos utilizados no sinal (0,4) e canal (5). Para o ITD os parâmetros foram: Ti (2) e Tf (21), resultando num “ndeltat” igual a 20.

A condição de desencadeamento que gerou valores mais próximos às frequências de referência foi a “pontos positivos”.

**TABELA 27** - Valores das frequências identificadas pelas condições de desencadeamento do método RD+ITD para o viaduto ferroviário PK 075+317.

FREQUÊNCIA (Hz) - RD + ITD			
Passagem de nível	Extremo local	Passagem por zero com inclinação positiva	Pontos positivos
2,31	11,29	4,58	5,04
7,72	17,53	8,82	9,96
13,00	20,82	12,20	13,00
16,21	28,81	15,67	15,87
17,06	32,90	22,17	20,83
31,27	35,01	28,43	24,30
32,24	50,54	33,93	34,14
45,82	0,00	42,76	35,80
0,00	0,00	46,11	52,61
0,00	0,00	49,93	0,00

A Tabela 28 a seguir mostra as taxas de amortecimento de cada condição de desencadeamento.

**TABELA 28** - Valores das taxas de amortecimento identificadas pelas condições de desencadeamento do método RD+ITD para o viaduto ferroviário PK 075+317.

TAXA DE AMORTECIMENTO (%) - RD + ITD			
Passagem de nível	Extremo local	Passagem por zero com inclinação positiva	Pontos positivos
5,07	5,75	5,70	4,65
7,26	2,63	5,32	1,91
6,77	1,74	5,14	8,64
6,02	4,38	2,55	2,89
4,10	1,52	3,53	3,84
0,36	0,01	2,02	1,25
1,47	0,15	0,36	1,16
0,47	0,00	2,20	1,83

0,00	0,00	0,34	0,27
0,00	0,00	0,28	0,00

As Figuras 87, 88, 89 e 90 representam o primeiro, o segundo, o terceiro e o quarto modos de vibração gerados pelo RD + ITD, respectivamente.

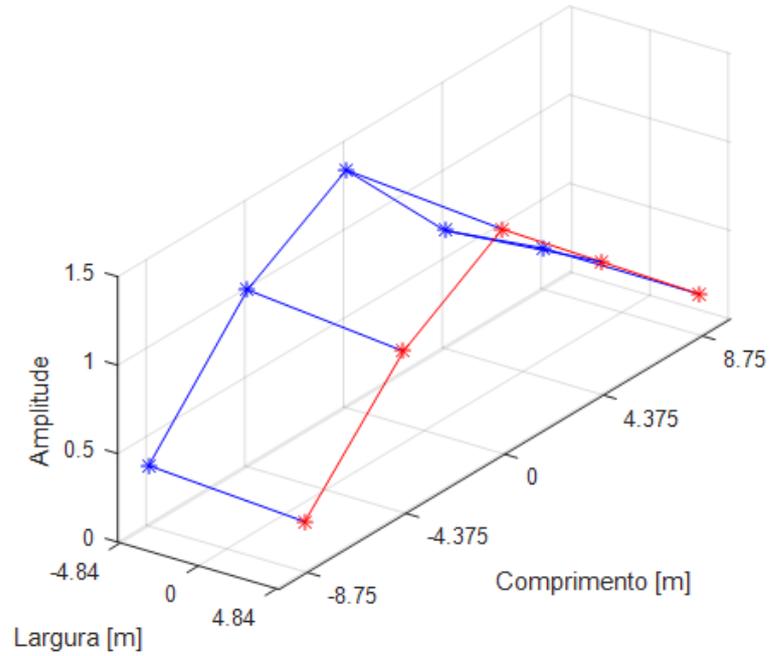


FIGURA 87 - Primeiro modo de vibração - RD + ITD.

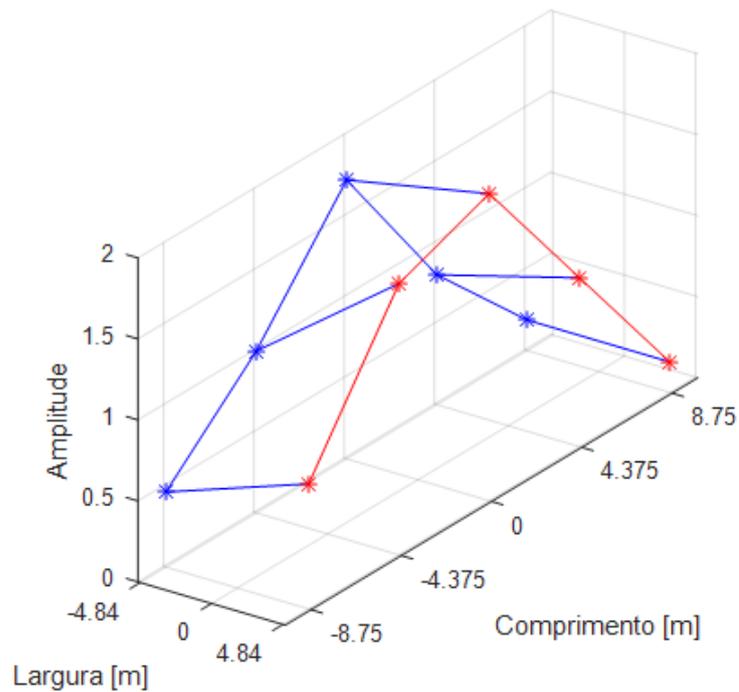


FIGURA 88 - Segundo modo de vibração - RD + ITD.

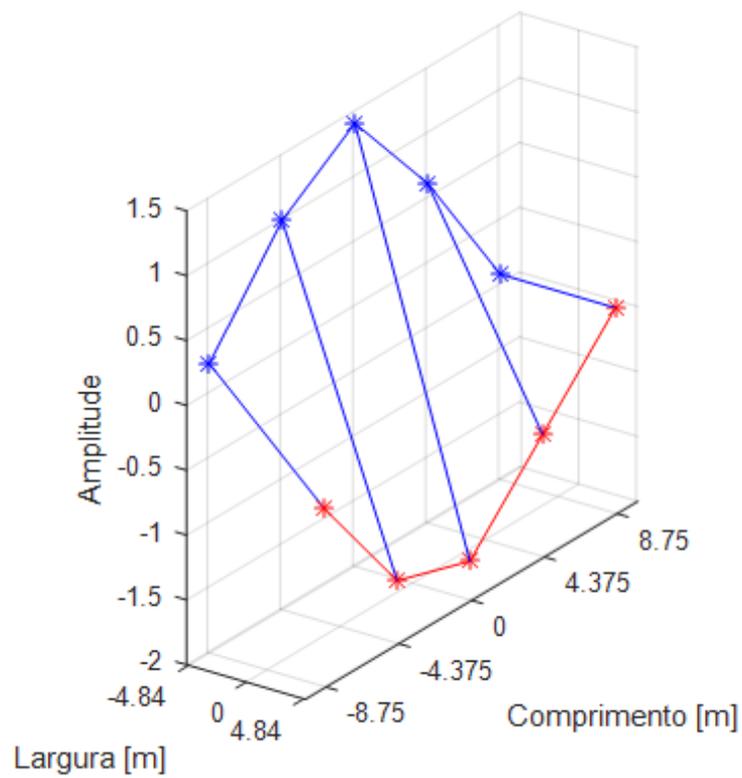


FIGURA 89 - Terceiro modo de vibração - RD + ITD.

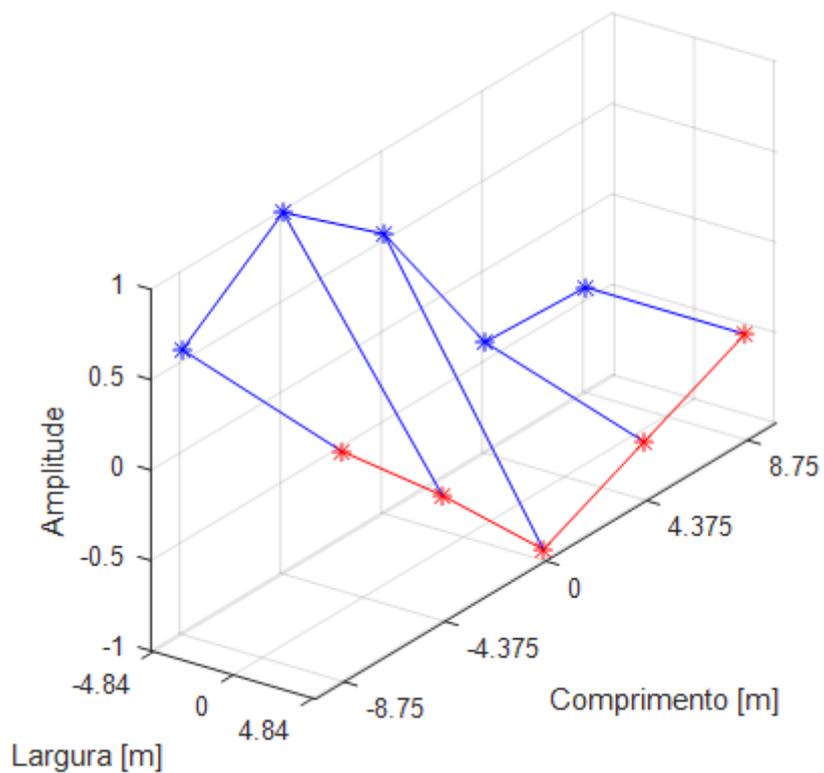


FIGURA 90 - Quarto modo de vibração - RD + ITD.

As formas de vibração modal foram bem identificadas pelo RD + ITD.

Para o SSI, os dados de entrada foram: ordem mínima (10), ordem máxima (150), intervalo da ordem (1), taxa de amostragem (4096), tempo inicial do sinal (1) e número de pontos utilizados no sinal (15000).

A ordem do modelo que gerou os melhores resultados foi a 95. Quando a ordem do modelo era baixa o SSI não gerava frequências com valores próximos aos conhecidos. A ordem 95 gerou muitos valores de frequência que foram descartados, mas conseguiu apresentar valores próximos com os valores de referência. Os valores das frequências e das taxas de amortecimento são mostrados na Tabela 29.

**TABELA 29** - Valores das frequências e das taxas de amortecimento identificadas pelo SSI para o viaduto PK 075+317.

SSI	
Frequência (Hz)	Taxa de amortecimento (%)
4,81	0,02
8,24	0,17
12,86	0,23
17,46	0,26

As formas modais de vibração geradas pelo SSI foram bem identificadas e podem ser vistas nas Figuras 91, 92, 93 e 94.

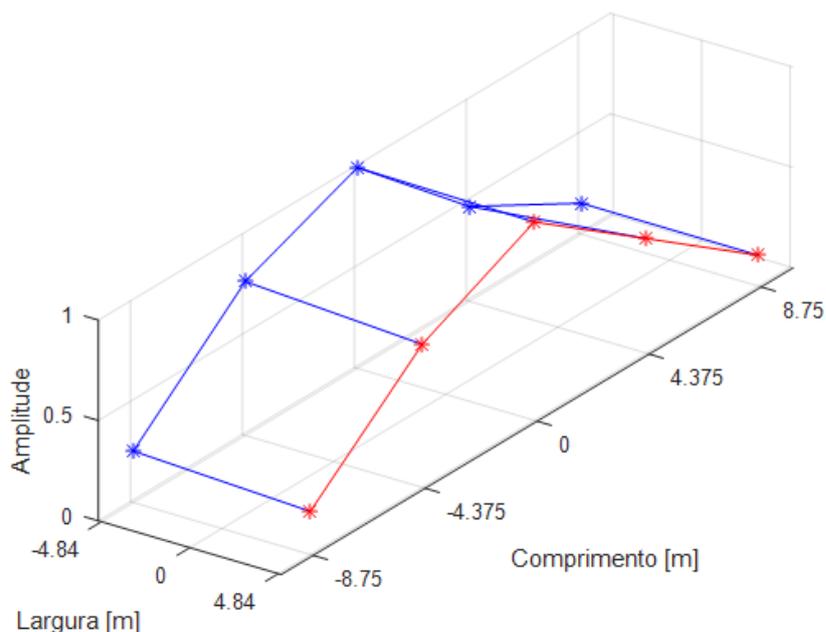


FIGURA 91 - Primeira forma modal de vibração.



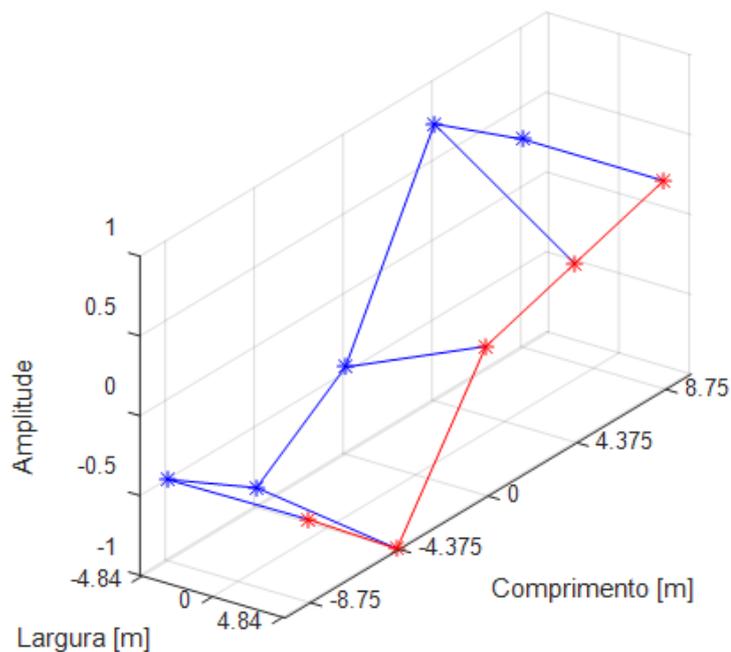


FIGURA 94 - Quarto forma modal de vibração.

Na Tabela 30 é apresentado o erro (em porcentagem %) dos métodos RD + ITD e SSI em relação às frequências naturais de referência e em seguida tem-se um gráfico que ilustra melhor essa comparação.

TABELA 30 – Tabela comparativa para o viaduto PK 075+317.

Frequência Teórica (Hz)	RD + ITD (Hz)	Erro (%)	SSI (Hz)	Erro (%)
5,84	5,04	-13,62	4,81	-17,59
8,74	9,96	13,97	8,24	-5,70
13,09	13,00	-0,72	12,86	-1,76
16,95	15,87	-6,35	17,46	3,03

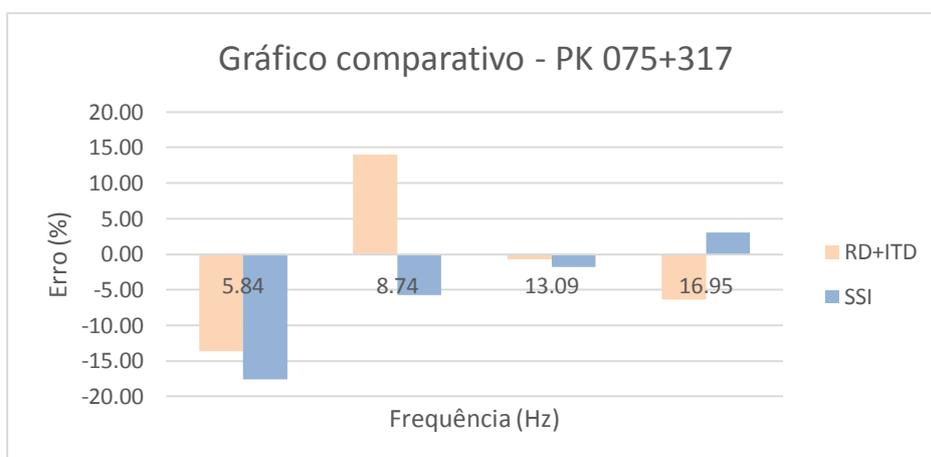


FIGURA 95 - Gráfico comparativo das técnicas de identificação modal para uma viga com ensaio de impacto.

Para este caso o SSI apresentou, no total, erros menores do que o RD + ITD.  
Mas não foi tão relevante a diferença entre eles.

# CAPÍTULO 4

## 4 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Estruturas de engenharia civil estão sujeitas às ações do vento, sismos, tráfegos de pedestres, rodoviário e ferroviário, que acarretam em deteriorações da sua integridade estrutural. Geralmente, essas deteriorações implicam em modificações nas respostas dinâmicas das estruturas, ou seja, nas frequências naturais, nos modos de vibração e nas taxas de amortecimento.

No decorrer deste trabalho, foram apresentadas técnicas de identificação modal que são consideradas mais simples, como é o caso do Método do Decremento Aleatório e mais complexas, como o caso do Método de Identificação Estocástica em Subespaços. A intenção era compará-los para diferentes respostas dinâmicas de diversas estruturas.

Na maioria dos casos, os resultados apresentados pelas duas técnicas RD+ITD e SSI apresentaram resultados satisfatórios e conseguiram identificar bem os parâmetros estruturais. Porém, no geral, o SSI apresentou taxas menores de erro, comprovando apresentar resultados mais próximos dos valores teóricos/numéricos.

De forma geral, em 83% dos casos, os erros apresentados pelo SSI foram menores do que aqueles mostrados pelo RD+ITD. Além disso, SSI conseguiu identificar modos que o RD+ITD não conseguiu.

Pelo o que foi observado neste trabalho, o SSI é fundamental para os casos de excitação ambiente, i.e., carregamento aleatório, onde claramente o RD+ITD foram incapazes de identificar os parâmetros modais da estrutura. Para as outras situações (carregamentos de impacto, por exemplo), o RD+ITD produziram resultados razoáveis e bem próximos dos teóricos e/ou analíticos. Ressalta-se que o ensaio do viaduto PK 075+317 foi realizado sob excitação ambiente. Porém, pode-se considerar que a passagem do TGV gere uma carga de impacto na estrutura.

Todavia, cabe a seguinte questão: até que ponto é melhor utilizar o SSI? Mesmo tendo apresentado erros menores, em geral, o SSI se mostra um método de difícil utilização. Além de ter uma implementação mais complexa em relação ao RD e ao ITD, a execução do algoritmo do SSI leva muito tempo (variando de 30 minutos a várias horas). Já o algoritmo do RD+ITD pode ser executado em poucos minutos, analisando todas as condições de desencadeamento.

Desta forma, conclui-se que, nas situações supracitadas, cada método atua de forma complementar em relação ao outro, de acordo com o tipo de excitação atuante na estrutura.

## REFERÊNCIAS

- A PONTE TACOMA NARROWS CAIU HÁ 71 ANOS. Disponível em: <http://geopedrados.blogspot.com.br/2011/11/ponte-tacoma-narrows-caiu-ha-71-anos.html>. Data de acesso: 27/02/2015.
- Akaike H., **Stochastic Theory of Minimal Realization**, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 19, p. 667-674, (1974).
- Alves et al., **Novelty Detection for SHM using raw acceleration measurements**, Structural Control and Health Monitoring, 2015.
- Aoki M., **State Space Modelling of Time Series**, Springer Verlag, (1987).
- Arun K. S., Kung S. Y., **Balanced Approximation of Stochastic Systems**, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 11, p. 42-68, (1990).
- Asmussen J. C., **Modal Analysis Based on the Random Decrement Technique – Application to Civil Engineering Structures**, PhD Tesis, Department of Building Technology and Structural Engineering, University of Aalborg, Denmark (1997).
- Barbosa F. S., **Apostila do Curso de Laboratório de Resistência dos Materiais da Faculdade de Engenharia da UFJF**. [s.n.], 2014.
- Brincker R., Krenk S., Jensen J. L., **Estimation of Correlation Functions by the Random Decrement Technique**, IMAC IX, Florence, Italy. (1991)
- Brincker R., Kirkegaard P. H., Rytter A., **Identification of System Parameters by the Random Decrement Technique**, Internacional Seminar on Modal Analysis, Florence, Italy. (1991)
- Brincker R., Krenk S., Kirkegaard P. H., Rytter A., **Identification of the Dynamical Properties from Correlation Function Estimates**, Bygningsstatistiske Meddelelser, Danish Society for Structural Science and Engineering, Vol. 63, N. 1, p. 1-38. (1992)
- Cantieni R., **Assessing a Dam's Structural Properties Using Forced Vibration Testing**, IABSE International Conference on Safety, 2001.
- Cardoso, R., **Desenvolvimento de Metodologia Para Identificação Modal Automática de Estruturas**. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto – MG, 2015.
- Cole H. A., **On-the-line Analysis of Random Vibrations**, AIAA Paper N° 68-288. (1968).

Cury A. A., **MIDAs – Um sistema Computacional Baseado em Aplicações Web Para Identificação Modal de Sistemas Dinâmicos Deformáveis**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora – MG, 2008.

Cury A. A., **Techniques d’Anormalité Appliquées à La Surveillance De Santé Structurale**. Tese (Doutorado) - Univerité Paris – Est, 2010.

Dispositivo de Aplicação de Impulsos na universidade Católica de Leuven. Disponível em: <http://www.kuleuven.ac.be>.

FOZ DO IGUAÇU, A EMOÇÃO DAS ÁGUAS. Ponte da Amizade. Disponível em: <http://estradasecaminhos.blogspot.com.br/2011/02/foz-do-iguacu.html>. Data de acesso: 02/03/2015.

Gonçalves L. A., **Um estudo sobre a Transformada Rápida de Fourier e seu uso em processamento de imagens**. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre – RS, 2004.

Ibrahim S. R., Mikulcik E. C., **A Method for the Direct Identification of Vibration Parameters from the Free Response**, The Shock and Vibration Bulletin, Vol. 47, N. 4, p. 183-198 (1977).

Ibrahim S. R., **Random Decrement Technique for Modal Identification of Structures**, Journal of Spacecraft and Rockets, Vol. 14, N. 11, p. 696-700 (1977).

Ibrahim S. R., **The Use of Random Decrement Technique for Identification of Structural Modes of Vibration**, AIAA paper, Vol. 77, p. 1-9 (1977).

Ibrahim S. R., **Application of Random Time Domain Analysis to Dynamic Flight Measurements**, The Shock and Vibration Bulletin, N. 49, Part 2 of 3, p. 165-170 (1979).

Ibrahim S. R., **Efficient Random Decrement Computation for Identification of Ambient Responses**, IMAC XIX, Kissimmee, USA (2001)

Kirkegaard P. H., Andersen P., **State Space Identification of Civil Engineering Structures from Output Measurements**, IMAC XV, Kissimmee, USA (1997).

Ljung L., **System Identification – Theory for the User**, 2<sup>nd</sup> edition, Pretince Hall, USA (1999).

Peeters B., **System Identification and Damage Detection in Civil Engineering**, PhD Thesis, Department of Civil Engineering, K. U. Leuven, Belgium (2000).

PESO DE 608 kN UTILIZADO NOS ENSAIOS DA ESTRUTURA DE AMPLIAÇÃO DO AEROPORTO DE MADERIA. Aulas de Análise Dinâmica Experimental. Alexandre Cury.

Rodrigues J., **Identificação Modal Estocástica: Métodos de análise aplicações em estruturas de engenharia civil**, tese de doutorado pela Universidade do Porto (2004).

Vandiver J. K., Campbell R. B., Cook M. F., Dunwoody A. B., **A Mathematical Basis for the Random Decrement Vibration Signature Analysis Technique**. Journal of Mechanical Design, 104. p.307-313, 1982.

Van Overschee P., De Moor B., **Subspace identification for linear systems: theory, implementation and applications**, Kluwer Academic Publishers (1996).

Yang J. C. S., Qi G. Z., Kan C. D., **Mathematical Base of Random Decrement Technique, IMAC VIII**, Kissimmee, USA (1990).