

Universidade Federal de Ouro Preto – Escola de Minas
Departamento de Engenharia Civil
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

**Análise não-linear geométrica de sistemas
aporticados planos com elementos de rigidez
variável – aplicações em estruturas de aço e de
concreto armado**

Iara Souza Ribeiro

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientadores: Prof. Dr.-Ing Francisco Célio de Araújo
Prof.^a D. Sc. Kátia Inácio da Silva

Campus Morro do Cruzeiro
Ouro Preto, MG – Brasil
Setembro, 2016

R484a

Ribeiro, Iara Souza.

Análise não linear geométrica de sistemas aporticados planos com elementos de rigidez variável [manuscrito]: aplicações em estruturas de aço e de concreto armado / Iara Souza Ribeiro. - 2016.

82f.: il.: color; grafs; tabs.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Célio de Araújo.

Coorientador: Prof. Dr. Kátia Inácio da Silva.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de Minas. Departamento de Engenharia Civil. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.

Área de Concentração: Construção Metálica.

1. Pórticos estruturais. 2. Construções geométricas. 3. Concreto armado. 4. Aço Estruturas. 5. ABNT - NBR 6118. I. Araújo, Francisco Célio de. II. Silva, Kátia Inácio da. III. Universidade Federal de Ouro Preto. IV. Título.

CDU: 624.01

Catálogo: www.sisbin.ufop.br

**ANÁLISE NÃO-LINEAR GEOMÉTRICA DE SISTEMAS APORTICADOS
PLANOS COM ELEMENTOS DE RIGIDEZ VARIÁVEL – APLICAÇÕES EM
ESTRUTURAS DE AÇO E DE CONCRETO ARMADO**

AUTORA: IARA SOUZA RIBEIRO

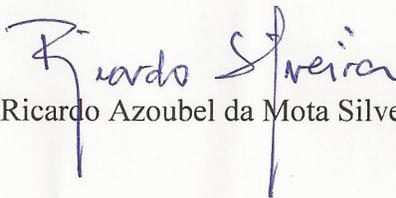
Esta dissertação foi apresentada em sessão pública e aprovada em 23 de setembro de 2016, pela Banca Examinadora composta pelos seguintes membros:



Prof. Francisco Célio de Araújo, Dr.-Ing. – UFOP (Presidente)



Prof. Paulo Anderson Santana Rocha, D. Sc. – UFOP



Prof. Ricardo Azoubel da Mota Silveira, D. Sc. – UFOP



Prof. Marcelo Greco, D. Sc. – UFMG

À minha família e aos meus orientadores.

Agradecimentos

A Deus por sempre guiar meus passos e conceder o equilíbrio entre o amor e o propósito.

À minha família, meu eterno porto seguro, pelo amor, apoio, incentivo e compreensão devido as minhas frequentes ausências.

Aos que durante minha jornada estudantil despertaram em mim a sede do conhecimento, em especial aos professores Rosângela de Paiva, Hisashi Inoue, Paulo A. S. Rocha e Kátia Inácio da Silva.

Aos professores do PROPEC, por todo ensinamento e dedicação.

Aos meus orientadores, Francisco Célio e Kátia, pela amizade, paciência, dedicação, compreensão e companheirismo em todo o período do mestrado. Agradeço também por todo o conhecimento que me foi transmitido para realização deste trabalho.

Ao Rharã pelo amor, carinho, dedicação, companheirismo e paciência.

Aos meus amigos Jéssica, Rafael, Everton, Marcela, Marko e Ígor, por tornarem mais leve e divertido o dia a dia de estudos.

À Tatiane por sempre estar disposta a me ajudar.

À Capes pelo auxílio financeiro para realização desta pesquisa.

Resumo da Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

**ANÁLISE NÃO-LINEAR GEOMÉTRICA DE SISTEMAS APORTICADOS PLANOS
COM ELEMENTOS DE RIGIDEZ VARIÁVEL – APLICAÇÕES EM ESTRUTURAS
DE AÇO E DE CONCRETO ARMADO**

Iara Souza Ribeiro

Setembro/2016

Orientadores: Francisco Célio de Araújo
Kátia Inácio da Silva

O presente trabalho consiste no estudo do comportamento não-linear geométrico de sistemas estruturais aporticados planos. Busca-se esclarecer aspectos pertinentes aos procedimentos normativos à luz de análises numéricas não-lineares com consideração de grandes deslocamentos, utilizando-se, para tanto, o esquema incremental-iterativo de *Newton-Raphson* com controle de carga, com atualização da matriz de rigidez a cada iteração e a abordagem corrotacional. Neste contexto, foi desenvolvida uma formulação capaz de modelar elementos com seções transversais de formas geométricas arbitrárias e variando genericamente ao longo do elemento. A validação da base computacional implementada foi feita através da comparação de análises estruturais realizadas pelo *software* SAP2000 (2013) e, quando pertinente, pelo TQS (2016). As aplicações focam em questões relacionadas ao projeto de estruturas em concreto armado e aço, e na avaliação da estabilidade global da estrutura.

Palavras-chave: não-linearidade geométrica, pórticos planos, concreto armado, aço, ABNT NBR 6118.

Abstract of Dissertation presented as partial fulfillment of the requirements for the degree of
Master of Science in Civil Engineering

**NONLINEAR GEOMETRIC ANALYSIS OF FRAMEWORKS WITH ELEMENTS
OF VARIABLE RIGIDITY – APPLICATIONS TO STEEL AND REINFORCED
CONCRETE STRUCTURES**

Iara Souza Ribeiro

Setembro/2016

Advisors: Francisco Célio de Araújo
 Kátia Inácio da Silva

This work consists on the study of geometrically nonlinear planar frame structures. Among others, one aims at exploring relevant aspects of code-based specifications related to the nonlinear behavior of reinforced structures under large displacements. For that purpose, a co-rotational approach is incorporated into the Newton–Raphson process. Besides, a formulation capable of modeling elements with non-prismatic cross-sections and rigidity varying along their axis has also been developed. The validation of the computational code constructed has been carried out by means of comparisons to results obtained employing the SAP2000 (2013) and the TQS (2016) software. The applications focus on reinforced concrete and steel structures.

Keywords: geometrically nonlinear analysis, planar frames, reinforced concrete, steel, ABNT NBR 6118.

Sumário

1. Introdução	6
1.1 Contexto e Motivação	6
1.2 Objetivos	9
1.3 Estrutura da Dissertação.....	10
2. Método da Rigidez Direta	11
2.1 Formulação Matricial.....	12
2.1.1 Matriz de rigidez elástica de elemento do pórtico plano (K_e).....	13
2.1.2 Matriz de rigidez geométrica de elemento do pórtico plano (K_g)	17
2.1.3 Elementos com rigidez variável ao longo do comprimento.....	23
2.1.4 Determinação das grandezas geométricas.....	25
2.2 Carga Crítica.....	26
2.3 Aplicações Parciais	27
2.3.1 Pilar de seção retangular não prismática.....	28
2.3.2 Viga não prismática submetida à flexo-compressão	30
3. Análise Não-Linear Geométrica.....	33
3.1 Método de <i>Newton-Raphson</i>	34
3.2 Descrição Corrotacional.....	37
3.3 Aplicações Parciais	40
3.3.1 Pilar com carga excêntrica	40
3.3.2 Pórtico de Lee.....	41
3.4 Considerações Normativas para Análise Não-Linear Geométrica	45
3.4.1 Parâmetro de Instabilidade (α)	46
3.4.2 Coeficiente γ_z	49
4. Aplicações	54
4.1 Galpão Industrial	54
4.2 Edifício de Múltiplos Andares.....	61
5. Conclusões	77

Capítulo 1

Introdução

1.1 Contexto e Motivação

O estudo e a utilização de novas tecnologias ou de algumas alternativas tecnológicas já existentes, mas pouco empregadas, têm sido realizados com o intuito de proporcionar melhoramentos em questões ambientais e econômicas. Segundo Gonçalves (2003), tornar as estruturas mais econômicas através da redução de seu peso e do consumo de materiais, sem, contudo, diminuir a sua segurança e durabilidade, tem sido o principal objetivo da engenharia estrutural. Com o intuito de atingir essa meta, há um crescimento significativo no emprego de materiais de alta resistência, concomitantemente ao emprego de elementos mais esbeltos e com seção variável (Figura 1.1).



Figura 1.1 Ponte de concreto armado com pilar em seção variável
Fonte: <http://wwwp.coc.ufrj.br>

A tecnologia envolvida na produção do concreto sofreu avanços significativos nas últimas décadas proporcionando um expressivo aumento em sua resistência. Era usual o emprego do concreto de resistência entre 15 MPa a 20 MPa, contudo, atualmente, utiliza-se

também concreto de resistências superiores a 50 MPa (Moncayo, 2011). Em relação ao aço, cita-se o uso de perfis formados através do dobramento a frio de chapas metálicas de aços dúcteis, conhecidos como perfis de chapas dobradas ou perfis formados a frio. Devido ao emprego de tecnologias desse tipo, observa-se a maior incidência de sistemas estruturais mais leves e elementos mais esbeltos.

O aumento da esbeltez dos elementos estruturais é um fator determinante na sua forma de colapso, portanto deve ser considerado no dimensionamento estrutural. Elementos esbeltos perdem sua estabilidade através do processo denominado flambagem e podem ruir em virtude da presença de grandes deflexões laterais. Sendo assim, no projeto desse tipo de estrutura, devem-se utilizar processos que considerem aspectos da instabilidade estrutural do sistema.

A perda de estabilidade está intimamente relacionada aos efeitos de segunda ordem, podendo estes ser globais ($P-\Delta$) ou locais ($P-\delta$).

No caso de pórticos de edificações, os efeitos $P-\Delta$ são aqueles decorrentes dos deslocamentos horizontais dos nós da estrutura, também denominados efeitos globais de segunda ordem (Fig. 1.2 b). Eles ocorrem devido às forças verticais aplicadas no pórtico associadas aos deslocamentos relativos nas extremidades do pilar, sendo assim os deslocamentos que ocorrem no meio dos vãos dos elementos não são consideradas. Os momentos fletores adicionais associados ao efeito $P-\Delta$ são obtidos a partir de equações de equilíbrio, estabelecidas na configuração parcialmente deformada do pórtico.

Já os efeitos $P-\delta$ (Fig. 1.2 c) são referentes a cada elemento individualizado. Sendo assim os momentos fletores adicionais associados a estes efeitos de segunda ordem são obtidos por equações de equilíbrio escritas nas configurações deformadas dos vários elementos, considerando as forças de compressão axial correspondente a cada um (Silvestre e Camotim, 2007).

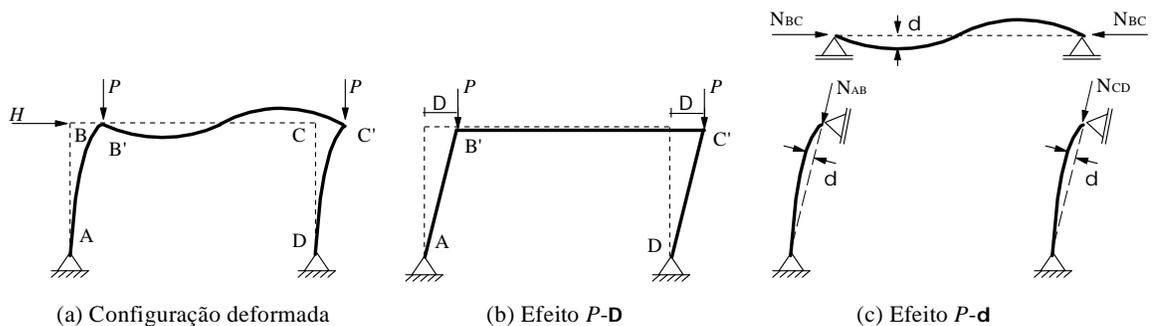


Figura 1.2: Efeito de segunda ordem em pórtico
Adaptada de Silvestre e Camotim (2007)

Os procedimentos gerais de análise e dimensionamento de estruturas em aço e concreto no Brasil são regulamentados pelas normas ABNT NBR 8800 (2008) e ABNT NBR 6118 (2014), respectivamente. As prescrições normativas são baseadas na avaliação de estados limites tais como: estado limite último e estado limite de serviço. Particularmente no caso de estruturas com elementos esbeltos, verifica-se que os aspectos de não-linearidade do sistema são essenciais. Neste contexto, a não-linearidade geométrica torna-se extremamente importante, dando origem a fenômenos geralmente não encontrados em sistemas lineares, como a existência de múltiplas configurações de equilíbrio (estáveis e instáveis) e de pontos críticos (limite e bifurcação) ao longo do caminho não-linear de equilíbrio (Pereira, 2002).

Outro tipo de não-linearidade que também deve ser considerada no dimensionamento estrutural é a não-linearidade física, que está associada a fatores como: o comportamento inelástico do material, caracterizado por uma relação constitutiva não-linear; a perda de resistência e rigidez do material durante o carregamento e as deformações permanentes nos elementos estruturais, também conhecidas como plastificação. Neste caso, ressalta-se que elementos em concreto armado tipicamente possuem rigidez variável, essencialmente descrita pelo processo de fissuração ao longo do elemento estrutural (Ghali e Favre, 1986; Khuntia e Ghosh, 2004). Nesta dissertação a não-linearidade física é considerada de forma aproximada, apenas na análise de sistemas estruturais em concreto armado, utilizando-se para tal as prescrições da ABN NBR 6118 (2014).

A análise não-linear geométrica é calculada com base na configuração deformada da estrutura. Ao se considerar também a não-linearidade do material, tem-se como consequência a possibilidade de se realizar o estudo de um sistema estrutural idealizado que se aproxime mais do problema real. Além disso, quando houver a necessidade de se modelar elementos não prismáticos, torna-se extremamente relevante o desenvolvimento e aplicação de uma formulação que considere de maneira precisa os efeitos causados pela variação de rigidez.

A análise e o dimensionamento de estruturas reticuladas com elementos de seção variável vêm sendo estudados desde a década de 50. Bleich (1952) estudou a flambagem elástica de colunas birrotuladas com variação linear e parabólica de altura ao longo do comprimento. A partir de então, devido à relevância e ao interesse prático na engenharia, esta linha de pesquisa passou a ser o objeto de estudo de diversos pesquisadores. Citam-se O'Rourke e Zebrowski (1977), que forneceram uma solução aproximada para determinação da carga crítica de flambagem de colunas birrotuladas ou engastada e livre com seções não uniformes; Li *et al.* (2003) que realizaram uma modelagem inelástica de segunda ordem de

pórticos de aço com elementos não prismáticos de alma esbelta; Valipour e Bradford (2011), que utilizaram o princípio dos trabalhos virtuais e o conceito de interpolação de forças com o objetivo de derivar funções de forma para elementos não prismáticos de pórtico espacial com ligações semirrígidas.

Para todos os efeitos, na resolução de sistemas, lineares ou não, faz-se necessária a utilização de ferramentas computacionais que permitam o emprego de técnicas numéricas mais complexas. No caso de estruturas não-lineares, o método iterativo de *Newton-Raphson* (Bathe, 1996; Yang e Kuo, 1994) é frequentemente utilizado em sua análise. Quando associado a outras técnicas numéricas, como o controle do comprimento de arco, o método de *Newton-Raphson* possibilita a obtenção da trajetória de equilíbrio completa da estrutura. Essa trajetória descreve a variação do comportamento global do sistema estrutural à medida que se variam os parâmetros de controle, como a força aplicada externa e o deslocamento. Através dela pode-se, portanto, identificar os possíveis pontos críticos. Esse assunto foi tratado em diversos trabalhos como Saffari *et al.* (2013), Pires (2012) e Silva (2009).

A análise não-linear com base em teorias geometricamente exatas exige o emprego de ferramentas matemáticas mais sofisticadas, que geralmente demandam maior tempo computacional, principalmente quando o sistema estrutural é de grande porte. Neste contexto, os processos simplificados de avaliação da estabilidade global sugeridos pelas normas podem, portanto, consideravelmente, reduzir o custo computacional da análise.

1.2 Objetivos

Nesta pesquisa, visa-se incluir no programa computacional NAESY – *Numerical Analysis of Engineering Systems* uma formulação para a análise não-linear geométrica de pórticos planos capaz de modelar elementos com seções transversais de formas geométricas arbitrárias, variando genericamente ao longo do elemento. Menciona-se, sucintamente, que o NAESY, cuja base foi desenvolvida por de Araújo (1994), compõe-se de uma série de módulos computacionais que possibilitam a análise de problemas de engenharia (estáticos, dinâmicos, lineares e não-lineares) via formulações baseadas no Método dos Elementos Finitos (MEF), no Método dos Elementos de Contorno (MEC) e via métodos acoplados EF-EC e EC-EC.

Também ressalta-se que, na pesquisa, serão estudados os procedimentos normativos para a análise de segunda ordem de estruturas em concreto armado. Para tanto, será feita a comparação entre os resultados obtidos através da formulação não-linear geométrica

corrotacional com aqueles obtidos a partir das diretrizes de cálculos estabelecidas pelas normas técnicas.

1.3 Estrutura da Dissertação

O presente trabalho é constituído por cinco capítulos. No Capítulo 2 é apresentada a formulação do Método da Rigidez Direta (MRD), a dedução das matrizes de rigidez elástica e geométrica do elemento de pórtico plano e a estratégia utilizada para modelar elementos com seções transversais de formas geométricas arbitrárias, variando genericamente ao longo do elemento. Com objetivo de verificar as matrizes de rigidez, é introduzido o estudo da estabilidade de sistemas estruturais a partir de aplicações parciais referentes à obtenção da carga crítica de pilares e vigas–coluna.

No Capítulo 3 tem–se a formulação utilizada para a análise não–linear geométrica com consideração de grandes deslocamentos. Apresentam–se duas aplicações parciais que consistem em sistemas estruturais frequentemente utilizados na validação de formulações não–lineares, a saber: o pórtico de Lee e um pilar com carga excêntrica. Ainda neste capítulo é apresentada a análise não–linear aproximada de estruturas de concreto armado, segundo as prescrições normativas.

No Capítulo 4 são realizadas aplicações que focam em questões relacionadas ao projeto de estruturas em concreto armado e aço, sendo a validação da base computacional implementada feita através de comparações com análises estruturais realizadas pelos *softwares* SAP2000 (2013) e TQS (2016).

Por fim, no Capítulo 5, são estabelecidas as conclusões e considerações sobre as possíveis futuras pesquisas.

Capítulo 2

Método da Rigidez Direta

Os métodos básicos de análise estrutural são fundamentados na representação discreta do modelo contínuo (com infinitos graus de liberdade) de um problema real em termos de um número finito de parâmetros.

O problema estrutural estático linear é um problema de valor de contorno, no qual um conjunto de equações diferenciais deve ser satisfeito em todos os pontos do domínio, respeitando as condições de contorno naturais e essenciais. No caso das estruturas reticuladas, o meio sólido contínuo 3D é reduzido, pela consideração de hipóteses simplificadoras, aos eixos centroidais dos elementos (Martha, 2010).

Um modelo estrutural, mesmo constituído por elementos reticulados, pode estar sujeito a diferentes níveis de simplificação. No âmbito deste trabalho, serão objeto de estudo os pórticos planos (Figura 2.1), que são modelos reticulados formados pela associação de elementos coplanares interligados de forma rígida, rotulada ou, mais realisticamente, com rigidez intermediária (ligações semirrígidas). Neste tipo de problema, as forças atuantes e deslocamentos encontram-se no plano da estrutura, enquanto os momentos e deslocamentos angulares (rotações) encontram-se em direção normal a este plano. Os esforços internos resultantes em qualquer seção desta estrutura consistem em um momento fletor, uma força cortante e uma força axial.

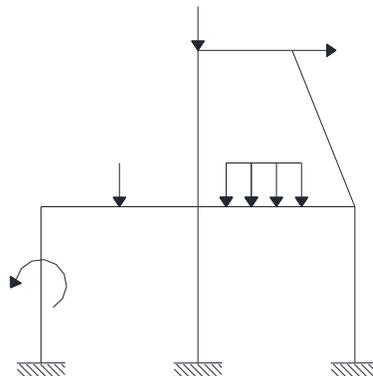


Figura 2.1 Pórtico plano

Neste trabalho, a análise de sistemas estruturais desse tipo será efetuada via Método da Rigidez Direta (MRD), que consiste em uma formulação matricial de sistemas estruturais baseada em deslocamentos, apresentado a seguir.

2.1 Formulação Matricial

No MRD as incógnitas do problema são os deslocamentos dos nós do modelo estrutural, os quais, em uma análise estática, se relacionam com as ações nodais a partir da equação:

$$\mathbf{K}_t \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (2.1)$$

em que \mathbf{K}_t é a matriz de rigidez tangente da estrutura, \mathbf{f} é o vetor de cargas nodais equivalentes, no qual se representa o conjunto de todas as ações externas atuantes no sistema estrutural, e \mathbf{u} é o vetor de deslocamentos nodais, que envolve os deslocamentos desconhecidos e prescritos.

Para o caso de análise não-linear geométrica, os coeficientes da matriz de rigidez tangente são constituídos por termos lineares (efeitos de 1ª ordem) e de ordem superior, estes últimos dependentes do processo de deformação da estrutura. Nesta pesquisa, a matriz \mathbf{K}_t constitui-se de duas partes apenas, que são a matriz de rigidez elástica, \mathbf{K}_e , e a matriz de rigidez geométrica, \mathbf{K}_g , que essencialmente inclui os efeitos, na rigidez, dos esforços internos no elemento estrutural, em certa configuração, em presença do campo de deslocamentos correspondente. Sendo assim, pode-se reescrever a Equação (2.1) na forma:

$$\left(\mathbf{K}_e - \lambda \mathbf{K}_g \right) \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (2.2)$$

em que λ é um parâmetro adimensional associado ao incremento das cargas aplicadas na estrutura e, conseqüentemente, aos esforços axiais em cada elemento.

As matrizes de rigidez \mathbf{K}_e e \mathbf{K}_g são obtidas através da soma das contribuições de coeficientes de rigidez dos diversos elementos estruturais. Sendo assim, para a obtenção das expressões genéricas dos coeficientes das matrizes de rigidez elástica e geométrica do elemento de pórtico, será utilizada uma formulação baseada no Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV). Nos casos em que haja variação das características geométricas e físicas ao longo do elemento, esses coeficientes serão numericamente calculados. Essa estratégia

totalmente geral se fundamenta na interpolação direta das características físico-geométricas das seções dos elementos e é mostrada a seguir.

2.1.1 Matriz de rigidez elástica de elemento do pórtico plano (K_e)

Na formulação em questão, também utilizada por Pereira (2015), considera-se o elemento reticulado de pórtico plano da Figura 2.2.

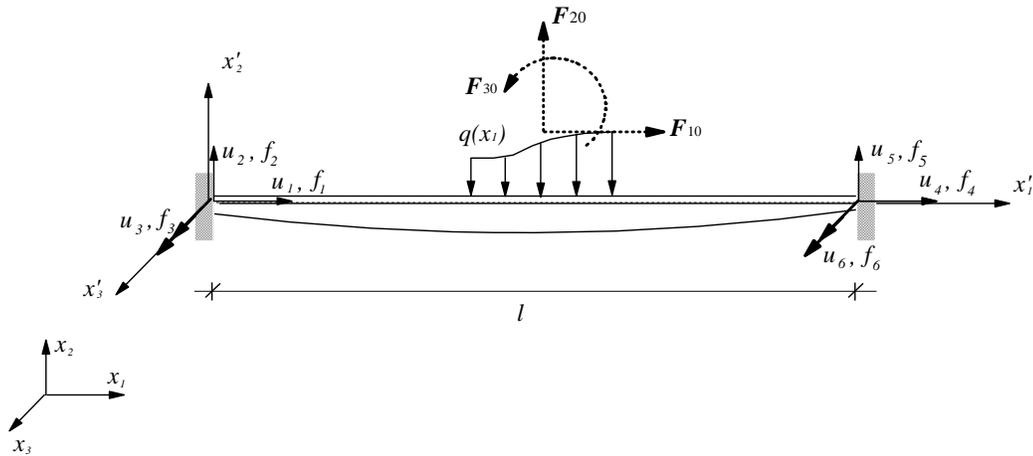


Figura 2.2 Elemento de pórtico plano

As equações de equilíbrio para esse elemento são dadas por:

$$\begin{cases} \sum F_{x'_1} = f_1 + f_4 + F_{10} = 0 \\ \sum F_{x'_2} = f_2 + f_5 + F_{20} = 0 \\ \sum F_{x'_3} = f_3 + f_6 - f_2 l + F_{30} = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

em que f_i são as ações de engastamento ($i = 1, 6$), l é o comprimento do elemento, F_{10} , F_{20} e F_{30} as resultantes devido à ação externa $q(x_1)$.

Aplicando-se o PTV estabelece-se a seguinte equação de compatibilidade de deslocamentos:

$$\bar{f}_i u_i = \int_l \bar{M}_i d\theta + \int_l \bar{N}_i d\delta + \int_l \bar{Q}_i d\lambda \quad (2.4)$$

em que u_i são os deslocamentos incógnitos; $d\theta$ é a rotação flexional; $d\delta$ corresponde ao deslocamento axial e $d\lambda$ ao deslocamento transversal; \bar{M}_i , \bar{N}_i , e \bar{Q}_i são, respectivamente, o

momento fletor, a força normal e a força cortante devidos ao estado de carregamento (Figura 2.3) em que $\bar{f}_i = 1$, ou seja,

$$\bar{M}_i = M_i(\bar{f}_i), \quad \bar{N}_i = N_i(\bar{f}_i), \quad \bar{Q}_i = Q_i(\bar{f}_i) \quad (2.5)$$

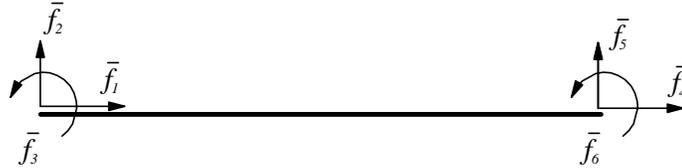


Figura 2.3 Estado de carregamento de um elemento de pórtico plano

A partir das Equações (2.3) e (2.4) é possível encontrar as expressões dos coeficientes de rigidez nos casos mais gerais de características geométricas de elemento e carregamento. Para tanto, dois casos são considerados: o caso I e o caso II.

Caso I:

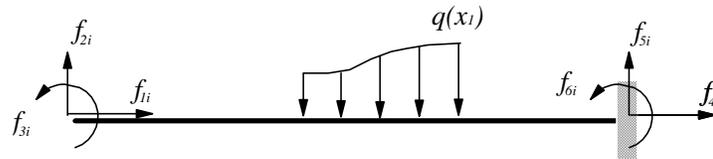


Figura 2.4 Elemento de pórtico plano considerado no caso I

Neste caso considera-se o nó final (nó direito) como restringido, isto é $u_4 = u_5 = u_6 = 0$ (Figura 2.4). Sendo assim, reescrevendo-se as Equações (2.3) e (2.4) na forma matricial obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_{II} & \mathbf{E}_{IF} \\ \mathbf{A}_{II} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{li} \\ \mathbf{f}_{Fi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{F}_0 \\ \mathbf{u}_{li} - \mathbf{u}_{I0} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

em que

$$\mathbf{E}_{II} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -l & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_{IF} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_{li} = \begin{bmatrix} f_{1i} \\ f_{2i} \\ f_{3i} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_{Fi} = \begin{bmatrix} f_{4i} \\ f_{5i} \\ f_{6i} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_{li} = \begin{bmatrix} u_{1i} \\ u_{2i} \\ u_{3i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{1i} \\ \delta_{2i} \\ \delta_{3i} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

sendo δ_{ki} o delta de Kronecker,

$$u_{I0} = \int_l \frac{\bar{M}_i M'_0}{EI} ds + \int_l \frac{\bar{N}_i N'_0}{ES} ds + \int_l \frac{\chi \bar{Q}_i Q'_0}{GS} ds, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.8)$$

em que E é o módulo de elasticidade longitudinal; G o módulo de elasticidade transversal; S a área da seção transversal; I o momento de inércia à flexão em relação ao eixo principal local e χ é o fator de forma da seção para o cisalhamento em relação à direção x_2 . De forma que:

$$M'_0 = M(q), \quad N'_0 = N(q), \quad Q'_0 = Q(q). \quad (2.9)$$

Os coeficientes da matriz \mathbf{A}_{II} resultam da equação:

$$\int_l \frac{\bar{M}_i M_j}{EI} ds + \int_l \frac{\bar{N}_i N_j}{ES} ds + \int_l \frac{\chi \bar{Q}_i Q_j}{GS} ds = a_{ij} f_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.10)$$

para tanto, as expressões de \bar{M}_i , \bar{N}_i , e \bar{Q}_i são obtidas considerando-se $\bar{f}_{ij} = 1$ e a ação no elemento, f_{ij} , embutida nas funções de esforços internos (M_j , N_j , e Q_j), é isolada.

Por fim, a matriz \mathbf{A}_{II} é definida a partir de:

$$\mathbf{A}_{II} = \begin{bmatrix} \int_l \frac{1}{ES} dx_1 & 0 & 0 \\ 0 & \int_l \frac{x_1^2}{EI} + \frac{\chi}{GS} dx_1 & \int_l -\frac{x_1}{EI} dx_1 \\ 0 & \int_l -\frac{x_1}{EI} dx_1 & \int_l \frac{1}{EI} dx_1 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Caso II:

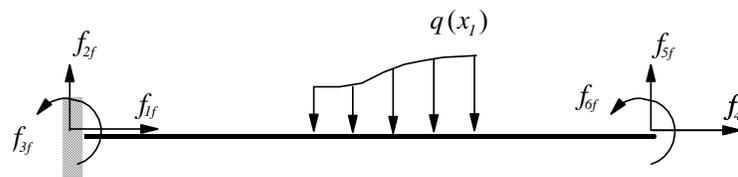


Figura 2.5 Elemento de pórtico plano considerado no caso II

No caso II, mostrado na Figura 2.5, o nó restringido é o inicial (nó esquerdo), portanto $u_1 = u_2 = u_3 = 0$. Nessas condições, organizando-se matricialmente as Equações (2.3) e (2.4) obtêm-se equações semelhantes às do caso I, como segue:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_{II} & \mathbf{E}_{IF} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{FF} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{If} \\ \mathbf{f}_{Ff} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{F}_0 \\ \mathbf{u}_{Ff} - \mathbf{u}_{F0} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

sendo:

$$\mathbf{f}_{If} = \begin{bmatrix} f_{1f} \\ f_{2f} \\ f_{3f} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_{Ff} = \begin{bmatrix} f_{4f} \\ f_{5f} \\ f_{6f} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_{Ff} = \begin{bmatrix} u_{4f} \\ u_{5f} \\ u_{6f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{4f} \\ \delta_{5f} \\ \delta_{6f} \end{bmatrix}, \quad f = 4, 5, 6 \quad (2.13)$$

$$u_{F0} = \int_l \frac{\bar{M}_i M_0''}{EI} ds + \int_l \frac{\bar{N}_i N_0''}{ES} ds + \int_l \frac{\chi \bar{Q}_i Q_0''}{GS} ds \quad (2.14)$$

de forma que

$$M_0'' = M(q), \quad N_0'' = N(q), \quad Q_0'' = Q(q) \quad (2.15)$$

Os coeficientes da submatriz \mathbf{A}_{FF} são obtidos a partir da Equação (2.10), para $i, j = 4, 5, 6$ resultando em:

$$\mathbf{A}_{FF} = \begin{bmatrix} \int_l \frac{1}{ES} dx_1 & 0 & 0 \\ 0 & \int_l \left(\frac{(l-x_1)^2}{EI} + \frac{\chi}{GS} \right) dx_1 & \int_l \frac{(l-x_1)}{EI} dx_1 \\ 0 & \int_l \frac{(l-x_1)}{EI} dx_1 & \int_l \frac{1}{EI} dx_1 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Impondo-se nas Equações (2.6) e (2.12) a condição de $\mathbf{u}_{I0} = \mathbf{u}_{F0} = \mathbf{F}_0 = 0$ e considerando os deslocamentos nodais prescritos \mathbf{u}_{Ii} e \mathbf{u}_{Ff} , têm-se:

$$\mathbf{f}_{Ii} = \mathbf{A}_{II}^{-1} \mathbf{u}_{Ii}, \quad \mathbf{f}_{Fi} = -\mathbf{E}_{II} \mathbf{f}_{Ii}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.17)$$

$$\mathbf{f}_{Ff} = \mathbf{A}_{FF}^{-1} \mathbf{u}_{Ff}, \quad \mathbf{f}_{If} = -\mathbf{E}_{IF} \mathbf{f}_{Ff}, \quad f = 4, 5, 6 \quad (2.18)$$

Finalmente, a matriz de rigidez elástica para o elemento de pórtico plano é dada por:

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{Ii} & \mathbf{f}_{If} \\ \mathbf{f}_{Fi} & \mathbf{f}_{Ff} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

com $i = 1, 2, 3$ e $f = 4, 5, 6$.

Nos casos em que o elemento possui rigidez constante, sua matriz de rigidez elástica pode ser escrita como:

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} \frac{ES}{l} & 0 & 0 & -\frac{ES}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3(1+\varphi_y)} & \frac{6EI}{l^2(1+\varphi_y)} & 0 & -\frac{12EI}{l^3(1+\varphi_y)} & \frac{6EI}{l^2(1+\varphi_y)} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2(1+\varphi_y)} & \frac{(4+\varphi_y)EI}{l(1+\varphi_y)} & 0 & -\frac{6EI}{l^2(1+\varphi_y)} & \frac{(2+\varphi_y)EI}{l(1+\varphi_y)} \\ -\frac{ES}{l} & 0 & 0 & \frac{ES}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3(1+\varphi_y)} & -\frac{6EI}{l^2(1+\varphi_y)} & 0 & \frac{12EI}{l^3(1+\varphi_y)} & -\frac{6EI}{l^2(1+\varphi_y)} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2(1+\varphi_y)} & \frac{(2+\varphi_y)EI}{l(1+\varphi_y)} & 0 & -\frac{6EI}{l^2(1+\varphi_y)} & \frac{(4+\varphi_y)EI}{l(1+\varphi_y)} \end{bmatrix} \quad \text{com } \varphi_y = \frac{12EI\chi}{GS l^2} \quad (2.20)$$

2.1.2 Matriz de rigidez geométrica de elemento do pórtico plano (\mathbf{K}_g)

Neste trabalho, a matriz de rigidez geométrica resulta da consideração do momento fletor, do esforço cortante e do normal gerados por cargas axiais e transversais em presença de deslocamento lateral do elemento. As expressões genéricas de seus coeficientes podem ser derivadas pelo mesmo procedimento apresentado anteriormente para determinar os coeficientes da matriz de rigidez elástica, sendo assim, tem-se:

Caso I:

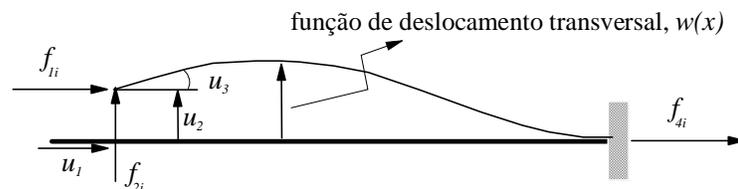


Figura 2.6 Elemento de pórtico plano deformado considerado no caso I

Baseado na Figura 2.6, vê-se que o momento fletor adicional gerado pela carga axial (f_{li}) pode ser expresso por

$$M_1 = M(f_{li}) = -f_{li} [w(x) - u_2] . \quad (2.21)$$

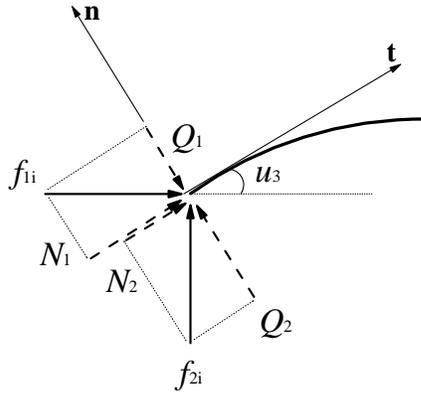


Figura 2.7 Decomposição das forças f_{1i} e f_{2i} no eixo deformado

Além disso, pela decomposição das forças f_{1i} e f_{2i} segundo as direções tangente, \mathbf{t} , e normal, \mathbf{n} , ao eixo deformado (Figura 2.7), há o surgimento de um esforço cortante (Q_1) e de um esforço normal (N_2) adicionais. Sabendo-se que a rotação u_3 em um ponto é dada pela derivada primeira da função deslocamento, pode-se então escrever a equação do referido esforço na forma:

$$Q_1 = Q(f_{1i}) = -f_{1i}w'(x) \quad (2.22)$$

$$N_2 = N(f_{2i}) = f_{1i}u'(x) \quad (2.23)$$

em que $u(x)$ é a função que descreve os deslocamentos axiais.

Incluindo-se a contribuição destes esforços em (2.10), as expressões dos coeficientes $a_{i1}^{(I)}$ e $a_{i2}^{(I)}$, que são os termos da matriz \mathbf{A}_{II} relacionados à força axial e cortante, serão, então, dadas por

$$a_{i1}^{(I)} = \int_l \frac{\bar{M}_i}{EI} [u_2 - w(x_1)] ds + \int_l \frac{\chi \bar{Q}_i}{GS} [-w'(x_1)] ds, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.24)$$

$$a_{i2}^{(I)} = \int_l \frac{\bar{N}_i N_2}{ES} dx, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.25)$$

De acordo com as Equações (2.24) e (2.25), as expressões de $a_{12}^{(I)}$, $a_{21}^{(I)}$ e $a_{31}^{(I)}$ são:

$$a_{12}^{(I)} = \int_l \frac{u'}{ES} dx_1 \quad (2.26)$$

$$a_{21}^{(I)} = \int_l \frac{\chi_1}{EI} [u_2 - w(x_1)] dx_1 + \int_l -\frac{\chi}{GS} w'(x_1) dx_1 \quad (2.27)$$

$$a_{31}^{(I)} = \int_l \frac{w(x_1) - u_2}{EI} dx_1. \quad (2.28)$$

Aproximando-se os deslocamentos transversais e axiais dos elementos por funções de interpolação cúbica, $w(x_1)$ e $u(x_1)$, determinadas de modo a satisfazer as condições de extremidade no caso I,

$$w(0) = u_2, \quad w'(0) = u_3, \quad w(l) = w'(l) = 0 \quad (2.29)$$

$$u(0) = u_1, \quad u(l) = 0 \quad (2.30)$$

segue:

$$w(x_1) = \varphi_2(x_1)u_2 + \varphi_3(x_1)u_3 \quad (2.31)$$

$$u(x_1) = \varphi_1(x_1)u_1 \quad (2.32)$$

com

$$\varphi_1(x_1) = 1 - \frac{x_1}{l}, \quad \varphi_2(x_1) = 2\frac{x_1^3}{l^3} - 3\frac{x_1^2}{l^2} + 1 \quad \text{e} \quad \varphi_3(x_1) = \frac{x_1^3}{l^2} - 2\frac{x_1^2}{l} + x_1. \quad (2.33)$$

Tem-se, portanto,

$$a_{21}^{(I)} = v_{11}^{(I)}u_1, \quad a_{21}^{(I)} = v_{22}^{(I)}u_2 + v_{23}^{(I)}u_3, \quad a_{31}^{(I)} = v_{32}^{(I)}u_2 + v_{33}^{(I)}u_3 \quad (2.34)$$

sendo

$$v_{11}^{(I)} = \int_l \frac{\varphi_1'(x_1)}{ES} dx_1 \quad (2.35)$$

$$v_{22}^{(I)} = \int_l \frac{x_1}{EI} [1 - \varphi_2(x_1)] dx_1 + \int_l \frac{\chi}{GS} \varphi_2'(x_1) dx_1 \quad (2.36 \text{ a})$$

$$v_{23}^{(I)} = -\int_l \frac{x_1}{EI} \varphi_3(x_1) dx_1 - \int_l \frac{\chi}{GS} \varphi_3'(x_1) dx_1 \quad (2.36 \text{ b})$$

$$v_{32}^{(I)} = \int_l \frac{1}{EI} [\varphi_2(x_1) - 1] dx_1 \quad (2.37 \text{ a})$$

$$v_{33}^{(I)} = \int_l \frac{\varphi_3(x_1)}{EI} dx_1 \quad (2.37 \text{ b})$$

O sistema de equações para cálculo dos coeficientes da matriz de rigidez geométrica é, portanto, dado por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_{II} & \mathbf{E}_{IF} \\ \mathbf{A}_{II} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{Ii} \\ \mathbf{f}_{Fi} \end{bmatrix} = -f_{ii} \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{v}_{II} \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

sendo

$$\mathbf{v}_{II} = \begin{bmatrix} v_{11}^{(I)} & 0 & 0 \\ 0 & v_{22}^{(I)} & v_{23}^{(I)} \\ 0 & v_{32}^{(I)} & v_{33}^{(I)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.39)$$

Os demais termos serão idênticos àqueles definidos na Equação (2.6).

Caso II:

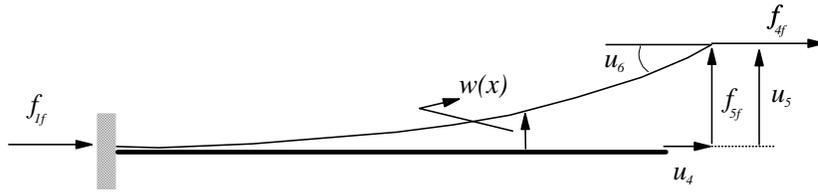


Figura 2.8 Elemento de pórtico plano deformado considerado no caso II

Seguindo o mesmo procedimento descrito acima para o caso I, podem-se derivar as expressões correspondentes para avaliação dos coeficientes de rigidez geométrica no caso II (Figura 2.8).

O momento fletor adicional gerado pela carga axial (f_{4f}) é expresso por:

$$M_4 = M(f_{4f}) = -f_{4f} [u_5 - w(x)] \quad (2.40)$$

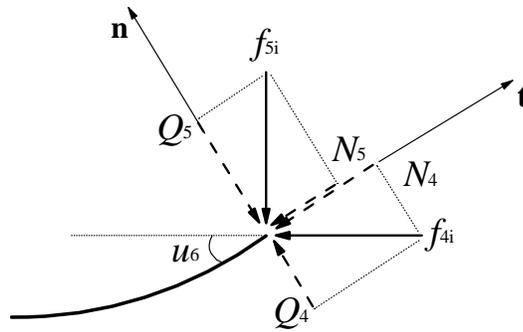


Figura 2.9 Decomposição das forças f_{4f} e f_{5f} no eixo deformado

Assim como na determinação dos esforços Q_1 e N_2 , os esforços cortante (Q_4) e normal (N_5) adicionais referentes ao caso II são obtidos pela decomposição da carga axial (f_{4f}) e transversal (f_{5f}) no eixo deformado (Figura 2.9), segundo as equações:

$$Q_4 = Q(f_{4f}) = f_{4f} w'(x) \quad (2.41)$$

$$N_5 = N(f_{5f}) = f_{5f}u'(x) \quad (2.42)$$

Incluindo-se a contribuição destas forças na Equação (2.10), as expressões dos coeficientes $a_{f4}^{(F)}$ e $a_{f5}^{(F)}$, que são componentes da matriz \mathbf{A}_{FF} relacionados à força axial e cortante, são obtidas por:

$$a_{f4}^{(F)} = \int_l \frac{\bar{M}_f}{EI} [w(x_1) - u_5] ds + \int_l \frac{\chi \bar{Q}_f}{GS} w'(x_1) ds, \quad f = 4, 5, 6 \quad (2.43)$$

$$a_{f5}^{(F)} = \int_l \frac{\bar{N}_f N_5}{ES} dx, \quad f = 4, 5, 6 \quad (2.44)$$

De acordo com as Equações (2.43) e (2.44), as expressões de $a_{45}^{(F)}$, $a_{54}^{(F)}$ e $a_{64}^{(F)}$ são

$$a_{45}^{(F)} = \int_l \frac{u'}{ES} dx_1 \quad (2.45)$$

$$a_{54}^{(F)} = \int_l \frac{(l-x)}{EI} [w(x_1) - u_5] dx_1 + \int_l -\frac{\chi}{GS} w'(x_1) dx_1 \quad (2.46)$$

$$a_{64}^{(F)} = \int_l \frac{w(x_1) - u_5}{EI} dx_1. \quad (2.47)$$

Aproximando-se os deslocamentos transversais e axiais dos elementos por funções de interpolação cúbica, $w(x_1)$ e $u(x_1)$, determinadas de modo a satisfazer as condições de extremidade no caso II, ou seja,

$$w(l) = u_5, \quad w'(l) = u_6, \quad w(0) = w'(0) = 0, \quad u(l) = u_4, \quad u(0) = 0 \quad (2.48)$$

resultam as funções de deslocamentos, w e u , dada por

$$w(x_1) = \varphi_5(x_1)u_5 + \varphi_6(x_1)u_6, \quad (2.49)$$

$$u(x_1) = \varphi_4(x_1)u_4 \quad (2.50)$$

em que

$$\varphi_4(x_1) = \frac{x_1}{l}, \quad \varphi_5(x_1) = 3\frac{x_1^2}{l^2} - 2\frac{x_1^3}{l^3} \text{ e } \varphi_6(x_1) = \frac{x_1^3}{l^2} - \frac{x_1^2}{l} \quad (2.51)$$

Reescrevendo os coeficientes $a_{f5}^{(F)}$ e $a_{f4}^{(F)}$ de maneira a tornar explícitos os deslocamentos, chega-se às equações:

$$a_{45}^{(F)} = v_{44}^{(F)} u_4, \quad a_{54}^{(F)} = v_{55}^{(F)} u_5 + v_{56}^{(F)} u_6, \quad a_{64}^{(F)} = v_{65}^{(F)} u_5 + v_{66}^{(F)} u_6 \quad (2.52)$$

com:

$$v_{44}^{(F)} = \int_l \frac{\varphi_4'(x_1)}{ES} dx_1 \quad (2.53)$$

$$v_{55}^{(F)} = \int_l \frac{(l-x_1)}{EI} (\varphi_5(x_1) - 1) dx_1 - \int_l \frac{\chi}{GS} \varphi_5'(x_1) dx_1 \quad (2.54 \text{ a})$$

$$v_{56}^{(F)} = \int_l \frac{(l-x_1)}{EI} \varphi_6(x_1) dx_1 - \int_l \frac{\chi}{GS} \varphi_6'(x_1) dx_1 \quad (2.54 \text{ b})$$

$$v_{65}^{(F)} = \int_l \frac{\varphi_5(x_1) - 1}{EI} dx_1 \quad (2.55 \text{ a})$$

$$v_{66}^{(F)} = \int_l \frac{\varphi_6(x_1)}{EI} dx_1 \quad (2.55 \text{ b})$$

O sistema de equações para cálculo dos coeficientes da matriz de rigidez geométrica é dado por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_{II} & \mathbf{E}_{IF} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{FF} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{If} \\ \mathbf{f}_{Ff} \end{bmatrix} = -f_{4i} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_0 \\ \mathbf{v}_{FF} \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

em que

$$\mathbf{v}_{FF} = \begin{bmatrix} v_{44}^{(F)} & 0 & 0 \\ 0 & v_{55}^{(F)} & v_{56}^{(F)} \\ 0 & v_{65}^{(F)} & v_{66}^{(F)} \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

Os demais termos serão idênticos àqueles definidos na Equação (2.12).

A matriz de rigidez geométrica de elemento, \mathbf{K}_g , compõe-se, portanto, dos termos \mathbf{f}_{Ii} , \mathbf{f}_{If} , \mathbf{f}_{Fi} , \mathbf{f}_{Ff} , calculados a partir de (2.38) e (2.56) e organizados em forma matricial conforme se indica na Equação (2.19). Para o caso particular em que o elemento possui rigidez constante, \mathbf{K}_g é dada por:

$$\mathbf{K}_g = \begin{bmatrix} \frac{f_1}{l} & 0 & 0 & \frac{f_4}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f_1 (5\varphi_y + 6)}{5 l(1 + \varphi_y)} & \frac{f_1}{10(1 + \varphi_y)} & 0 & \frac{f_4 (5\varphi_y + 6)}{5 l(1 + \varphi_y)} & -\frac{f_4}{10(1 + \varphi_y)} \\ 0 & \frac{f_1}{10(1 + \varphi_y)} & \frac{f_1 l (5\varphi_y + 8)}{60(1 + \varphi_y)} & 0 & \frac{f_4}{10(1 + \varphi_y)} & \frac{f_4 l}{(1 + \varphi_y)} \left(\frac{1}{30} + \frac{\varphi_y}{12} \right) \\ -\frac{f_1}{l} & 0 & 0 & -\frac{f_4}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{f_1 (5\varphi_y + 6)}{5 l(1 + \varphi_y)} & -\frac{f_1}{10(1 + \varphi_y)} & 0 & -\frac{f_4 (5\varphi_y + 6)}{5 l(1 + \varphi_y)} & \frac{f_4}{10(1 + \varphi_y)} \\ 0 & \frac{f_1}{10(1 + \varphi_y)} & -\frac{f_1 l}{(1 + \varphi_y)} \left(\frac{1}{30} + \frac{\varphi_y}{12} \right) & 0 & \frac{f_4}{10(1 + \varphi_y)} & -\frac{f_4 l (5\varphi_y + 8)}{60(1 + \varphi_y)} \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

com $\varphi_y = \frac{12EI\chi}{GSI^2}$

É importante ressaltar que f_1 e f_4 são, respectivamente, as forças normais resultantes nos nós inicial e final de cada elemento, não sendo necessariamente iguais (vide Figura 2.10).



Figura 2.10 Forças axiais no elemento

2.1.3 Elementos com rigidez variável ao longo do comprimento

Um dos objetivos da formulação proposta neste trabalho é criar opções de modelagem de elementos com rigidez variável. Logo, com esse fim, apresenta-se abaixo a generalização dessa estratégia para os casos em que a rigidez dos elementos estruturais reticulados varie segundo leis quaisquer. Particularmente, consideram-se os seguintes tipos de leis de variação de rigidez (além da constante): linear, parabólica, cúbica e quártica.

Como no caso geral de variação de rigidez, as integrais que compõem as expressões das matrizes \mathbf{A}_{II} , \mathbf{A}_{FF} , \mathbf{v}_{II} e \mathbf{v}_{FF} não podem ser avaliadas analiticamente, torna-se imprescindível a consideração de um esquema de integração numérica. No âmbito deste trabalho foi utilizado o processo de integração Gauss-Legendre (Bathe, 1996), no qual a integral é substituída por um somatório do valor da função avaliada em certos pontos amostrais do intervalo de integração e ponderada pelos respectivos pesos. Aplicando-se esse processo às expressões dos coeficientes a_{ij} e v_{ij} , escreve-se:

$$a_{ij} = \int_l g_{ij}(x) dx_1 = \int_{-1}^1 g_{ij}[x(\eta)] |J(\eta)| d\eta = \frac{l}{2} \sum_{k=1}^{npg} g_{ij}[x(\eta_k)] \omega_k \quad (2.59a)$$

$$v_{ij} = \int_l h_{ij}(x) dx_1 = \int_{-1}^1 h_{ij}[x(\eta)] |J(\eta)| d\eta = \frac{l}{2} \sum_{k=1}^{npg} h_{ij}[x(\eta_k)] \omega_k \quad (2.59 b)$$

em que os integrandos, $g_{ij}(x)$ e $h_{ij}(x)$, relacionam-se, respectivamente, com os coeficientes a_{ij} e v_{ij} ; η_k é a abscissa do k -ésimo ponto de integração; ω_k é o fator de pesagem correspondente e npg é o número de pontos de integração. Na Figura 2.11, apresentam-se as funções de interpolação (linear, parabólica, cúbica e quártica) adotadas neste trabalho para aproximação da variação de rigidez dos elementos. Note-se que essas funções são convenientemente mapeadas no intervalo das coordenadas naturais, $-1 \leq \eta \leq +1$, já que assim podem ser prontamente consideradas na quadratura de Gauss-Legendre (Equações 2.59).

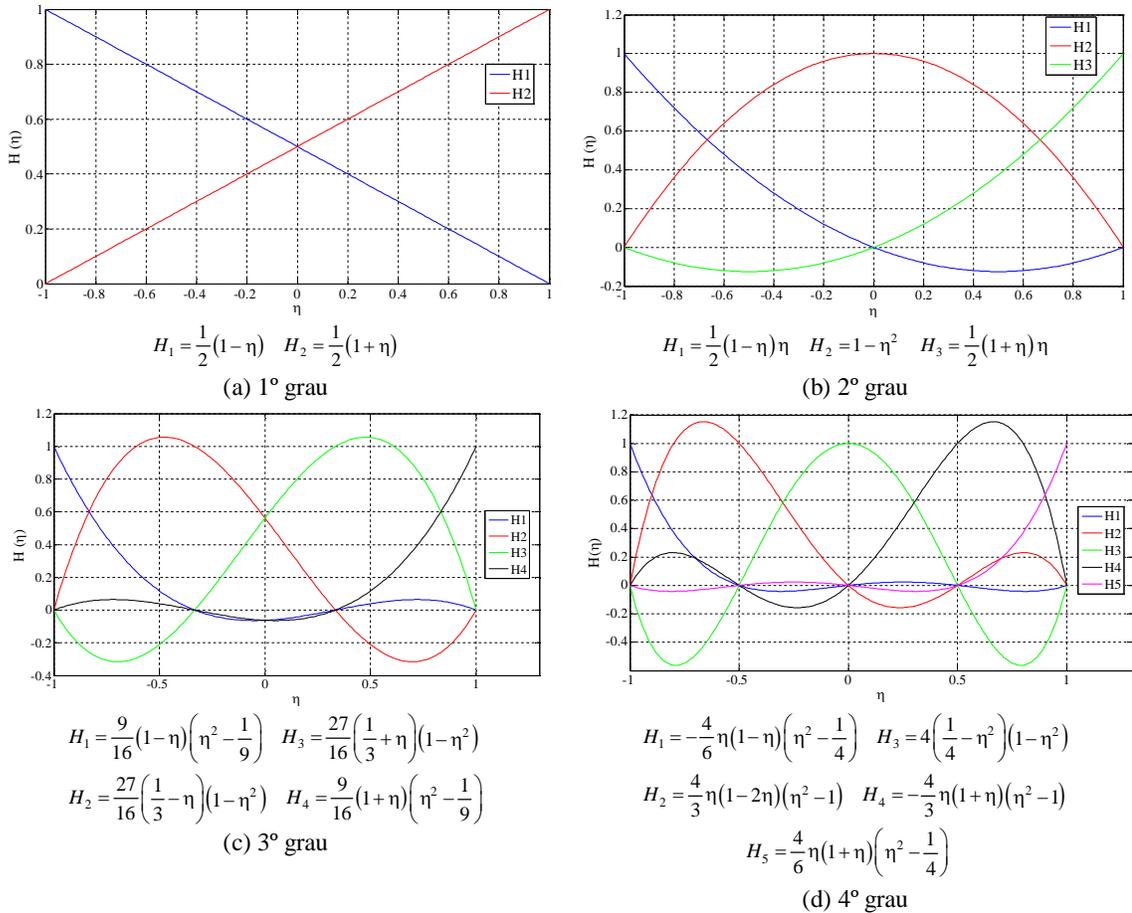
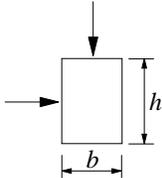
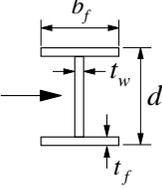
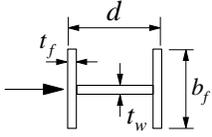
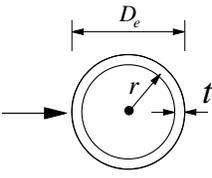
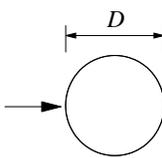
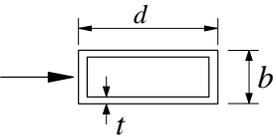
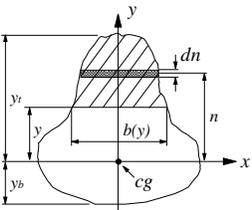


Figura 2.11 Funções de interpolação

2.1.4 Determinação das grandezas geométricas

Para o cálculo das rigidezes, é necessário o conhecimento de algumas grandezas geométricas da seção transversal como a área (S), fator de forma (χ) e inércia (I). No referido programa, considera-se a biblioteca de seções apresentada na Tabela 2.1.

Tabela 2.1 Biblioteca de seções disponíveis no programa

Seção	Descrição	Fator de forma ao cisalhamento
	Seção retangular Força cisalhante paralela às bordas	$\frac{6}{5} \frac{S}{bd}$
	Seção I Força cisalhante paralela ao flange	$\frac{3}{5} \frac{S}{t_f b_f}$
	Seção I Força cisalhante paralela à alma	$\frac{S}{t_w d}$
	Seção tubular de parede fina Força cisalhante	$\frac{S}{\pi r t}$
	Seção circular Força cisalhante	$\frac{10}{9}$
	Seção retangular tubular de parede fina Força cisalhante paralela à direção d	$\frac{S}{2t d}$
	Seção genérica Força cisalhante paralela à direção y	$\frac{I_x^2}{\int_{y_b}^{y_t} \frac{Q^2(y)}{b(y)} dy}$

Ressalta-se que as propriedades das seções usuais incorporadas ao programa computacional (retangular, I, H, circular, tubular circular, tubular retangular) são calculadas analiticamente. No caso, porém, da modelagem de seções arbitrárias, as suas propriedades geométricas são calculadas por uma formulação baseada em integrais de contorno. As expressões básicas utilizadas para esse cálculo são dadas pelas relações abaixo, em termos das grandezas mostradas na Figura 2.12.

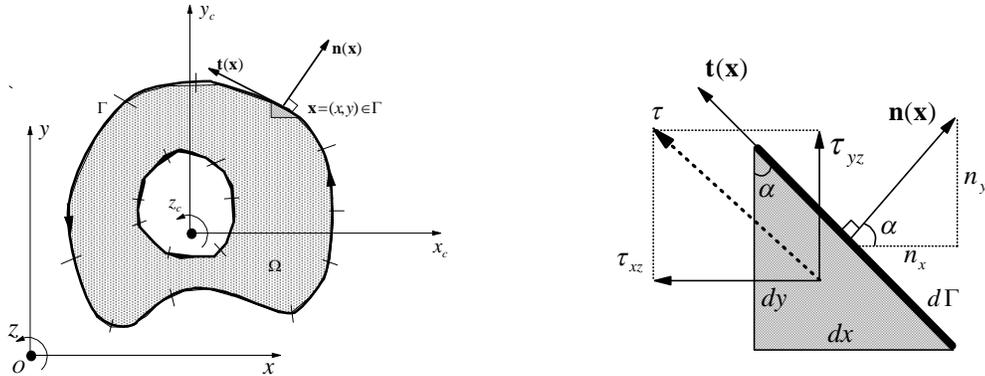


Figura 2.12 Seção transversal genérica e o detalhe do contorno
Fonte: Pereira, 2015

$$S = \int_{\Omega} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial(x)}{\partial x} d\Omega = \oint_{\Gamma} x n_x d\Gamma \quad (2.60 \text{ a})$$

$$I_x = \int_{\Omega} y^2 d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial(x y^2)}{\partial x} d\Omega = \oint_{\Gamma} x y^2 n_x d\Gamma \quad (2.60 \text{ b})$$

$$x_c = \frac{1}{S} \int_{\Omega} x d\Omega = \frac{1}{S} \int_{\Omega} \frac{\partial(x y)}{\partial x} d\Omega = \frac{1}{S} \oint_{\Gamma} x y n_x d\Gamma \quad (2.60 \text{ c})$$

$$y_c = \frac{1}{S} \int_{\Omega} y d\Omega = \frac{1}{S} \int_{\Omega} \frac{\partial(x y)}{\partial x} d\Omega = \frac{1}{S} \oint_{\Gamma} x y n_x d\Gamma \quad (2.60 \text{ d})$$

em que x e y são a abscissa e a ordenada do ponto nodal, respectivamente.

É importante ressaltar que as expressões 2.60 são facilmente obtidas aplicando o Teorema de Green. Maiores detalhes podem ser encontrados em Hillssheim (2013).

2.2 Carga Crítica

Ao longo do caminho não-linear de equilíbrio, as configurações de equilíbrio podem sofrer mudanças de caráter qualitativo no que se refere a sua estabilidade. Essas mudanças estão associadas aos pontos críticos que podem ser pontos de bifurcação ou pontos limites. Nesses

pontos, a tangente ao caminho não-linear de equilíbrio é nula, como mostra a Figura 2.13 (Gonçalves, 2003).

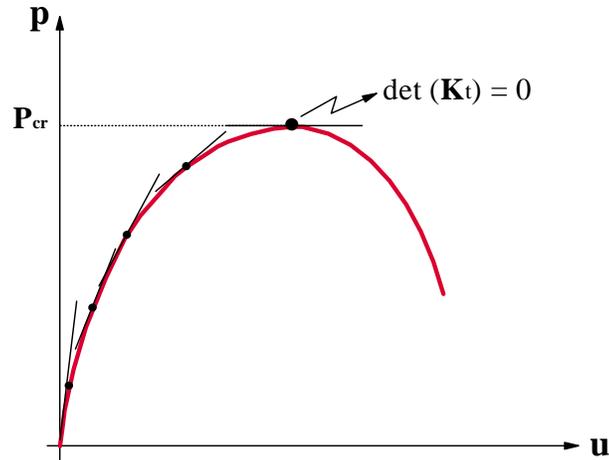


Figura 2.13 Ponto crítico na trajetória de equilíbrio

Neste contexto, a obtenção da carga crítica não necessita de uma análise estrutural completa, mas apenas da determinação dos valores de carga para os quais o determinante da matriz de rigidez se anula. O procedimento utilizado para o cálculo é a redução do problema descrito pela Equação (2.2) em um problema de autovalor, mostrado a seguir:

$$(\mathbf{K}_e - \lambda \mathbf{K}_g) \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (2.61)$$

Para a resolução da Equação (2.61) foram utilizadas as rotinas computacionais do pacote LAPACK (*Linear Algebra Package*) disponíveis livremente na internet através do site <http://www.netlib.org/lapack/>.

2.3 Aplicações Parciais

Nesta seção apresentam-se algumas aplicações parciais referentes ao cálculo de cargas críticas de colunas e vigas-coluna com elementos não prismáticos. Essas aplicações visam validar a formulação para obtenção das matrizes de rigidez implementada no programa NAESY. Neste contexto, para fins de comparação, utilizou-se o *software* SAP2000 (2013) e, quando pertinente, a modelagem dos problemas com a estratégia de variação discreta, denominada como variação em salto, na qual a mudança da seção é simulada utilizando-se vários elementos de seção constante.

2.3.1 Pilar de seção retangular não prismática

Nesta aplicação determina-se a carga crítica do pilar de concreto de seção retangular, com altura variando linearmente ao longo do comprimento, apresentado na Figura 2.14. As propriedades físicas e geométricas do pilar são: $l = 6$ m, $h_i = 0,40$ m, $h_f = 0,20$ m, $b = 0,15$ m, $E = 21$ GPa e $\nu = 0,2$.

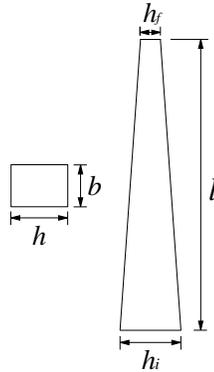


Figura 2.14 Pilar não-prismático e propriedades

Diferentes condições de apoio e discretizações do pilar foram consideradas na análise, como mostram as Figuras 2.15 e 2.16, respectivamente.

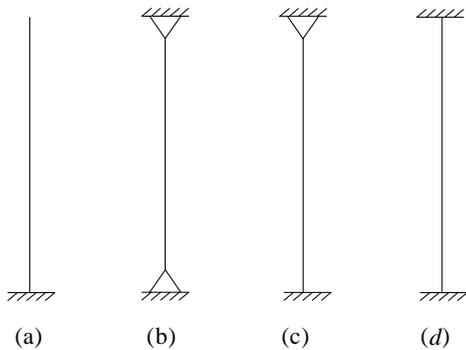


Figura 2.15 Condições de contorno essenciais

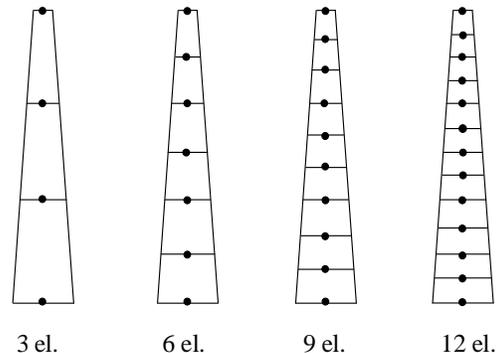


Figura 2.16 Discretizações utilizadas

Utilizaram-se, inicialmente, as opções de variação linear de altura e variação cúbica de inércia. Visando a validação dos resultados, este exemplo foi também analisado via SAP2000 (2013), considerando variação cúbica de inércia e a discretização da coluna em 5 elementos. Como vê-se nas Tabelas 2.2 e 2.3, os resultados obtidos pelo programa NAESY e pelo SAP2000 (2013) apresentam boa concordância, validando, portanto, a matriz de rigidez geométrica implementada. Verifica-se também que as cargas críticas determinadas considerando variação cúbica de inércia foram coincidentes com as obtidas considerando variação linear da altura.

Tabela 2.2 Carga crítica obtida com variação linear da altura

Condições de contorno	NAESY (kN)				SAP2000 (kN)	Erro (%) (12 el. × resp. SAP2000)
	3 el.	6 el.	9 el.	12 el.		
(a)	576,256	639,572	653,659	659,919	622,203	6,061
(b)	1.508,510	1.649,614	1.670,012	1.675,618	1.683,115	0,445
(c)	2.940,865	3.302,248	3.374,998	3.374,998	3.391,129	0,476
(d)	25.480,808	6.752,589	6.633,771	6.596,122	6.553,435	0,651

Tabela 2.3 Carga crítica obtida com variação cúbica da inércia

Condições de contorno	NAESY (kN)				SAP2000 (kN)	Erro (%) (12 el. × resp. SAP2000)
	3 el.	6 el.	9 el.	12 el.		
(a)	576,242	639,571	653,660	659,921	622,203	6,062
(b)	1.508,428	1.649,631	1.670,010	1.675,615	1.683,115	0,446
(c)	2.940,852	3.302,501	3.359,337	3.375,011	3.391,129	0,475
(d)	7.337,528	6.752,981	6.633834	6.595,864	6.553,435	0,647

Por fim, com o objetivo de testar as diferentes possibilidades de modelagem de variação de rigidez disponíveis no NAESY, avaliou-se a carga crítica do pilar, com a condição de contorno engastado-livre e a discretização em 12 elementos, considerando-se variação linear, parabólica e cúbica de inércia. A partir dos resultados mostrados na Tabela 2.4, observa-se uma grande sensibilidade na modelagem de elementos não prismáticos. Consequentemente, vê-se o quão relevante é a etapa de determinação do tipo de variação para que o modelo simplificado se aproxime do modelo real da estrutura e proporcione a obtenção de resultados mais precisos.

Tabela 2.4 Carga crítica obtida para diferentes variações da inércia

Modelagem	Carga Crítica (kN)		Erro (%)
	NAESY	SAP2000	
Variação linear	794,221	770,764	3,043
Variação parabólica	626,899	661,537	5,236
Variação cúbica	659,921	622,283	6,062

2.3.2 Viga não prismática submetida à flexo-compressão

A segunda aplicação consiste na determinação do fator de carga crítica, λ , da viga-coluna bi-apoiada com comprimento $l = 2$ m, submetida à carga axial $P_x = 100$ kN e ao momento fletor $M_y = 2000$ kN.m, mostrada na Figura 2.17.

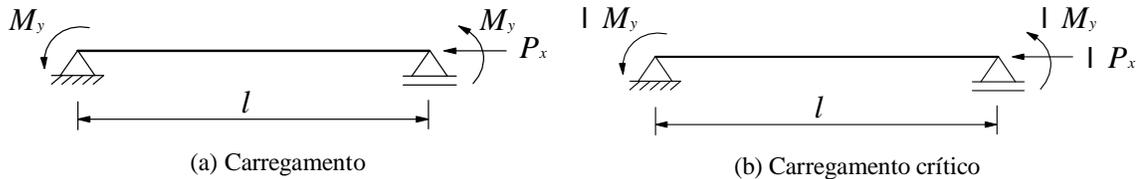


Figura 2.17 Viga-coluna

As propriedades físicas da viga são: módulo de elasticidade $E = 205$ GPa e coeficiente de *Poisson* $\nu = 0,3$. Foram considerados diferentes tipos de peças não prismáticas (Figura 2.18) cujas propriedades geométricas constam na Tabela 2.5. Ressalta-se que a peça da Figura 2.18.f consiste de uma seção incomum, considerada especialmente de modo a testar o módulo do programa NAESY que calcula propriedades de seções por meio de integrais de contorno. Comenta-se, neste último exemplo, em particular, que o processo de geração do modelo de análise com o SAP2000 (2013) foi especialmente complicado, já que para uma aproximação mais conveniente da geometria desse elemento, 3 seções especiais tiveram que ser criadas.

Nas análises via NAESY e SAP2000 (2013) adotou-se na modelagem da seção não prismática a opção de variação cúbica de inércia e também a variação da seção em salto, com 20 elementos constantes. A comparação dos resultados obtidos para o fator de carga, λ , são mostrados na Tabela 2.4. Menciona-se que os valores entre parênteses, abaixo dos resultados referentes ao NAESY e ao SAP2000 (2013), correspondem aos erros relativos à resposta da modelagem em salto, a qual foi coincidente para os dois programas computacionais. Novamente verifica-se que os resultados obtidos através das diferentes modelagens apresentam boa correlação.

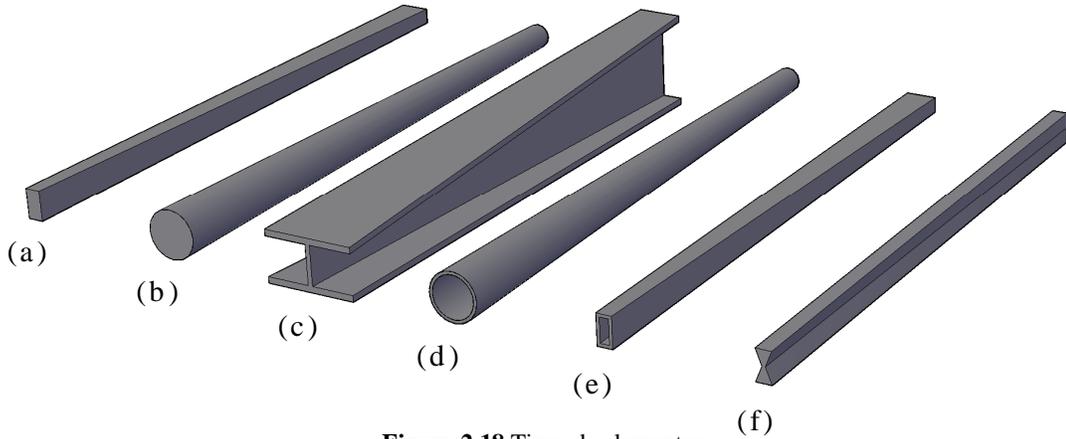


Figura 2.18 Tipos de elementos

Tabela 2.5 Propriedades geométricas das peças da Figura 2.18

Tipo	Seção	Propriedades geométricas da seção (m)	
		Seção inicial	Seção final
(a)		$h_i = 0,100$ $b_i = 0,050$	$h_f = 0,050$ $b_f = 0,100$
(b)		$D_i = 0,160$	$D_f = 0,080$
(c)		$b_i = 0,30$ $d_i = 0,15$ $t_f = 0,02$ $t_w = 0,015$	$b_f = 0,15$ $d_f = 0,30$ $t_f = 0,02$ $t_w = 0,015$
(d)		$D_{ext-i} = 0,160$ $t = 0,010$	$D_{ext-f} = 0,80$ $t = 0,010$
(e)		$h_i = 0,100$ $b_i = 0,050$ $t = 0,010$	$h_f = 0,050$ $b_f = 0,100$ $t = 0,010$
(f)		$h_i = 0,100$ $b_i = 0,050$ $n_i = 0,010$	$h_f = 0,050$ $b_f = 0,100$ $n_f = 0,050$

Tabela 2.4 Fator de carga (λ)

Seção	N° de elementos	NAESY (λ)	SAP2000 (λ)	SALTO (NAESY, 20 el.)	Erro NAESY×SAP2000 (%)
(a)	3	11,32 (7,44%)	10,72 (12,35%)	12,23	5,30
(b)	6	38,99 (3,35%)	43,29 (7,31%)	40,34	9,93
(c)	3	387,71 (3,63%)	376,64 (6,38%)	402,30	2,86
(d)	6	21,68 (2,25%)	22,25 (0,32%)	22,18	2,56
(e)	3	8,42 (2,43%)	8,05 (6,72%)	8,63	4,39
(f)	3	18,86 (0,48%)	18,74 (0,16%)	18,77	0,64

Capítulo 3

Análise Não-Linear Geométrica

A análise completa de um sistema estrutural consiste na determinação dos seus deslocamentos, esforços e reações de apoio quando submetido a ações externas solicitantes. Sendo assim, para se proceder a essa análise a partir da formulação apresentada, a Equação 2.1 ou 2.2, reescritas a seguir, deve ser resolvida para os deslocamentos nodais \mathbf{u} .

$$\mathbf{K}_t \mathbf{u} = \mathbf{f}, \text{ ou} \quad (3.1)$$

$$(\mathbf{K}_e - \lambda \mathbf{K}_g) \mathbf{u} = \mathbf{f}. \quad (3.2)$$

A partir dos deslocamentos podem-se determinar os esforços internos nos elementos, bem como as reações de apoio da estrutura. Contudo, os elementos da matriz de rigidez tangente, \mathbf{K}_t , não podem ser calculados antes que os esforços axiais em cada elemento sejam conhecidos, pois são funções das incógnitas do problema (\mathbf{u}). Sendo assim, torna-se necessário o uso de um processo de solução incremental-iterativo.

No presente trabalho o método iterativo utilizado para resolver o sistema não-linear de equações é o procedimento de *Newton-Raphson*. Esse método é um dos processos iterativos mais amplamente utilizados na resolução de sistemas de equações não-lineares. Nele as ações externas, sob as quais o sistema estrutural é submetido, são mantidas constantes ao longo de cada passo do processo incremental, por isso ele também é conhecido como método do controle de cargas (Yang e Kuo, 1994).

Deve-se, no entanto, mencionar que apesar de sua eficiência, o método de *Newton-Raphson* com controle de carga não é capaz de descrever completamente a trajetória de equilíbrio nos casos em que nesta surgem pontos limites, ou seja, quando a matriz de rigidez é singular. Para contornar essa limitação, outras técnicas iterativas, como o controle do comprimento de arco, podem ser associadas ao referido método para obtenção da trajetória de equilíbrio completa da estrutura. Esse assunto foi tratado em diversos trabalhos como Saffari *et al.* (2013), Pires (2012) e Silva (2009).

Apesar da relevância do estudo do comportamento pós-crítico, neste trabalho foi considerado apenas o Método de *Newton–Raphson* padrão (*full Newton–Raphson*), com matriz atualizada em cada iteração, cuja formulação é apresentada a seguir.

3.1 Método de *Newton–Raphson*

Para implementação do método de *Newton–Raphson* no programa NAESY, foi utilizada a formulação apresentada por Yang e Kuo (1994). Em relação à notação utilizada, cita-se que o processo de deformação do sistema estrutural é descrito em três configurações: a configuração inicial indeformada (C_0), a última configuração calculada (C_1) e a configuração corrente desconhecida (C_2). As grandezas determinadas no processo incremental e no iterativo serão distinguidas por serem precedidas por Δ e δ , respectivamente. Cabe ressaltar, também, que os contadores, superescritos (i) à direita das variáveis, se referem ao passo de carga, enquanto os subscritos à direita (j) indicam o número da iteração.

O sistema de equações não-lineares no i-ésimo passo de carga e na j-ésima iteração pode ser descrito na forma:

$$\mathbf{K}_{j-1}^i \delta \mathbf{u}_j^i = \mathbf{p}_j^i - \mathbf{f}_{j-1}^i, \quad (3.3)$$

em que $\delta \mathbf{u}_j^i$ representa o deslocamento, \mathbf{p}_j^i é o vetor de ações externas sob o qual a estrutura está submetida na j-ésima iteração e \mathbf{f}_{j-1}^i , as forças internas da iteração anterior.

As condições iniciais que regem o sistema (3.3) são:

$$\mathbf{K}_0^i = \mathbf{K}_l^{i-1}, \quad \mathbf{f}_0^i = \mathbf{f}_l^{i-1}, \quad \mathbf{u}_0^i = \mathbf{u}_l^{i-1}, \quad (3.4)$$

nas quais o subscrito l denota a última iteração.

O vetor de cargas externas da j-ésima iteração, \mathbf{p}_j^i , pode ser determinado pela soma do vetor de cargas externas da iteração anterior, \mathbf{p}_{j-1}^i , com o vetor incremento de cargas, $\lambda_j^i \hat{\mathbf{p}}$, resultante da multiplicação do vetor de cargas de referência, $\hat{\mathbf{p}}$, pelo fator de cargas, λ_j^i , ou seja:

$$\mathbf{p}_j^i = \mathbf{p}_{j-1}^i + \lambda_j^i \hat{\mathbf{p}} \quad (3.5)$$

Resolvendo a Equação (3.3) para o incremento de deslocamento, o deslocamento total, \mathbf{u}_j^i , pode ser obtido, como segue:

$$\mathbf{u}_j^i = \mathbf{u}_{j-1}^i + \delta \mathbf{u}_j^i \quad (3.6)$$

O vetor dos resíduos de forças, \mathbf{r}_{j-1}^i , também referido como gradiente de forças, resulta da diferença entre as forças externas, \mathbf{p}_{j-1}^i , e as forças internas, \mathbf{f}_{j-1}^i . A partir desse preceito, a Equação (3.3) pode ser escrita na forma:

$$\mathbf{K}_{j-1}^i \delta \mathbf{u}_j^i = \lambda_j^i \hat{\mathbf{p}} + \mathbf{r}_{j-1}^i \quad (3.7)$$

ou ainda, segundo Batoz e Dhatt (1979)

$$\mathbf{K}_{j-1}^i \delta \hat{\mathbf{u}}_j = \hat{\mathbf{p}} \quad (3.8)$$

$$\mathbf{K}_{j-1}^i \delta \bar{\mathbf{u}}_j = \mathbf{r}_{j-1}^i \quad (3.9)$$

Por associação, pode-se escrever:

$$\delta \mathbf{u}_j^i = \lambda_j^i \delta \hat{\mathbf{u}}_j + \delta \bar{\mathbf{u}}_j . \quad (3.10)$$

Até então, a formulação incremental-iterativa foi descrita de forma geral. No entanto, a fim de se particularizar o processo acima no procedimento de *Newton-Raphson*, faz-se a seguinte observação, já relatada anteriormente, que no referido método, o vetor de ações externas é incrementado a cada passo de carga (apenas na primeira iteração). Sendo assim, para as demais iterações dentro do passo de carga, o fator λ_j^i é nulo.

Para melhor entendimento do processo implementado, pode-se observar o fluxograma apresentado na Figura 3.1. Através deste é possível verificar que a rotina de solução não-linear começa com o conhecimento prévio de algumas grandezas, a saber: a matriz de rigidez inicial, \mathbf{K}_0 , calculada na configuração indeformada da estrutura; o vetor de forças externas de referência, $\hat{\mathbf{p}}$; o fator de carga, λ ; a tolerância para se determinar a convergência do processo iterativo, *tol*, e o número de passos de carga, *numpc*.

A rotina então procede para a montagem do primeiro vetor de forças externas, \mathbf{p}_1^1 , dando início ao primeiro passo do *loop* incremental ($i=1$). Em seguida, o fluxo do algoritmo entra no *loop* iterativo, o qual busca encontrar a configuração deformada de equilíbrio do sistema estrutural, em que as forças internas se igualem às externas segundo a tolerância definida. Até que se atinja este objetivo, a rotina implementada passa, a cada iteração, pelos seguintes cálculos intermediários:

1. Determinação da correção de deslocamentos, $\delta \mathbf{u}$, pela solução de $\mathbf{K}_{j-1}^i \delta \hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{p}}$, e posterior multiplicação pelo fator de carga, λ , se $j=1$, ou pela solução direta de $\mathbf{K}_{j-1}^i \delta \mathbf{u} = \mathbf{r}$ se $j > 1$;
2. Decomposição de $\delta \mathbf{u}$ em suas parcelas $\delta \mathbf{u}_n$ (deslocamentos naturais) e $\delta \mathbf{u}_r$ (deslocamentos de corpo rígido) utilizando a abordagem corrotacional, aplicada localmente em cada elemento;
3. Cálculo da correção de esforços internos associados a $\delta \mathbf{u}_n$ para cada elemento;
4. Atualização das coordenadas;
5. Atualização da matriz de rigidez tangente $\mathbf{K}_{j-1}^i \rightarrow \mathbf{K}_j^i$;
6. Cálculo do vetor de forças internas $\mathbf{f}_j^i = \mathbf{f}_{j-1}^i + \delta \mathbf{f}_j^i$;
7. Determinação do gradiente de forças através da equação $\mathbf{r}_j^i = \mathbf{p}_j^i - \mathbf{f}_j^i$;
8. Cálculo da norma relativa e verificação da tolerância $\frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{p}_j^i\|} \leq tol$.

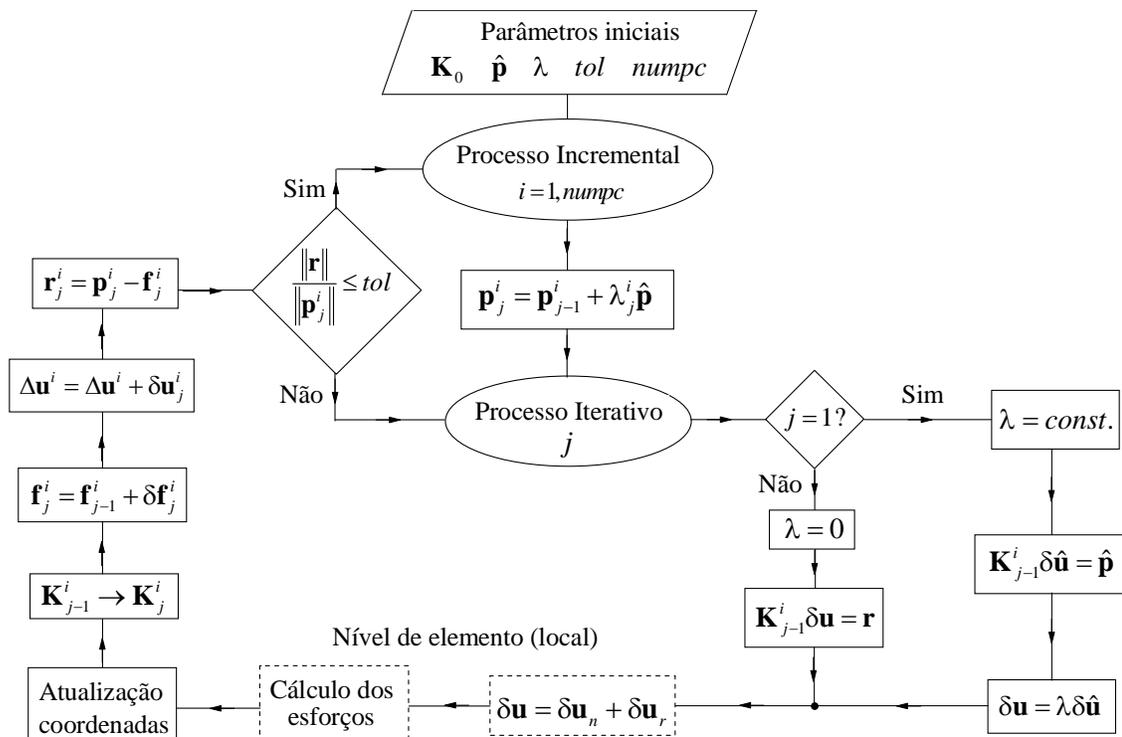


Figura 3.1 Fluxograma do Método de Newton-Raphson padrão

Para melhor entendimento do processo, a Figura 3.2 mostra de forma gráfica a formulação descrita no fluxograma anterior.

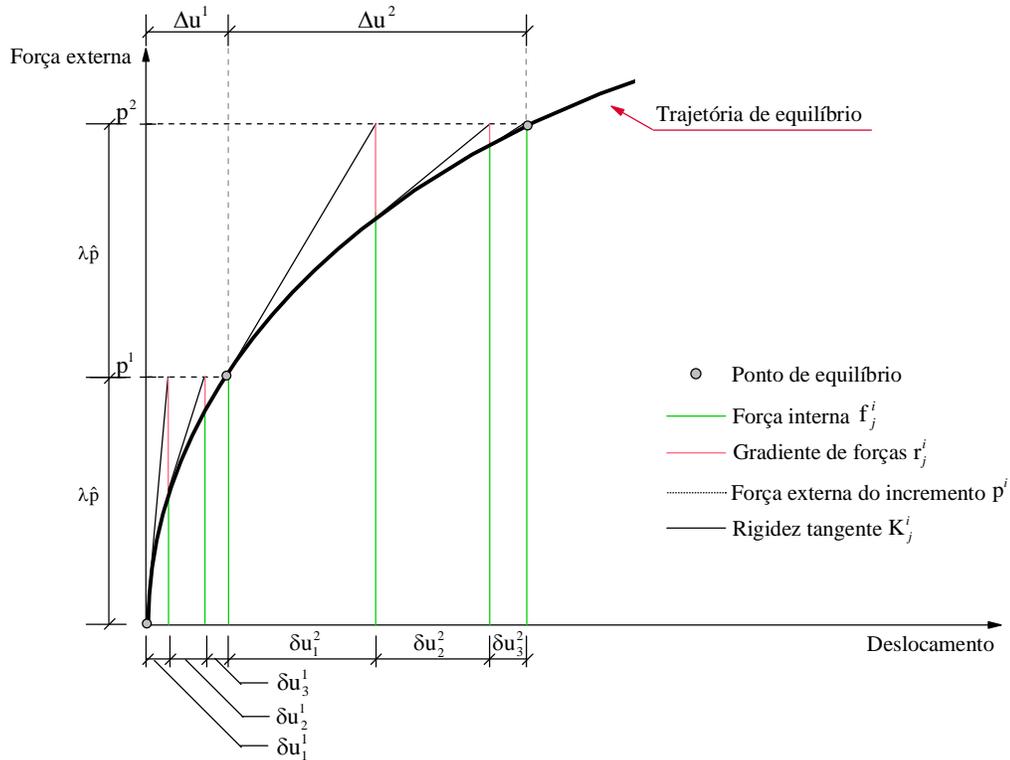


Figura 3.2 Método de Newton-Raphson padrão

Alguns pontos dessa estratégia merecem especial atenção. Primeiramente, cita-se que a atualização das coordenadas é feita, a cada iteração, a partir da correção dos deslocamentos $\delta \mathbf{u}$, e posteriormente, com as coordenadas atualizadas, procede-se à atualização da matriz de rigidez tangente. Ressalta-se, também, que para a avaliação do vetor de forças internas, utilizaram-se somente os incrementos de deslocamentos naturais, $\delta \mathbf{u}_n$. A decomposição dos deslocamentos, como mencionado acima, consiste na denominada abordagem corrotacional, a qual é descrita a seguir.

3.2 Descrição Corrotacional

Na análise não-linear incremental-iterativa implementada é necessário se conhecer as forças nos elementos em cada iteração do processo, tanto para a determinação da matriz de rigidez geométrica, \mathbf{K}_g , como para a obtenção do vetor de forças internas, \mathbf{f} , e cálculo do vetor de forças desequilibradas, \mathbf{r} . Com esta finalidade, o vetor correção de forças internas, $\delta \mathbf{f}_j^i$, de cada iteração é obtido utilizando-se a correção dos deslocamentos naturais, $\delta \mathbf{u}_n$.

As componentes do vetor de deslocamentos naturais, $\delta \mathbf{u}_n$, responsáveis pela deformação do elemento, são obtidas excluindo-se os deslocamentos de corpo rígido, $\delta \mathbf{u}_r$, do vetor deslocamentos, $\delta \mathbf{u}$, e constam em duas rotações naturais nos nós do elemento, θ_a e θ_b , e uma deformação natural, u_b , isto é:

$$\mathbf{u}_n^T = [0 \quad 0 \quad \theta_a \quad u_b \quad 0 \quad \theta_b] . \quad (3.11)$$

Menciona-se que para tal dedução, considera-se que os deslocamentos de corpo rígido ocorrem previamente aos naturais. Um esquema da configuração deformada C_2 em relação à configuração C_1 é mostrado na Figura 3.3.

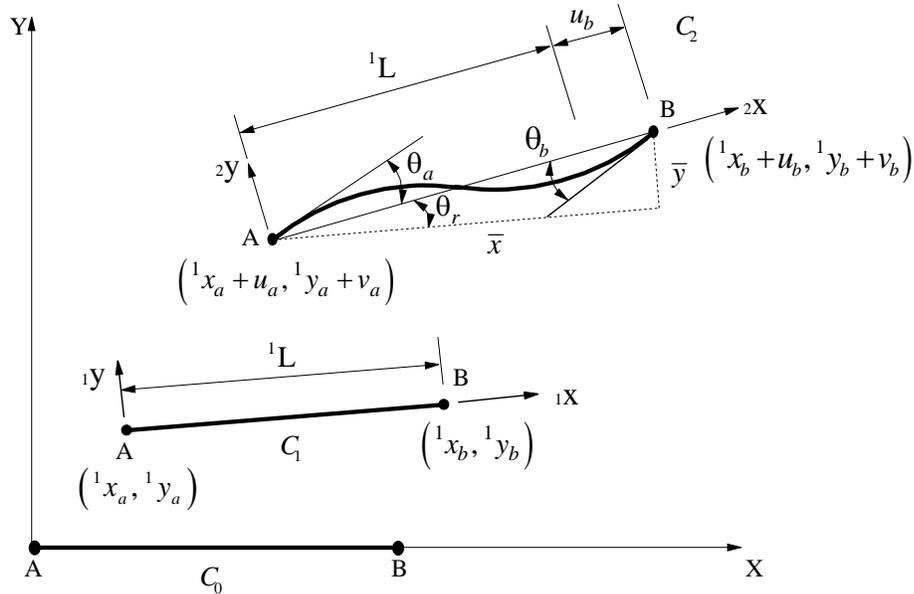


Figura 3.3 Deslocamentos naturais

Como dito anteriormente, θ_a e θ_b denotam as rotações naturais dos nós do elemento e podem ser escritas como:

$$\theta_a = r_a - \theta_r, \quad (3.12)$$

$$\theta_b = r_b - \theta_r, \quad (3.13)$$

em que r_a e r_b representam os incrementos de rotação gerados em cada passo do processo incremental.

Como pode ser observado na Figura 3.3, a rotação de corpo rígido θ_r é facilmente determinada por trigonometria, como segue:

$$\theta_r = \arctan\left(\frac{\bar{y}}{\bar{x}}\right), \quad (3.14)$$

sendo \bar{x} e \bar{y} as projeções do comprimento do elemento em C_2 ao longo dos eixos 1x e 1y , respectivamente, isto é,

$$\bar{x} = {}^1L + u_b - u_a \quad (3.15)$$

$$\bar{y} = v_b - v_a \quad (3.16)$$

em que 1L corresponde ao comprimento da viga em C_1 , u_a e u_b são os deslocamentos horizontais dos nós inicial (A) e final (B) do elemento, e v_a e v_b são os deslocamentos verticais em A e B, respectivamente.

A deformação natural, u_b , pode ser calculada como sugerido por Belytschko e Hsieh (1973). Primeiramente, define-se a equação que descreve o comprimento do elemento na configuração C_2 como

$${}^2L^2 = ({}^1L + u_b - u_a)^2 + (v_b - v_a)^2 \quad (3.17)$$

que pode ser reorganizada na forma

$${}^2L^2 - {}^1L^2 = 2{}^1L(u_b - u_a) + (u_b - u_a)^2 + (v_b - v_a)^2. \quad (3.18)$$

Tomando como base a definição de deformação natural, sabe-se que u_b resulta da diferença entre os comprimentos do elemento nas configurações C_2 e C_1 , em que:

$$U_b = \frac{1}{{}^2L + {}^1L} \left[2{}^1L(u_b - u_a) + (u_b - u_a)^2 + (v_b - v_a)^2 \right] \quad (3.19)$$

Para o caso em que o incremento de deformação entre as configurações é pequeno, o comprimento do elemento em C_2 pode ser considerado igual ao em C_1 , ou seja, ${}^2L - {}^1L$. Sendo assim, pode-se aproximar a Equação (3.19) por

$$U_b = \frac{1}{{}^2L} \left[2{}^1L(u_b - u_a) + (u_b - u_a)^2 + (v_b - v_a)^2 \right] \quad (3.20)$$

Alternativamente, e de forma mais simples, pode-se determinar também os deslocamentos de corpo rígido como:

$$\mathbf{u}_r^T = [u_a \quad v_a \quad \theta_r \quad u_a \quad v_a - \theta_r^1 L \quad \theta_r]. \quad (3.21)$$

3.3 Aplicações Parciais

A fim de se verificar a formulação apresentada neste capítulo, foram realizadas duas aplicações frequentemente usadas para validar formulações de elementos finitos e estratégias de solução não-linear, a saber: uma coluna engastada-livre submetida à carga excêntrica e o pórtico de Lee.

Além de ser reproduzido com as características físicas e geométricas originais, o pórtico de Lee foi modificado de forma a incluir em seu pilar o elemento de seção variável, importante objeto de estudo do presente trabalho. Nesse caso, para fins de comparação, o exemplo também foi analisado via SAP2000 (2013).

3.3.1 Pilar com carga excêntrica

Nesta aplicação tem-se a análise não-linear do pilar engastado-livre com carga excêntrica apresentado na Figura 3.4. As propriedades físicas e geométricas do pilar são: comprimento $L = 1$ m, área $S = 10^{-2} \text{ m}^2$, inércia $I = 10^{-5} \text{ m}^4$, fator de forma $\chi = 1$, módulo de elasticidade $E = 10^7 \text{ kN/m}^2$ e coeficiente de *Poisson* $\nu = 0,3$.

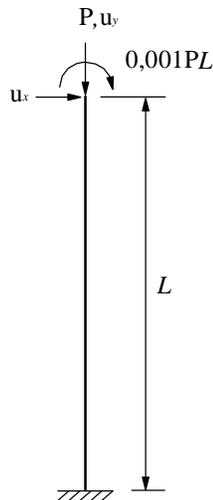


Figura 3.4 Pilar com carga excêntrica

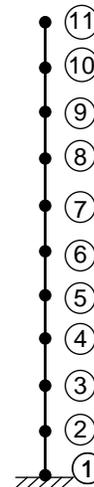


Figura 3.5 Pilar discretizado

Para a análise não-linear nos programas NAESY e SAP2000 (2013) o pilar foi discretizado em 10 elementos (Figura 3.5) e considerou-se uma carga $P = 5000 \text{ kN}$, dividida em 10000 passos de carga, e $tol = 10^{-8}$. Adotou-se um número tão grande de passos de cargas

para que o NAESY conseguisse reproduzir a trajetória mesmo em pontos em que a matriz de rigidez geométrica se aproximasse de uma matriz singular. As respostas obtidas também foram comparadas com as obtidas por Southwell (1941).

No gráfico da Figura 3.6 mostram-se os resultados para o deslocamento horizontal do nó 11 do pilar e pode-se observar que os mesmos foram bastante próximos. Menciona-se ainda, que os resultados de Southwell (1941) ficaram entre a solução do NAESY (linha vermelha) e do SAP2000 (2013) (linha azul).

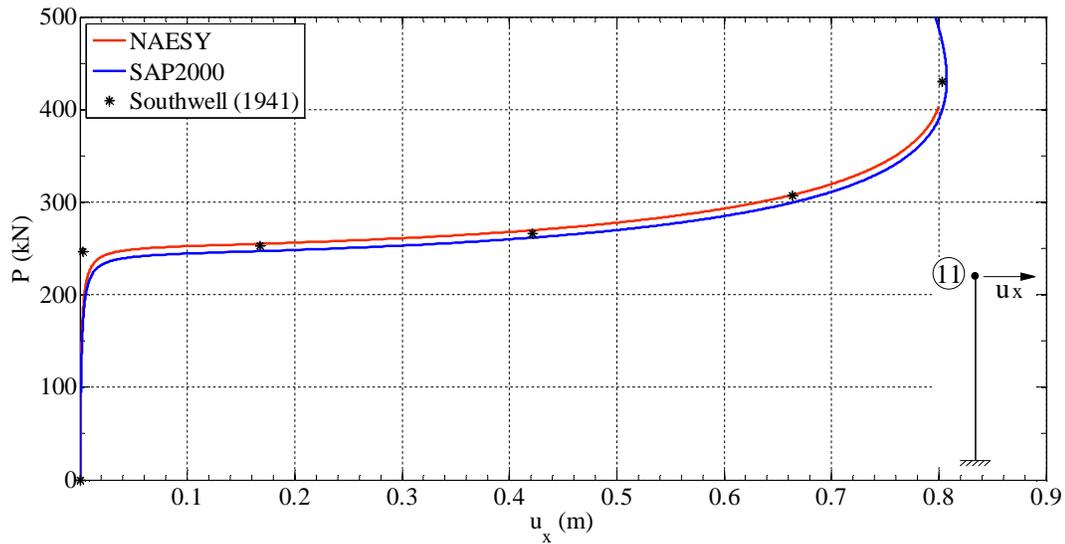


Figura 3.6 Trajetória de equilíbrio – deslocamento horizontal do nó 11

3.3.2 Pórtico de Lee

O problema analisado nesta seção, conhecido como Pórtico de Lee (Figura 3.7) foi primeiramente estudado e resolvido analiticamente por Lee *et al.* (1968). Posteriormente, essa estrutura foi analisada numericamente por vários autores como Schweizerhof e Wriggers (1986), Pacoste e Eriksson (1997), Galvão (2004) e Silva (2009).

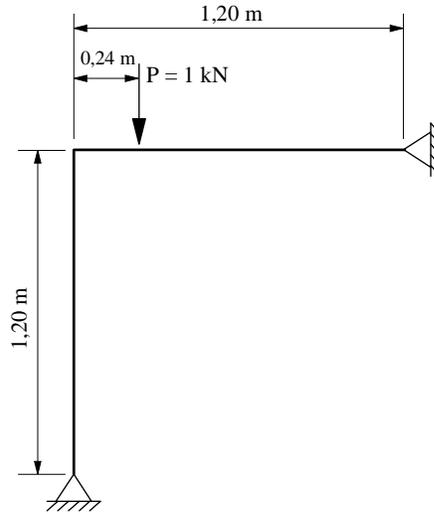


Figura 3.7 Pórtico de Lee

O pórtico é composto por um pilar e uma viga de comprimento $L = 1,20$ m e seção transversal com área $S = 6$ cm², inércia $I = 2$ cm⁴ e fator de forma $\chi = 1,2$. As propriedades físicas do material são: módulo de elasticidade $E = 720$ kN/cm² e coeficiente de *Poisson* $\nu = 0,3$. O sistema estrutural está submetido ao carregamento de $P = 1$ kN aplicado à 24 cm do nó da extremidade esquerda da viga.

Para as análises, o modelo estrutural foi discretizado em 20 elementos (10 elementos pertencentes ao pilar e 10 à viga), o carregamento foi dividido em 100 passos de carga ($numpc = 100$) e utilizou-se $tol = 10^{-6}$ para verificação da convergência. Para fins de comparação, o exemplo também foi resolvido via programa SAP2000 (2013). Os resultados obtidos por ambos os programas foram comparados com os apresentados por Schweizerhof e Wriggers (1986).

Nas Figuras 3.8, 3.9 e 3.10 mostram-se a trajetória de equilíbrio dos deslocamentos horizontal e vertical do nó 13 e da rotação do nó 6. Pode-se observar que a formulação implementada no NAESY mostrou bons resultados quando comparada com as respostas do SAP2000 (2013) e da referência (Schweizerhof e Wriggers, 1986).

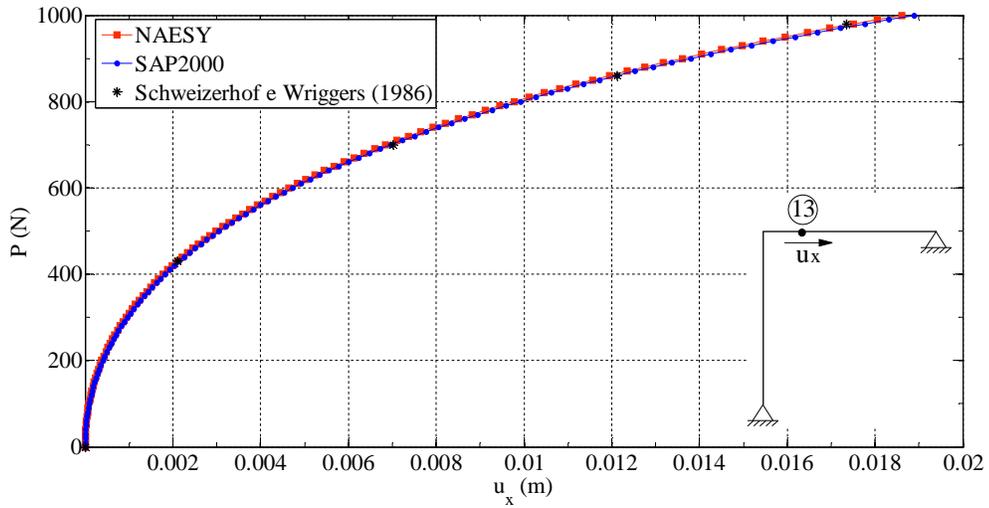


Figura 3.8 Trajetória de equilíbrio – deslocamento horizontal do nó 13

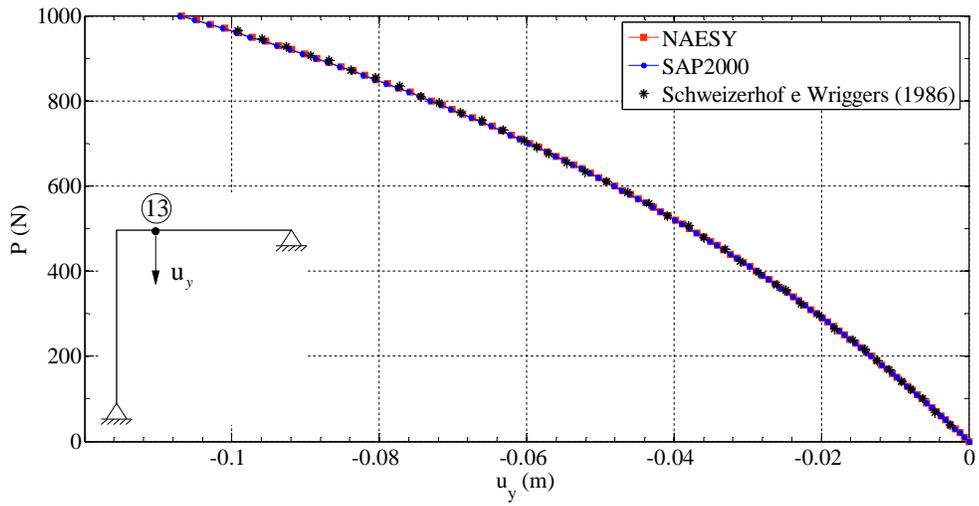


Figura 3.9 Trajetória de equilíbrio – deslocamento vertical do nó 13

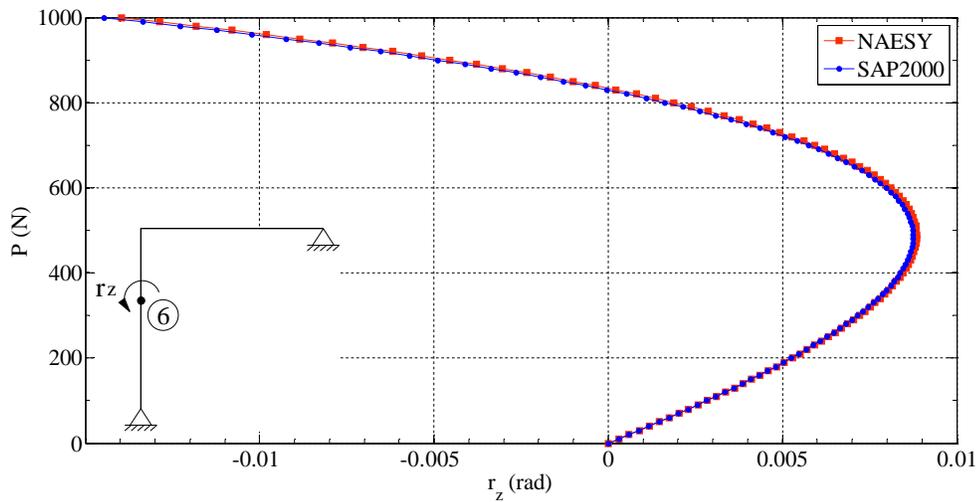


Figura 3.10 Trajetória de equilíbrio – rotação do nó 6

Em uma segunda análise alterou-se a geometria das seções transversais do pórtico. Neste modelo, a viga tem seção transversal retangular com altura $h = 2$ cm e base $b = 3$ cm, enquanto o pilar possui seção transversal com geometria arbitrária, cujos parâmetros variam linearmente ao longo do comprimento (Figura 3.11). As dimensões da seção inicial e final são mostradas na Figura 3.12 e na Tabela 3.1. As propriedades físicas, as condições de contorno e o carregamento do problema original foram mantidos.

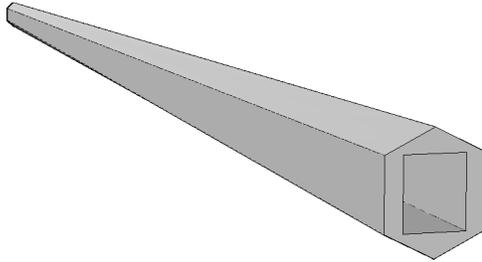


Figura 3.11 Pilar de seção arbitrária variável

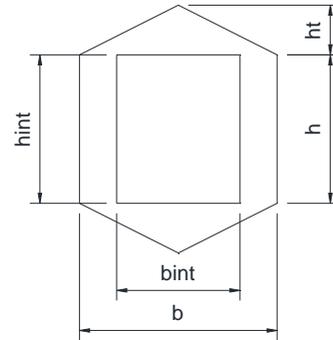


Figura 3.12 Seção transversal do pilar

Tabela 3.1 Variação nas dimensões da seção

	h (cm)	ht (cm)	b (cm)	hint (cm)	bint (cm)
seção inicial	3,0	1,0	4,0	3,0	2,5
seção final	1,0	0,5	1,0	1,0	0,5

O elemento de seção variável foi modelado considerando-se variação cúbica da inércia e adotaram-se a mesma discretização (20 elementos, sendo 10 deles pertencentes à viga e 10 ao pilar) e os mesmos parâmetros para realização da análise não-linear ($numpc = 100$, $tol = 10^{-6}$). Para fins de comparação, foi realizada também uma análise, no NAESY, considerando o pilar construído por 20 elementos variando em salto.

Nos gráficos das Figuras 3.13 e 3.14 têm-se a trajetória de equilíbrio do deslocamento horizontal do nó 13 e da rotação do nó 9, respectivamente. Novamente, os resultados obtidos via NAESY e SAP2000 (2013) foram muito próximos. Ressalta-se que os resultados do NAESY considerando variação cúbica e em salto foram quase coincidentes, comprovando, portanto, a eficiência da formulação não-linear e da estratégia de modelagem de elementos não prismáticos apresentada.

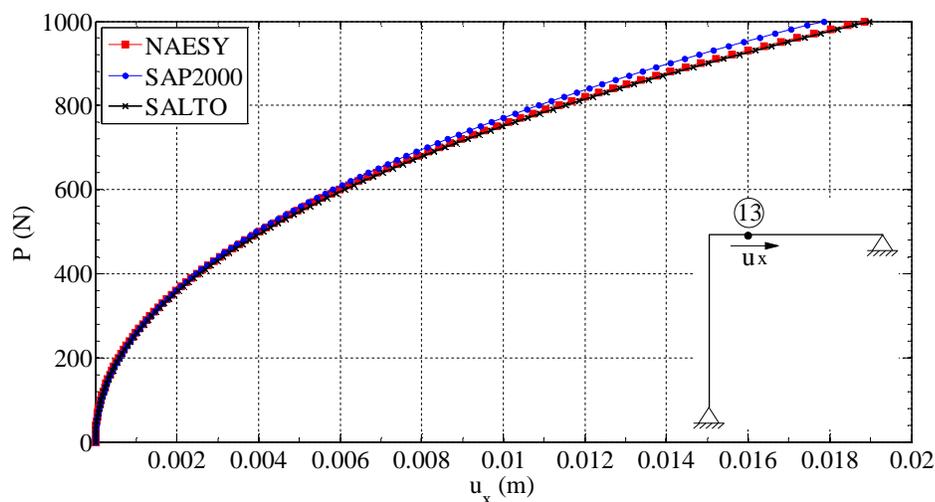


Figura 3.13 Trajetória de equilíbrio – deslocamento horizontal do nó 13

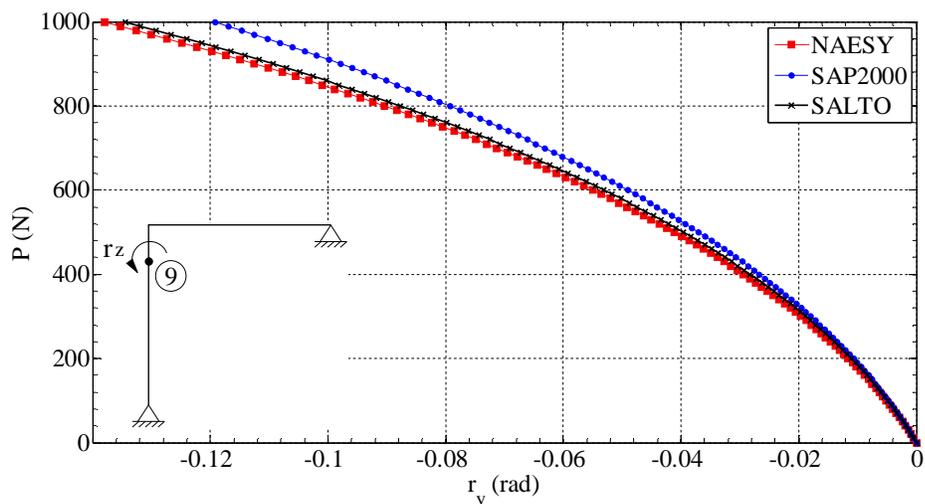


Figura 3.14 Trajetória de equilíbrio – Rotação do nó 9

3.4 Considerações Normativas para Análise Não-Linear Geométrica

A análise não-linear com base em teorias geometricamente exatas exige o emprego de ferramentas matemáticas mais sofisticadas, que geralmente demandam maior tempo computacional, principalmente quando o sistema estrutural é de grande porte. Neste contexto, os processos simplificados de avaliação da estabilidade global sugeridos pelas normas podem agilizar essa análise, reduzindo, portanto, o gasto computacional. Sendo assim, o presente trabalho, aborda também a análise não-linear geométrica simplificada para estruturas de concreto armado, prescrita na ABNT NBR 6118 (2014).

Para criar condições mais simples de cálculo, a ABNT NBR 6118 (2014) prescreve que a consideração dos efeitos de segunda ordem em uma análise estrutural depende do tipo de estrutura que será analisada, podendo esta ser classificada como de nós fixos ou de nós móveis.

No item 15.4.2 da ABNT NBR 6118 (2014), as estruturas de nós fixos são definidas como aquelas nas quais os deslocamentos horizontais dos nós são pequenos, conseqüentemente os efeitos globais de segunda ordem são desprezíveis, o que, em termos quantitativos, expressam-se, em geral, como inferiores a 10% dos respectivos esforços de primeira ordem. Em contrapartida, as estruturas de nós móveis são aquelas em que os deslocamentos horizontais não são pequenos, de maneira que os efeitos globais de segunda ordem tornam-se relevantes. Nessas estruturas devem ser obrigatoriamente considerados tanto os esforços de segunda ordem globais como os locais.

A classificação da estrutura como de nós fixos ou de nós móveis pode ser feita com base no parâmetro de instabilidade α ou no coeficiente γ_z definidos pelas normas técnicas.

3.4.1 Parâmetro de Instabilidade (α)

O parâmetro de instabilidade α foi idealizado por Beck e König, em 1967, ao estabelecerem um critério que determinasse se os efeitos de segunda ordem poderiam ser desprezados quando não representassem acréscimo superior a 10% em relação aos efeitos de primeira ordem. Em 1978, esse critério passou a fazer parte das recomendações do *Comité Euro-International du Béton* (Código Modelo CEB-FIP, 1978) e em 2003 foi incorporado à ABNT NBR 6118 (2014) (Ellwanger, 2012).

O parâmetro α é capaz de classificar a estrutura quanto a sua estabilidade global, porém não é possível, através dele, se estimar os efeitos de segunda ordem. Ele é calculado utilizando-se a equação

$$\alpha = H_{tot} \sqrt{\frac{N_k}{(E_{cs} I_c)}}, \quad (3.22)$$

em que H_{tot} é a altura total da estrutura medida a partir do topo da fundação ou de um nível pouco deslocável do subsolo; N_k é o somatório de todas as cargas verticais atuantes (a partir do nível considerado para o cálculo de H_{tot}) com seu valor característico, e $E_{cs} I_c$ representa o somatório dos valores de rigidez de todos os pilares na direção considerada, que no caso de

estruturas de pórticos, treliças ou mistas, pode ser considerado o valor da expressão $E_{cs}I_c$ de um pilar equivalente de seção constante.

O pilar equivalente a um sistema estrutural consiste em um pilar engastado e livre, de altura H_{tot} e seção constante tal que, submetido a cargas horizontais, apresente os mesmos deslocamentos em seu topo que os medidos no topo da estrutura considerada quando sujeita ao mesmo carregamento (Figura 3.15), ou seja, o pilar equivalente possui a mesma rigidez flexional que a estrutura considerada.

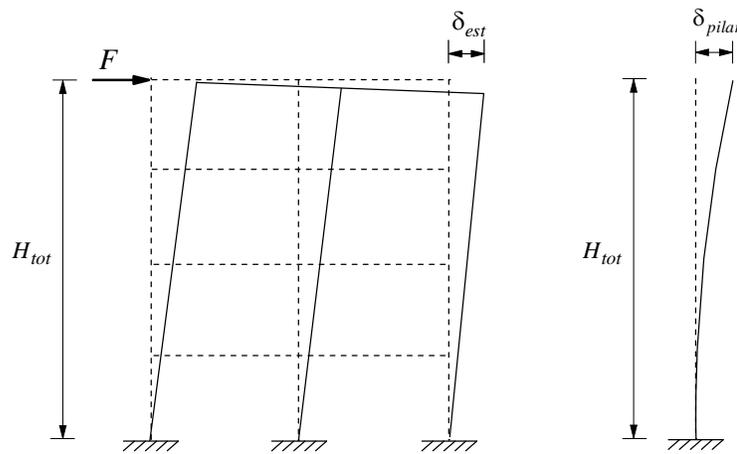


Figura 3.15 Pórtico plano e pilar com rigidez equivalente

Para fins de simplificação, a rigidez, $E_{cs}I_c$, de um pilar equivalente pode ser determinada com base na consideração de uma carga horizontal, F , no topo do edifício. Neste caso, a rigidez do pilar equivalente pode ser calculada a partir da expressão básica

$$(E_{cs}I_c)_{pilar} = \frac{F H_{tot}^3}{3\delta_{est}}, \quad (3.23)$$

em que δ_{est} corresponde ao deslocamento no topo da estrutura em estudo. Ressalta-se que o valor de I_c deve ser calculado considerando-se as seções brutas dos pilares e deve-se utilizar nos cálculos o módulo de elasticidade secante (E_{cs}), calculado da seguinte forma (item 8.2.8 ABNT NBR 6118, 2014):

$$E_{cs} = \alpha_i E_{ci}, \quad (3.24)$$

sendo

$$\alpha_i = 0,8 + 0,2 \frac{f_{ck}}{80} \leq 1,0, \quad (3.25)$$

com E_{ci} sendo o módulo de elasticidade do concreto e f_{ck} a resistência do concreto à compressão. Para concretos cuja resistência à compressão varie entre 20 MPa e 50 MPa, o módulo de elasticidade, E_{ci} , pode ser calculado por

$$E_{ci} = \alpha_E + 5600\sqrt{f_{ck}}, \quad (3.26)$$

sendo α_E um parâmetro que depende do tipo de agregado utilizado na fabricação do concreto e E_{ci} e f_{ck} são dados em megapascal (MPa).

O parâmetro de instabilidade é comparado com um valor limite, α_1 , relacionado com o número de andares do sistema estrutural, n , como segue:

$$\alpha_1 = 0,2 + 0,1n; \quad \text{se } n \leq 3 \quad (3.27 \text{ a})$$

$$\alpha_1 = 0,6; \quad \text{se } n \geq 4 \quad (3.27 \text{ b})$$

O valor de α_1 estipulado na Equação (3.27b) normalmente é adotado no caso das estruturas usuais de edifícios. Pode ser considerado também, e é até mais indicado, em casos de associações de pilares–parede e para pórticos associados a pilares–parede. No caso de contraventamento constituído exclusivamente por pilares–parede, o valor admitido para α_1 deve ser 0,7, e na situação em que só existirem pórticos, α_1 deve ser reduzido para 0,5.

Se α for menor que α_1 a estrutura é considerada como de nós fixos, e os efeitos de segunda ordem podem ser desconsiderados nos cálculos (ABNT NBR 6118 (2014): item 15.5.2). É importante ressaltar que o parâmetro de instabilidade deve ser aplicado, idealmente, a estruturas simétricas.

No âmbito do programa NAESY, a obtenção do parâmetro α é feita como mostrado no fluxograma da Figura 3.16. O processo de classificação da estrutura a partir do parâmetro de instabilidade se inicia com o cálculo de α_1 , que depende do número de pavimentos do edifício (num). Prossegue-se, então, com a determinação do somatório de forças verticais, N_k , e do valor da rigidez do pilar de referência, $E_{cs}I_c$. Para tanto, determina-se y_{\max} , que corresponde ao maior valor da coordenada y , e o número do nó mais alto da estrutura, $nnhc$, onde será inserida a força horizontal F . O próximo passo consiste no cálculo dos deslocamentos do sistema estrutural real, quando submetido à força F . Como o deslocamento horizontal no topo do pilar, δ_{pilar} , é igual ao do topo do edifício, δ_{est} , pode-se realizar o

cálculo da rigidez do pilar de referência, $E_{cs}I_c$, a determinação de α e, conseqüentemente, a classificação da estrutura.

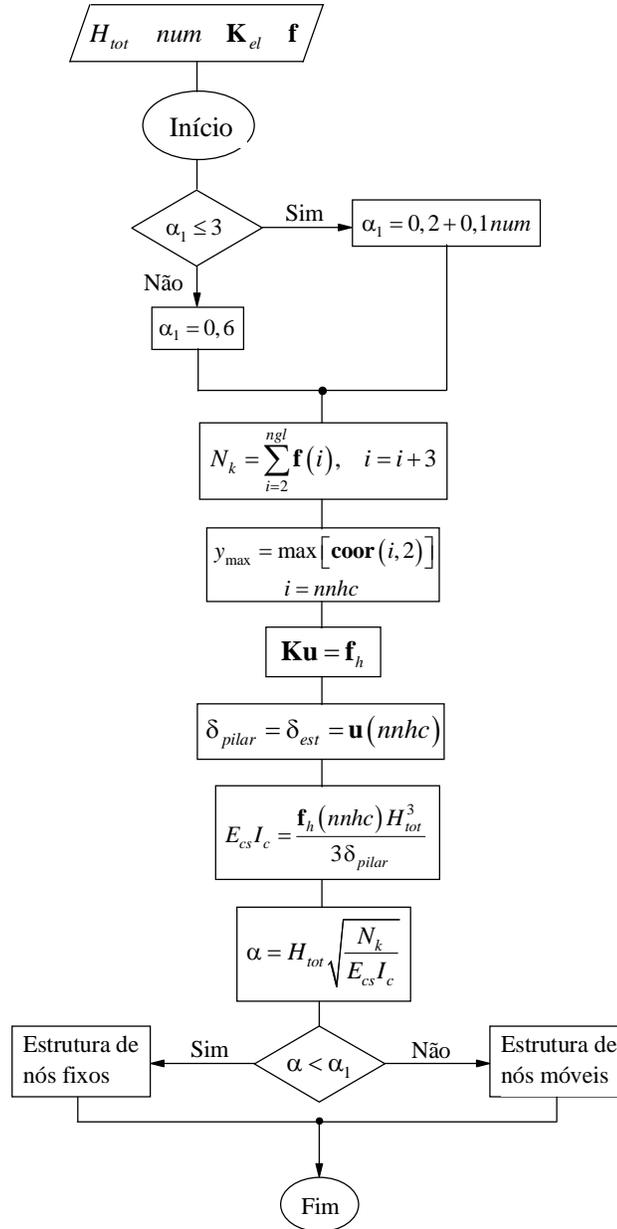


Figura 3.16 Fluxograma do cálculo do parâmetro α

3.4.2 Coeficiente γ_z

A princípio, na análise linear de um sistema estrutural submetido a cargas horizontais, podem-se determinar os momentos de primeira ordem M_1 , em relação à base, e os deslocamentos horizontais da estrutura. Devido a estes deslocamentos em presença das cargas

verticais, há um acréscimo do momento fletor (ΔM_1) na base, resultando, portanto, em um momento M_2 . Uma ilustração simplificada da majoração de momentos na base de uma estrutura pode ser observada na Figura 3.17.

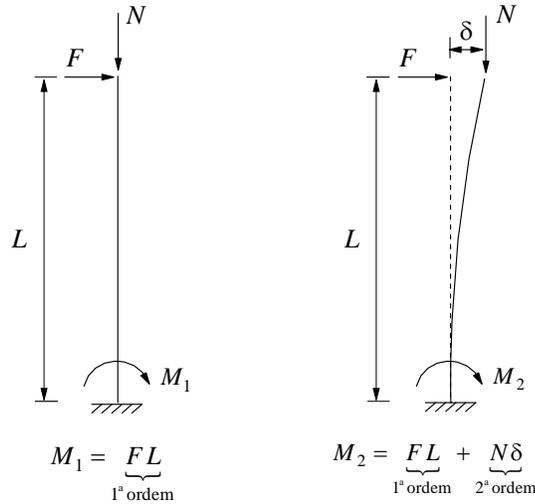


Figura 3.17 Majoração de momentos na base de um pilar devido aos efeitos de segunda ordem

Considerando o processo descrito acima dentro de um *loop* iterativo, pode-se dizer que cada iteração gera acréscimos de momento que diminuem gradativamente até se tornarem praticamente nulos, obtendo-se um momento final M , se a estrutura for estável. Este processo é ilustrado no gráfico da Figura 3.18.

O momento final M é a soma do momento de primeira ordem com os acréscimos de momento de segunda ordem, e é descrito pela equação

$$M = M_1 + \Delta M_1 + \Delta M_2 + \Delta M_3 + \dots + \Delta M_i. \quad (3.28)$$

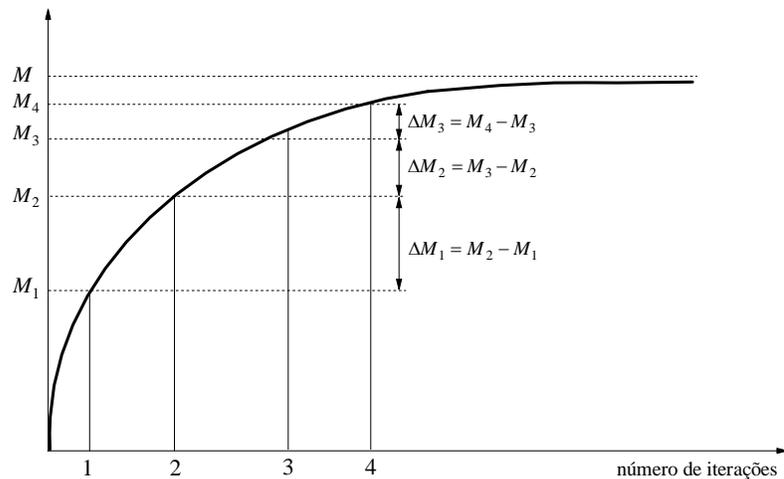


Figura 3.18 Determinação do momento final M
Fonte: adaptado de Moncayo (2011)

De acordo com o CEB (1978), a sequência numérica dos acréscimos de momentos consiste em uma progressão geométrica decrescente com razão, r , podendo ser escrita como:

$$\begin{aligned}
 \Delta M_1 &= r M_1 \\
 \Delta M_2 &= r \Delta M_1 = r(r M_1) = r^2 M_1 \\
 \Delta M_3 &= r \Delta M_2 = r(r^2 M_1) = r^3 M_1 \quad . \\
 &\vdots \\
 \Delta M_i &= r \Delta M_{i-1} = r(r^{i-1} M_1) = r^i M_1
 \end{aligned}
 \tag{3.29}$$

Substituindo os valores dos acréscimos de momento na Equação (3.28) e colocando M_1 em evidência, obtém-se:

$$M = M_1 (1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^i)
 \tag{3.30}$$

Substituindo, na equação anterior, a expressão da soma dos termos da progressão geométrica infinita de razão, r , vê-se que

$$M = M_1 \left(\frac{1}{1-r} \right),
 \tag{3.31}$$

em que r pode ser determinado, considerando-se apenas a primeira iteração do processo, ou seja,

$$r = \frac{\Delta M_1}{M_1} \text{ ou, em valores de cálculo, } r = \frac{\Delta M_{d1}}{M_{d1}}.
 \tag{3.32}$$

Substituindo-se (3.32) em (3.31), encontra-se

$$M = \frac{1}{1 - \frac{\Delta M_{d1}}{M_{d1}}} M_1
 \tag{3.33}$$

O fator que multiplica o momento M_1 foi definida por Franco e Vasconcelos (1991) como coeficiente γ_z .

O coeficiente γ_z foi difundido e é amplamente utilizado no projeto de estruturas de edifícios, já que, além de avaliar a importância dos esforços de segunda ordem globais, também permite estimar seus valores a partir da majoração dos esforços de primeira ordem, como mostrado em sua dedução. Sua aplicação é válida para estruturas reticuladas de no mínimo quatro andares. A equação generalizada de γ_z , para o caso de edifícios, apresentada na ABNT NBR 6118 (2014) é:

$$\gamma_z = \frac{1}{1 - \frac{\Delta M_{tot,d}}{M_{1,tot,d}}} \quad (3.34)$$

sendo $M_{1,tot,d}$ o momento de tombamento, obtido através da soma dos momentos de todas as forças horizontais em relação à base da estrutura, e $\Delta M_{tot,d}$ a soma dos produtos de todas as forças verticais atuantes na estrutura pelos deslocamentos horizontais de seus respectivos pontos de aplicação, obtidos da análise de primeira ordem.

Uma estrutura é considerada de nós móveis se o valor de γ_z for superior a 1,1. Neste caso, a avaliação dos esforços finais (soma dos esforços de primeira e segunda ordem) é obtida de maneira aproximada a partir da majoração adicional dos esforços horizontais por $0,95\gamma_z$. Deve-se ressaltar que esse procedimento só é válido para valores de γ_z menores ou iguais a 1,3 (ABNT NBR 6118: item 15.5.3).

Segundo os princípios básicos de cálculo, item 15.3 da ABNT NBR 6118 (2014), a não linearidade física, presente nas estruturas de concreto armado, deve ser obrigatoriamente considerada. Para a análise dos esforços globais de segunda ordem, esse tipo de não-linearidade pode ser considerada de maneira aproximada, tomando-se como rigidez dos elementos estruturais os seguintes valores:

- Lajes: $(EI)_{sec} = 0,3 E_{ci} I_c$
- Vigas: $(EI)_{sec} = 0,4 E_{ci} I_c$ para $A'_s \neq A_s$
 $(EI)_{sec} = 0,5 E_{ci} I_c$ para $A'_s = A_s$
- Pilares: $(EI)_{sec} = 0,8 E_{ci} I_c$

em que I_c é a inércia do pilar bruto.

Alternativamente, quando a estrutura de contraventamento for composta exclusivamente por vigas e pilares e γ_z for inferior a 1,3, pode-se considerar tanto para as vigas quanto para os pilares, a rigidez equivalente dada por $(EI)_{sec} = 0,7 E_{ci} I_c$. Ressalta-se que esses valores reduzidos de rigidez estabelecidos pela norma são aproximados e não podem ser usados para avaliar esforços locais de segunda ordem, mesmo com modelos bem refinados.

O coeficiente γ_z é determinado com base na solução de uma análise linear elástica. Os dados de entrada da rotina são: a matriz de coordenadas nodais (**coor**), vetor de ações externas (**f**), vetor deslocamentos, obtido na análise linear elástica, (**u**) e matriz de rigidez elástica (**K_e**). Inicialmente, calcula-se o momento devido às forças horizontais atuantes em relação à base

da estrutura, $M_{1,tot,d}$, seguido da determinação do momento adicional, $\Delta M_{tot,d}$, devido às forças verticais em presença dos deslocamentos horizontais de 1ª ordem. A partir desses calcula-se γ_z e classifica-se a estrutura. Por fim, para estruturas de nós móveis, a avaliação dos esforços finais é feita de maneira aproximada (Figura 3.19).

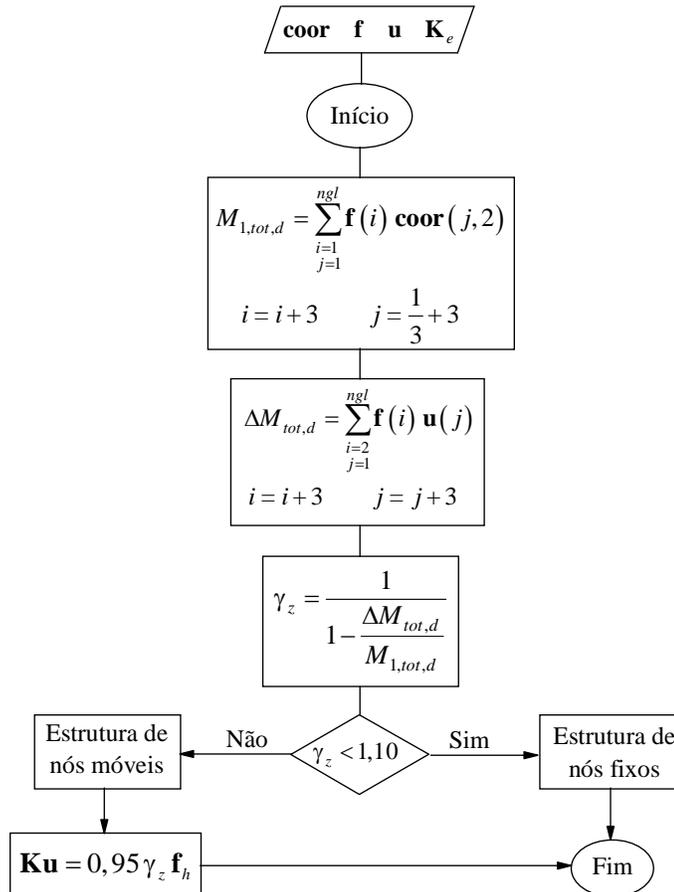


Figura 3.19 Fluxograma do cálculo do parâmetro γ_z

Capítulo 4

Aplicações

O presente capítulo tem como objetivo a aplicação dos métodos estudados anteriormente na análise de sistemas estruturais em aço e concreto armado. Inicialmente, ressalta-se que na descrição das aplicações subsequentes, três tipos de análise estrutural são consideradas, a saber: a análise linear (com consideração apenas de efeitos de 1ª ordem), não-linear geométrica corrotacional (baseada na formulação desenvolvida no Cap.3) e não-linear aproximada, designada, nos termos da ABNT NBR 6118 (2014), àquela baseada na majoração dos esforços pelo coeficiente γ_z . Este último tipo de análise foi considerado apenas na segunda aplicação.

A primeira aplicação consiste na análise de um pórtico em aço destinado à construção da estrutura de galpões. Em seguida é analisado um edifício de 6 andares em concreto armado, para o qual são apresentadas as respostas das análises linear, não-linear geométrica corrotacional e não-linear aproximada.

Menciona-se que a validação das respostas obtidas segundo as formulações não-lineares propostas nesta dissertação foi efetuada por meio de comparações realizadas com o SAP2000 (2013) e, quando pertinente, com o TQS (2016).

4.1 Galpão Industrial

A primeira aplicação trata-se da análise de segunda ordem do pórtico mostrado na Figura 4.1.

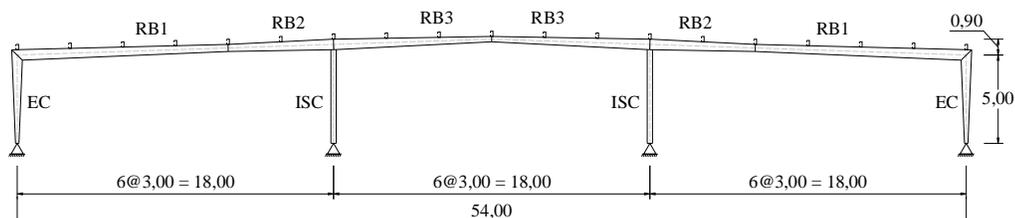


Figura 4.1 Pórtico galpão com elementos de seção variável (dimensões em m),
FONTE: Adaptado de Li e Li (2002)

O pórtico é constituído por perfis de aço A36 de seção transversal tipo I. Para fins de descrição do modelo, seus elementos são designados como segue: pilares de extremidade (EC), vigas de cobertura (RB1, RB2, RB3) e pilares internos (ISC). A seção transversal de todos os elementos possui largura da mesa e espessuras da mesa e da alma constantes (Figura 4.2), podendo a altura da alma variar linearmente ao longo de alguns elementos, como indica-se na Tabela 4.1.

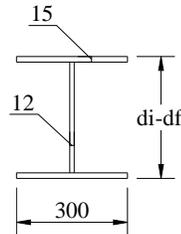


Figura 4.2 Dimensões da seção transversal do perfil utilizado (mm)

Tabela 4.1 Variação linear da altura da seção ao longo do comprimento de cada elemento (mm)

Tipo de seção	EC	ISC	RB1	RB2	RB3
Altura da seção (d_i-d_f)	600–200	300–300	600–400	600–400	600–300

Para este problema, inicialmente, determinou-se o carregamento crítico (P_{cr}) definido pelo arranjo de cargas mostrado na Figura 4.3. Para tanto empregou-se o modelo no qual cada um dos elementos estruturais EC, ISC, RB1, RB2 e RB3 foi dividido em 4 subelementos de análise, resultando em um modelo com 40 elementos (de 2 nós) e 41 nós ao todo. Como vê-se na Tabela 4.2, os resultados obtidos pelo programa NAESY e pelo SAP2000 (2013) apresentam boa concordância.

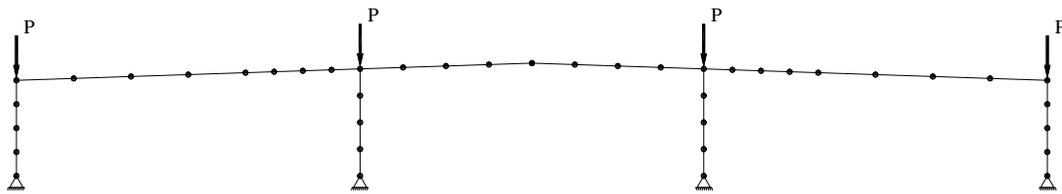


Figura 4.3 Pórtico com carregamento para análise de carga crítica

Tabela 4.2 Carga crítica de flambagem (kN)

NAESY	SAP2000	Erro(%)
3538,97	3736,21	5,28

É importante mencionar que, em ambos os programas, foram utilizadas variações cúbicas de inércia ao longo dos elementos não prismáticos. Nota-se que a solução do problema de autovalor generalizado indica, novamente, que a matriz de rigidez geométrica implementada no *software* NAESY apresenta bom desempenho quando comparada com a utilizada pelo SAP2000 (2013).

Em seguida, com o intuito de se verificar o desempenho das formulações implementadas na descrição de grandes deslocamentos, foi proposto o carregamento apresentado na Figura 4.4, em que se incluiu uma força horizontal no sistema, com mesma intensidade das verticais, de modo a realçar o comportamento não-linear da resposta.

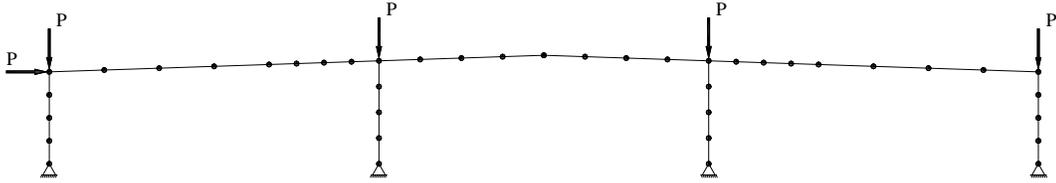


Figura 4.4 Pórtico carregado para análise não-linear geométrica

Para a análise não-linear corrotacional, a carga $P = 2000$ kN foi dividida em 100 passos iguais e adotou-se a tolerância $tol = 10^{-4}$ para verificação da convergência do processo iterativo em termos do equilíbrio de forças. A Figura 4.5 mostra a deformada do pórtico, na qual os deslocamentos e os elementos do modelo foram desenhados na mesma escala, ou seja, não se empregaram fatores de amplificação para realçar os valores de deslocamentos em relação ao comprimento dos elementos. Nessa figura, a estrutura indeformada é representada pela linha cinza, a deformada obtida pela consideração apenas dos efeitos de 1ª ordem, pela linha preta, enquanto as linhas vermelha e azul correspondem, respectivamente, à resposta não-linear geométrica obtida via NAESY e SAP2000 (2013). Observando essa figura, constata-se que, devido à magnitude dos deslocamentos horizontais e das forças verticais nos pilares, os efeitos de 2ª ordem são de grande relevância na análise deste sistema.

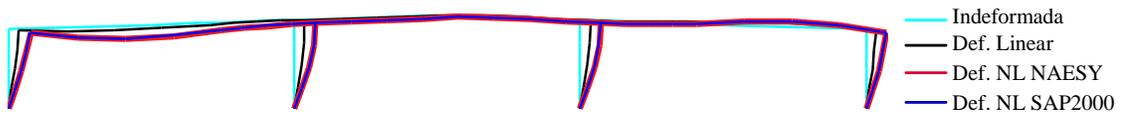


Figura 4.5 Deformada do pórtico

Uma verificação mais detalhada do comportamento estrutural, no que se diz respeito aos deslocamentos, pode ser realizada por inspeção das Figuras 4.6 a 4.8. Os gráficos mostrados nessas figuras correspondem à trajetória de equilíbrio dos deslocamentos e rotação do nó de extremidade do pilar esquerdo. Observando esses gráficos percebe-se que a trajetória mantém um comportamento linear até valores da carga P próximos a 400 kN. À medida que se aumenta o carregamento, a partir deste valor, há uma acentuada diminuição da rigidez, evidenciando o comportamento não-linear.

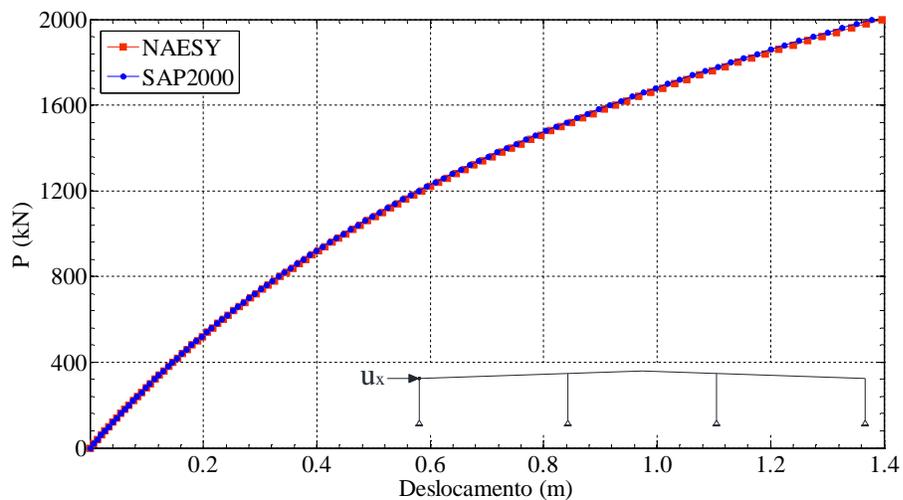


Figura 4.6 Trajetória de equilíbrio – deslocamento horizontal no nó do pilar de extremidade

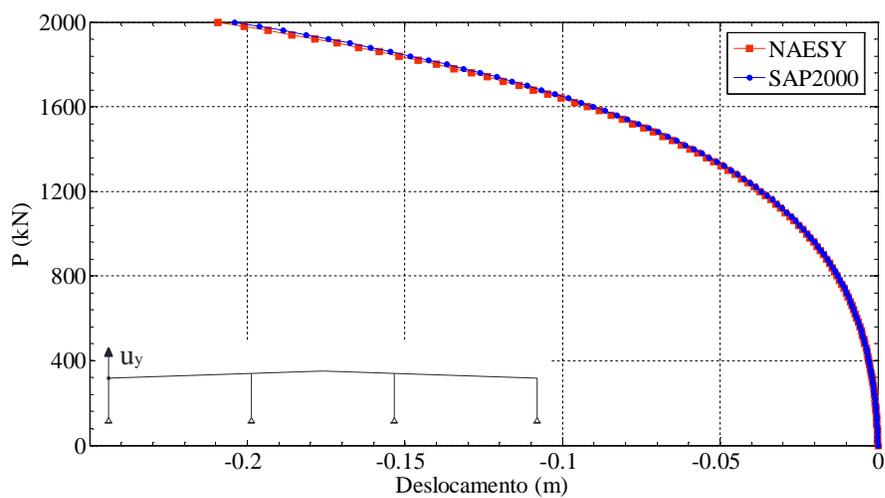


Figura 4.7 Trajetória de equilíbrio – deslocamento vertical no nó do pilar de extremidade

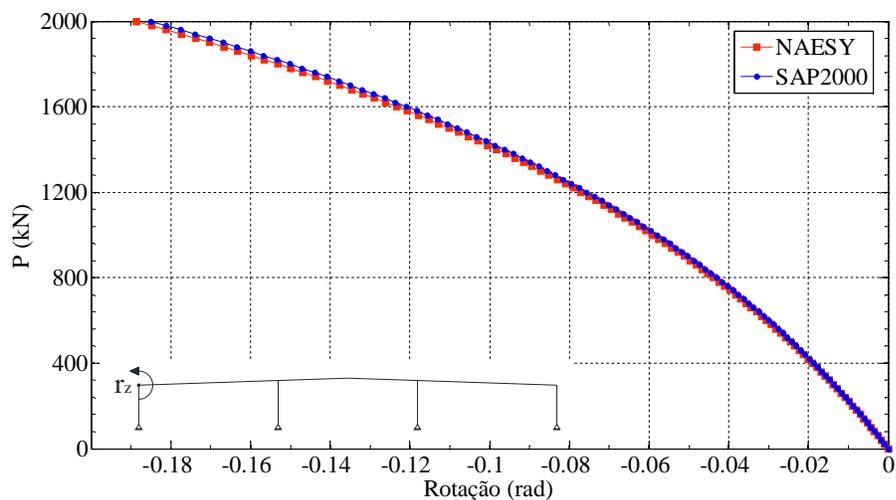


Figura 4.8 Trajetória de equilíbrio – rotação no nó do pilar de extremidade

Nos gráficos das Figuras 4.9 a 4.11 mostram-se os diagramas de esforços nos elementos correspondentes à resposta, obtida pelo NAESY, para o carregamento 100% aplicado, ou seja, com $P = 2000$ kN. Dentre os diversos efeitos da consideração da não-linearidade geométrica, vale notar a acentuada variação do esforço cortante ao longo do comprimento das duas colunas centrais, efeito inexistente em uma análise linear. Como consequência, observa-se uma notável curvatura do diagrama de momento fletor.

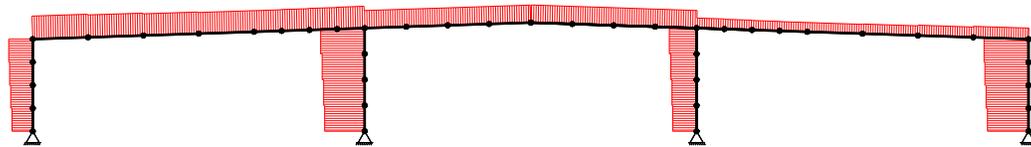


Figura 4.9 Diagrama de esforço normal em escala 1/10 (cm/kN)



Figura 4.10 Diagrama de esforço cortante em escala 1/10 (cm/kN)



Figura 4.11 Diagrama de momento fletor em escala 1/20 (cm/kN.m)

Os dados numéricos referentes aos esforços, à esquerda e à direita dos nós mais relevantes da estrutura (Figura 4.12), podem ser verificados nas Tabelas 4.3 a 4.5. Estas contêm resultados encontrados por ambos os *softwares* utilizados na análise, bem como o erro relativo entre eles. Nota-se, de antemão, uma boa concordância entre os resultados.

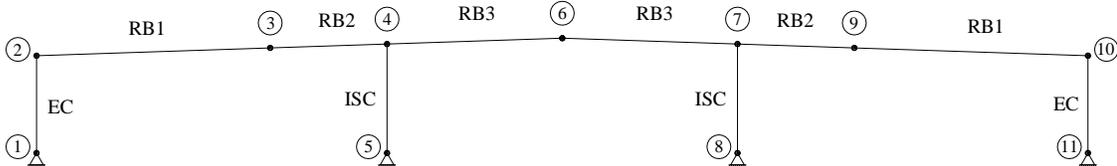


Figura 4.12 Numeração dos nós e nomeação dos elementos para identificação dos esforços

Tabela 4.3 Ações de extremidade – Força normal (N)

Tipo de elemento	Nó	SAP2000	NAESY	Erro (%)
EC	1	1,138E+06	1,124E+06	1,208
EC	2	-1,312E+06	-1,303E+06	0,664
RB1	2	1,254E+06	1,254E+06	0,040
RB1	3	-1,148E+06	-1,148E+06	0,034
RB2	3	1,147E+06	1,148E+06	0,122
RB2	4	1,186E+06	1,185E+06	0,055
ISC	5	2,176E+06	2,170E+06	0,285
ISC	4	-2,390E+06	-2,387E+06	0,114
RB3	4	9,556E+05	9,526E+05	0,315
RB3 (e)	6	-9,536E+05	-9,503E+05	0,350
RB3 (d)	6	9,603E+05	9,571E+05	0,337
RB3	7	-9,614E+05	-9,581E+05	0,345
ISC	8	1,297E+06	1,293E+06	0,317
ISC	7	-1,478E+06	-1,478E+06	0,006
RB2	7	5,559E+05	5,471E+05	1,581
RB2	9	-5,168E+05	-5,072E+05	1,851
RB1	9	5,138E+05	5,047E+05	1,767
RB1	10	-6,079E+05	-5,992E+05	1,432
EC	11	2,232E+06	2,224E+06	0,369
EC	10	-2,411E+06	-2,409E+06	0,099

Tabela 4.4 Ações de extremidade (Força cortante – unidade N)

Tipo de elemento	Nó	SAP2000	NAESY	Erro (%)
EC	1	1,266E+06	1,277E+06	0,883
EC	2	-1,084E+06	-1,090E+06	0,513
RB1	2	-3,632E+05	-3,660E+05	0,758
RB1	3	6,200E+05	6,229E+05	0,474
RB2	3	-6,233E+05	-6,229E+05	0,057
RB2	4	5,453E+05	5,469E+05	0,294
ISC	5	1,082E+06	1,092E+06	0,903
ISC	4	-4,421E+05	-4,496E+05	1,693
RB3	4	-1,078E+05	-1,103E+05	2,278
RB3 (e)	6	1,241E+05	1,272E+05	2,512
RB3 (d)	6	-5,075E+04	-5,569E+04	9,743
RB3	7	2,226E+04	2,533E+04	13,780
ISC	8	9,107E+05	9,218E+05	1,216
ISC	7	-5,716E+05	-5,796E+05	1,396
RB2	7	-5,257E+05	-5,275E+05	0,337
RB2	9	5,642E+05	5,656E+05	0,241
RB1	9	-5,670E+05	-5,678E+05	0,149
RB1	10	4,646E+05	4,664E+05	0,381
EC	11	1,343E+06	1,358E+06	1,144
EC	10	-9,851E+05	-9,875E+05	0,245

Tabela 4.5 Ações de extremidade (Momentos fletores – unidade N.m)

Tipo de elemento	Nó	SAP2000	NAESY	Erro (%)
EC	1	0,000E+00	0,000E+00	0,000
EC	2	5,877E+06	5,900E+06	0,390
RB1	2	-5,877E+06	-5,900E+06	0,391
RB1	3	-1,905E+05	-2,030E+05	6,567
RB2	3	1,905E+05	2,030E+05	6,567
RB2	4	-3,718E+06	-3,744E+06	0,703
ISC	5	0,000E+00	0,000E+00	0,000
ISC	4	4,545E+06	4,593E+06	1,054
RB3	4	-8,272E+05	-8,496E+05	2,705
RB3 (e)	6	-2,369E+05	-2,371E+05	0,089
RB3 (d)	6	-2,369E+05	-2,371E+05	0,089
RB3	7	-5,553E+05	-5,934E+05	6,861
ISC	8	0,000E+00	0,000E+00	0,000
ISC	7	4,309E+06	4,363E+06	1,250
RB2	7	-3,754E+06	-3,770E+06	0,431
RB2	9	4,744E+05	4,811E+05	1,420
RB1	9	-4,744E+05	-4,811E+05	1,420
RB1	10	-5,809E+06	-5,818E+06	0,151
EC	11	0,000E+00	0,000E+00	0,000
EC	10	5,809E+06	5,818E+06	0,151

De forma complementar, a Figura 4.13 mostra a variação não-linear do momento fletor com o aumento gradual da carga P , enfatizando mais uma vez a concordância entre os resultados obtidos.

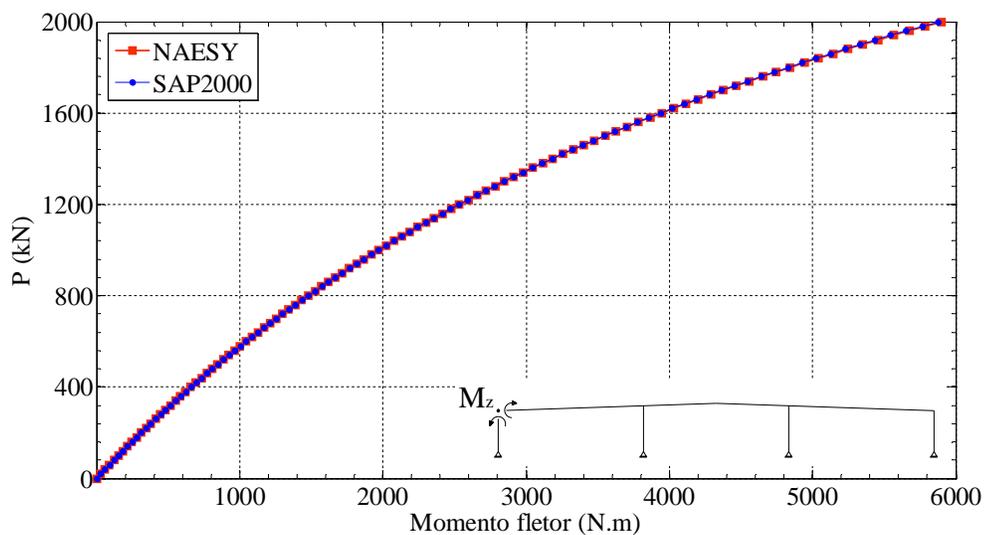


Figura 4.13 Trajetória de equilíbrio – momento fletor no nó do pilar de extremidade

4.2 Edifício de Múltiplos Andares

Este exemplo foi realizado com o intuito de se estudar a aplicabilidade dos procedimentos de análise, discutidos no presente trabalho, em sistemas estruturais em concreto armado. Para tanto, foram realizadas as análises linear, não-linear corrotacional (NL) e não-linear aproximada (NL Aprox.) do edifício comercial hipotético de 6 andares mostrado na Figura 4.14.



Figura 4.14 Modelo tridimensional do edifício analisado
FONTE: TQS (2016)

Considerações gerais de projeto

As plantas dos pavimentos do edifício em estudo são mostradas nas Figuras 4.15, 4.16 e 4.17. Devido às limitações de norma para análise aproximada, o projeto do edifício foi elaborado de forma a garantir sua simetria.

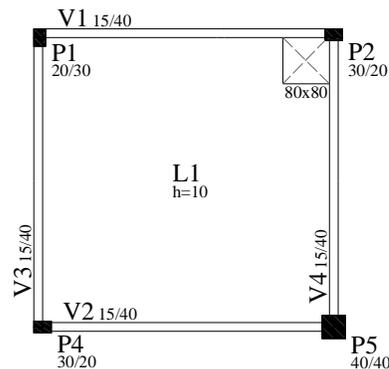


Figura 4.15 Planta de formas do pavimento ático

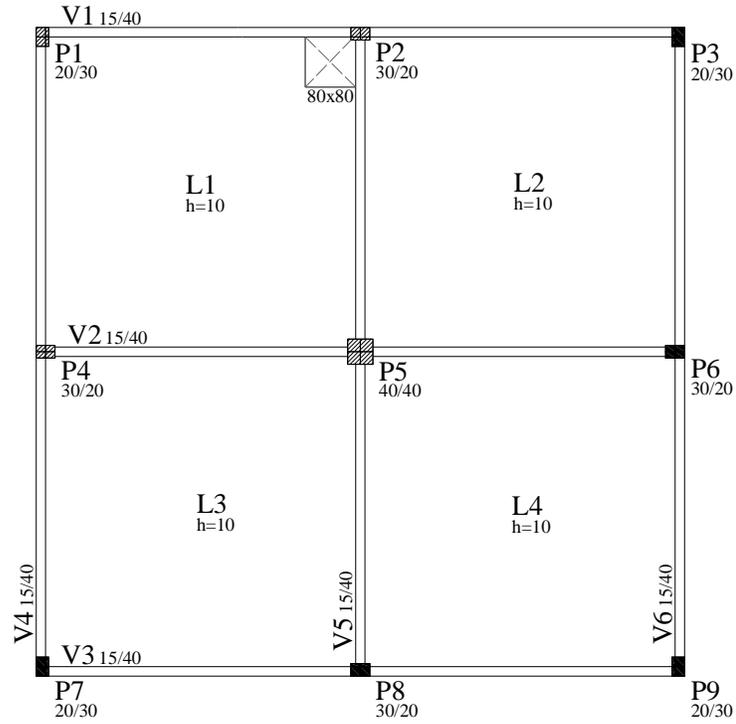


Figura 4.16 Planta de formas do pavimento cobertura

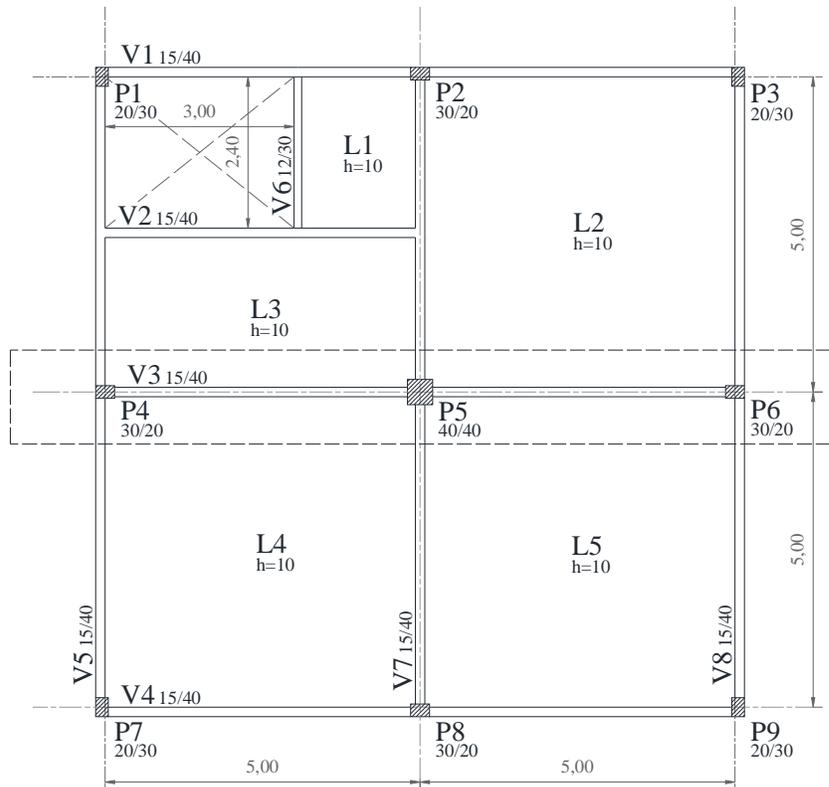


Figura 4.17 Planta de formas do pavimento tipo (em destaque, o p3rtico da Figura 4.18)

A terminologia adotada para os diversos pavimentos do edifício pode ser observada na Figura 4.18, que corresponde a uma vista em elevação do pórtico intermediário, composto pelos pilares P₄, P₅ e P₆.

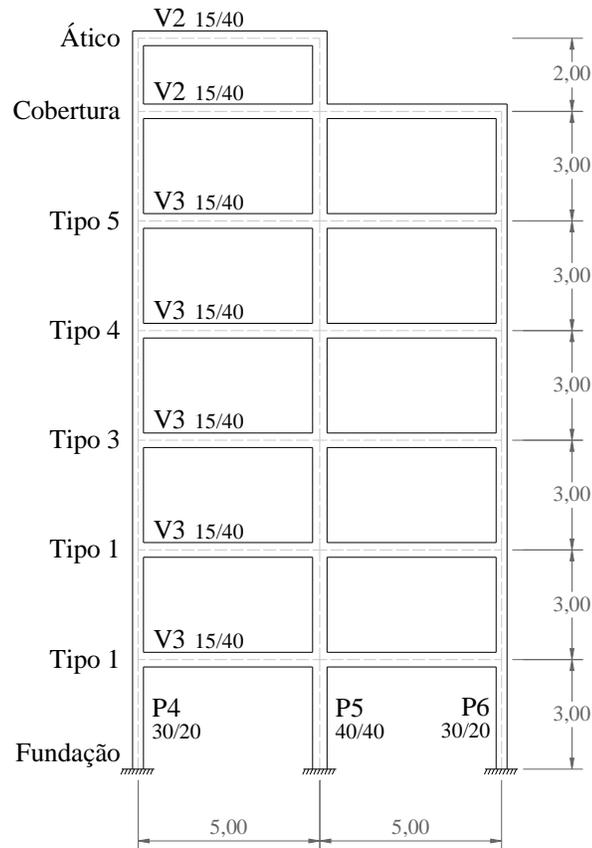


Figura 4.18 Elevação do edifício (pórtico intermediário)

Para este projeto foram considerados os carregamentos descritos a seguir.

Cargas verticais:

1. Peso próprio (PP)

- Em área: – laje maciça de 10 cm de altura: $2,5 \text{ kN/m}^2$
- Linear: – viga (15×40): $0,15 \times 0,40 \times 25 = 1,5 \text{ kN/m}$
 – pilar (20×30): $0,20 \times 0,30 \times 25 = 1,5 \text{ kN/m}$
 – pilar (40×40): $0,40 \times 0,40 \times 25 = 4,0 \text{ kN/m}$

2. Carga permanente (PERM)

- Em área: – pavimento tipo: 1 kN/m^2
 – pavimento cobertura: $2,0 \text{ kN/m}^2$
 – pavimento ático: $1,6 \text{ kN/m}^2$ (2 reservatórios de 2000 litros)

- Linear :- alvenaria do pavimento tipo: $0,15 \times 2,6 \times 15 = 5,85 \text{ kN/m}$
 – alvenaria do pavimento ático: $0,15 \times 2,15 \times 15 = 4,85 \text{ kN/m}$
 Nota: – sobre a cobertura não há alvenaria;
 – a carga de alvenaria se aplica a todas as vigas do tipo e do ático.

3. Carga acidental (ACID) – ABNT NBR 6120 (1980)

- Sobrecarga de ocupação – pavimento tipo: $2,0 \text{ kN/m}^2$ (escritórios)
 – pavimento cobertura: $0,5 \text{ kN/m}^2$

Força Horizontal:

1. Vento

Para determinação das forças horizontais devidas à ação do vento segundo a ABNT NBR 6123 (1988), foram utilizados os seguintes dados:

- Velocidade básica do vento: 31 m/s
- Fator topográfico: $S_1 = 1,0$ (terreno plano ou fracamente acidentado)
- Fator estatístico: $S_3 = 1,0$ (edifício comercial)
- Categoria: II – Terrenos abertos em nível ou aproximadamente em nível, com poucos obstáculos isolados
- Classe: A – Toda edificação na qual a maior dimensão horizontal ou vertical não exceda 20 m

Como o módulo do programa NAESY, considerado neste trabalho, possibilita apenas a análise de sistemas estruturais bidimensionais, previamente à análise 2D, foi realizada uma análise tridimensional do edifício através dos *softwares* SAP2000 (2013) e do TQS (2016), com o objetivo de compatibilizar os modelos e se escolher o pórtico que será estudado (Figura 4.19).

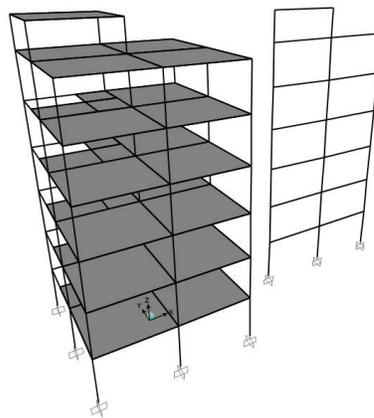


Figura 4.19 Extração do pórtico plano intermediário
 FONTE: SAP2000 (2013)

Os carregamentos no pórtico bidimensional (Figura 4.20) foram determinados de maneira aproximada, com conceitos do método das charneiras plásticas, e são mostrados nas Tabelas 4.6, 4.7 e 4.8.

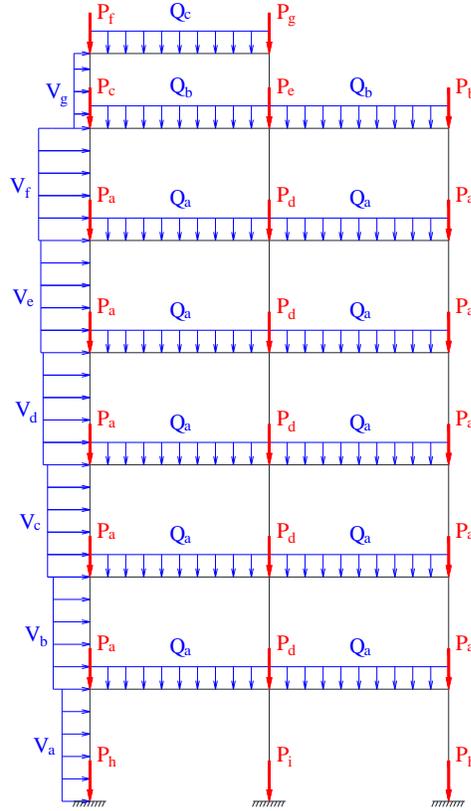


Figura 4.20 Carregamento do pórtico plano

Tabela4.6: Cargas verticais concentradas (kN)

Código	PP	PERM	ACID
P _a	27,63	35,50	12,50
P _b	25,38	12,50	3,13
P _c	26,88	12,50	3,13
P _d	50,75	41,75	25,00
P _e	10,00	25,00	6,25
P _f	20,88	22,13	0
P _g	23,38	22,13	0
P _h	2,25	0	0
P _i	6,00	0	0

Tabela4.7: Cargas verticais distribuídas (kN)

Código	PP	PERM	ACID
Q _a	17,13	7,10	2,50
Q _b	17,13	2,50	0,63
Q _c	17,13	6,85	0

Em relação às propriedades físicas, a resistência característica do concreto à compressão (f_{ck}) é igual a 25 MPa e o coeficiente de *Poisson* $\nu = 0,2$. Em todas as análises foi considerado o módulo de elasticidade secante do concreto como prevê a ABNT NBR 6118 (2014). De acordo com o item 15.3 da referida norma, a não-linearidade física, presente nas estruturas de concreto armado, deve ser obrigatoriamente considerada. Neste exemplo, tal não-linearidade será admitida de maneira aproximada através da redução da rigidez à flexão das vigas por um fator de 0,40 e dos pilares por 0,80.

Solução linear e não-linear corrotacional

Para o melhor entendimento desse sistema estrutural no que se refere a seu comportamento não-linear, foram realizadas análises preliminares de 1ª e 2ª ordem, com inclusão da redução de rigidez flexional para a simulação de efeitos físicos não-lineares, utilizando-se o programa NAESY. Para tanto, o edifício foi discretizado em 33 elementos (27 nós), como mostrado na Figura 4.23.

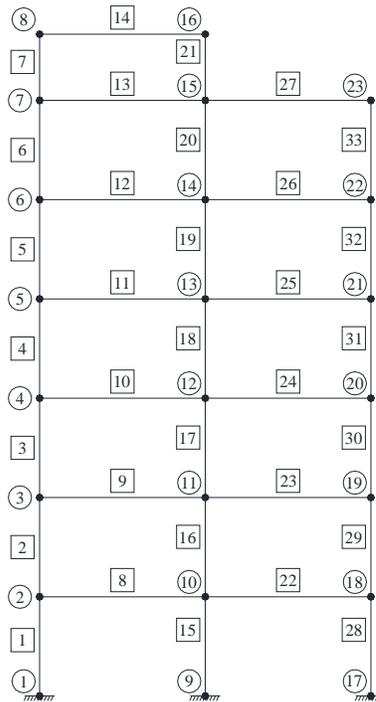


Figura 4.23 Modelo discretizado

As propriedades físicas e geométricas e a condição de carregamento utilizadas para realização da modelagem são as especificadas anteriormente. Em relação à análise não-linear, o carregamento foi dividido em 100 passos de carga e a tolerância utilizada para verificação

da convergência foi de 0,01. Os resultados de deslocamentos e esforços obtidos através de ambas as análises podem ser observados na Figura 4.24 e nas Tabelas 4.9 e 4.10.

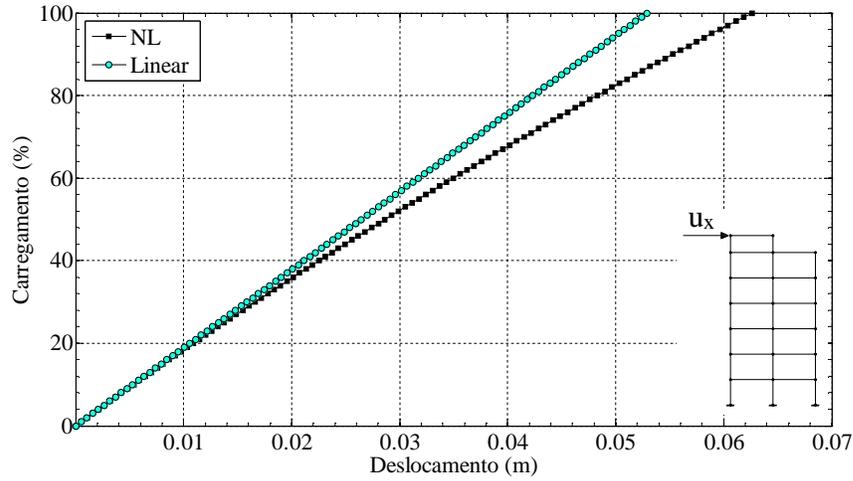


Figura 4.24 Deslocamento horizontal no nó 8

Tabela 4.9 Resposta de deslocamentos para as soluções linear e não-linear

Nó	u_x (cm)			u_y (cm)			r_z (rad)		
	Linear	NL	Erro (%)	Linear	NL	Erro (%)	Linear	NL	Erro (%)
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0,770	0,912	15,502	-0,218	-0,216	0,010	-0,470	-0,533	0,119
3	2,072	2,496	16,987	-0,403	-0,402	0,003	-0,469	-0,544	0,138
4	3,289	3,972	17,195	-0,555	-0,556	0,001	-0,422	-0,479	0,120
5	4,248	5,103	16,755	-0,674	-0,675	0,002	-0,339	-0,372	0,089
6	4,891	5,832	16,135	-0,758	-0,759	0,002	-0,268	-0,283	0,053
7	5,189	6,161	15,777	-0,807	-0,808	0,002	-0,093	-0,098	0,050
8	5,290	6,270	15,630	-0,824	-0,825	0,002	-0,233	-0,236	0,013
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0,768	0,909	15,541	-0,157	-0,157	0,004	-0,357	-0,430	0,169
11	2,063	2,487	17,049	-0,288	-0,292	0,015	-0,391	-0,478	0,182
12	3,281	3,965	17,251	-0,394	-0,401	0,018	-0,331	-0,396	0,165
13	4,241	5,095	16,762	-0,474	-0,483	0,019	-0,242	-0,280	0,135
14	4,880	5,820	16,151	-0,529	-0,539	0,018	-0,135	-0,152	0,108
15	5,198	6,170	15,754	-0,558	-0,568	0,018	-0,076	-0,081	0,064
16	5,264	6,244	15,695	-0,566	-0,576	0,018	0,064	0,060	0,051
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0,775	0,9159	15,438	-0,219	-0,222	0,012	-0,134	-0,194	0,310
19	2,060	2,485	17,103	-0,398	-0,406	0,019	-0,205	-0,279	0,265
20	3,279	3,963	17,260	-0,537	-0,549	0,021	-0,151	-0,207	0,271
21	4,238	5,093	16,788	-0,637	-0,651	0,021	-0,073	-0,106	0,308
22	4,879	5,820	16,168	-0,698	-0,713	0,020	0,002	-0,012	1,133
23	5,181	6,153	15,797	-0,722	-0,737	0,020	0,144	0,139	0,0368

Tabela 4.10 Resposta de esforços para as soluções linear e não-linear no nó final de cada elemento

N° do el.	Normal (kN)			Cortante (kN)			Momento fletor (kN.m)		
	Linear	NL	Dif. (%)	Linear	NL	Dif. (%)	Linear	NL	Dif. (%)
1	831,70	817,80	1,70	2,42	4,12	41,32	17,05	20,85	18,23
2	704,50	693,50	1,59	-3,96	-1,10	258,70	-5,97	-1,37	335,23
3	578,40	570,90	1,31	-4,40	-2,10	108,80	-7,94	-4,95	60,21
4	450,60	446,20	0,99	-6,70	-5,37	24,78	-12,41	-11,04	12,41
5	320,00	317,70	0,72	-9,91	-9,36	5,89	-16,88	-16,54	2,06
6	186,40	185,40	0,54	-9,07	-8,97	1,09	-18,59	-18,69	0,54
7	98,07	97,65	0,43	-27,24	-27,24	0	-21,27	-21,36	0,42
8	2,62	2,59	1,00	-15,28	-17,70	13,67	-39,93	-45,84	12,89
9	9,79	10,08	2,87	-16,26	-19,11	14,91	-41,84	-48,79	14,24
10	8,45	8,62	1,98	-14,66	-16,82	12,84	-38,04	-43,30	12,15
11	8,12	8,25	1,55	-11,86	-13,07	9,26	-31,12	-34,09	8,71
12	12,85	12,96	0,85	-8,89	-9,38	5,30	-24,24	-25,46	4,79
13	-10,00	-9,95	0,50	-4,83	-4,95	2,47	-12,33	-12,63	2,38
14	29,33	29,39	0,20	-4,89	-4,94	0,89	-16,75	-16,84	0,53
15	1590,00	1584,00	0,38	39,93	45,40	12,05	108,20	125,40	13,71
16	1332,00	1327,00	0,38	29,78	37,33	20,22	49,24	62,35	21,03
17	1074,00	1070,00	0,38	23,38	28,64	18,36	26,94	32,10	16,07
18	816,20	813,20	0,37	17,23	19,95	13,63	13,86	14,28	2,94
19	557,70	555,90	0,32	12,42	13,3	6,61	4,15	2,67	55,34
20	298,90	298,00	0,30	0,11	0,06	93,26	-7,86	-9,42	16,51
21	110,40	110,10	0,27	29,33	29,04	1,00	0,99	0,27	260,80
22	-7,53	-7,65	1,66	-8,364	-10,74	22,12	-24,31	-30,44	20,14
23	3,39	3,05	11,05	-9,902	-12,76	22,40	-27,58	-34,92	21,02
24	2,31	2,07	11,45	-7,613	-9,77	22,05	-21,77	-27,30	20,26
25	3,30	3,24	1,91	-4,489	-5,72	21,45	-13,80	-16,94	18,54
26	0,54	0,55	2,58	-1,185	-1,70	30,17	-5,05	-6,36	20,65
27	19,23	19,48	1,28	2,386	2,24	6,76	2,62	2,25	16,56
28	833,10	838,90	0,69	21,23	22,99	7,66	35,68	39,79	10,33
29	682,30	686,10	0,55	28,76	31,65	9,13	45,17	49,80	9,30
30	529,90	531,60	0,32	25,37	27,64	8,21	36,51	39,45	7,45
31	379,90	380,30	0,11	23,06	24,40	5,49	32,38	33,76	4,09
32	232,90	232,80	0,04	19,77	20,33	2,75	27,51	27,87	1,29
33	89,27	89,21	0,07	19,23	19,32	0,47	24,78	24,68	0,41

Observando-se os resultados de deslocamento horizontal (u_x) mostrados na Tabela 4.9, pode-se constatar que os mesmos foram aumentados na média de 16% quando determinados utilizando-se a análise não-linear corrotacional. Verifica-se o mesmo comportamento na trajetória de equilíbrio mostrada na Figura 4.24. Em decorrência do aumento de deslocamentos houve também uma considerável amplificação nos esforços cortantes e fletores de alguns componentes estruturais (Tabela 4.10). Pode-se concluir, portanto, de acordo com o

que está prescrito na ABNT NBR 6118 (2014), que essa estrutura é classificada como estrutura de nós deslocáveis, por conseguinte, em sua análise devem ser obrigatoriamente considerados os esforços de segunda ordem.

Solução não-linear aproximada

Como já mencionado no Capítulo 3, outra maneira de se classificar estruturas quanto ao nível de deslocabilidade é através do parâmetro α e do coeficiente γ_z . Para tal, a classificação do edifício e a análise estrutural segundo os critérios normativos foram realizadas através dos programas TQS (2016) e NAESY.

A Tabela 4.11 mostra os valores obtidos para α e γ_z e a classificação do edifício. Pode-se perceber que a classificação da estrutura através do processo simplificado foi condizente com o resultado obtido nas análises exatas.

Tabela 4.11 Classificação da estrutura segundo os parâmetros de norma (α_1 e γ_{zref} são valores limites utilizados para classificação da estrutura)

		TQS	NAESY	
α	1,022	$\alpha > \alpha_1$	0,9229	$\alpha > \alpha_1$
α_1	0,600	Estrutura de nós móveis	0,600	Estrutura de nós móveis
γ_z	1,264	$\gamma_z > \gamma_{zref}$	1,259	$\gamma_z > \gamma_{zref}$
γ_{zref}	1,100	Estrutura de nós móveis	1,100	Estrutura de nós móveis

Como o valor obtido para γ_z foi menor que 1,30, pôde-se aplicar a solução não-linear aproximada prevista no item 15.7.2 da ABNT NBR 6118 (2014).

Os resultados de deslocamento, obtidos utilizando-se o programa NAESY, através das análises linear, não-linear exata e não-linear aproximada são mostrados na Tabela 4.12 e na Figura 4.25. Através desses resultados observa-se que os deslocamentos da solução aproximada são os mesmos que os obtidos através da solução não-linear corrotacional.

Tabela 4.12 Resposta de deslocamentos para as soluções linear, não-linear e não-linear aproximada

Nó	u_x (cm)			u_y (cm)			r_z (rad)		
	Linear	NL	NL Aprox.	Linear	NL	NL Aprox.	Linear	NL	NL Aprox.
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0,770	0,912	0,912	-0,218	-0,216	-0,216	-0,470	-0,533	-0,533
3	2,072	2,496	2,496	-0,403	-0,402	-0,402	-0,469	-0,544	-0,544
4	3,289	3,972	3,972	-0,555	-0,556	-0,556	-0,422	-0,479	-0,479
5	4,248	5,103	5,103	-0,674	-0,675	-0,675	-0,339	-0,372	-0,372
6	4,891	5,832	5,832	-0,758	-0,759	-0,759	-0,268	-0,283	-0,283
7	5,189	6,161	6,161	-0,807	-0,808	-0,808	-0,094	-0,098	-0,098
8	5,290	6,270	6,270	-0,824	-0,825	-0,825	-0,233	-0,236	-0,236
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0,768	0,909	0,909	-0,157	-0,157	-0,157	-0,357	-0,430	-0,430
11	2,063	2,487	2,487	-0,288	-0,292	-0,292	-0,391	-0,478	-0,478
12	3,281	3,965	3,965	-0,394	-0,401	-0,401	-0,331	-0,396	-0,396
13	4,241	5,095	5,095	-0,474	-0,483	-0,483	-0,242	-0,280	-0,280
14	4,880	5,820	5,820	-0,529	-0,539	-0,539	-0,135	-0,152	-0,152
15	5,198	6,170	6,170	-0,558	-0,568	-0,568	-0,076	-0,081	-0,081
16	5,264	6,244	6,244	-0,566	-0,576	-0,576	0,064	0,060	0,060
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0,775	0,916	0,916	-0,219	-0,222	-0,222	-0,134	-0,194	-0,194
19	2,060	2,485	2,485	-0,398	-0,406	-0,406	-0,205	-0,279	-0,279
20	3,279	3,963	3,963	-0,537	-0,549	-0,549	-0,151	-0,207	-0,207
21	4,238	5,093	5,093	-0,637	-0,651	-0,651	-0,073	-0,106	-0,106
22	4,879	5,820	5,820	-0,698	-0,713	-0,713	0,002	-0,012	-0,012
23	5,181	6,153	6,153	-0,722	-0,737	-0,737	0,144	0,139	0,139

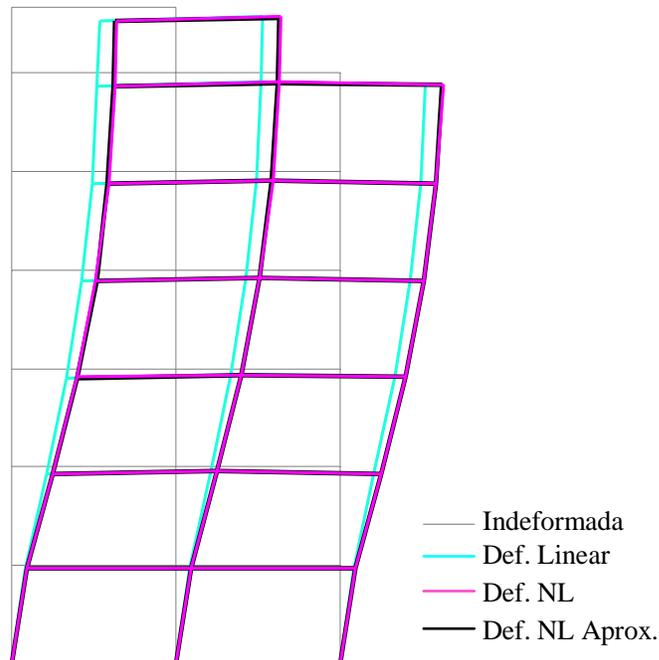


Figura 4.25 Deformada do edifício com os deslocamentos amplificados em 50 vezes

Os valores absolutos para os esforços do nó final (nó da esquerda) de cada elemento são mostrados na Tabela 4.13 e nos gráficos das Figuras 4.26, 4.27 e 4.28.

Tabela 4.13 Resposta de esforços para solução não-linear e não-linear aproximada no nó final de cada elemento

N° elm.	Normal (kN)			Cortante (kN)			Fletor (kN.m)		
	NL	NL Aprox.	Erro (%)	NL	NL Aprox.	Erro (%)	NL	NL Aprox.	Erro (%)
1	-817,80	-821,20	0,42	-4,12	-4,76	15,49	-8,48	-7,99	5,77
2	-693,50	-696,30	0,40	1,10	1,53	38,50	-1,94	-2,48	27,38
3	-570,90	-572,70	0,32	2,10	2,32	10,51	-1,35	-1,86	37,72
4	-446,20	-447,10	0,20	5,37	5,11	4,84	-5,06	-4,89	3,50
5	-317,70	-318,10	0,13	9,36	8,84	5,58	-11,54	-10,79	6,50
6	-185,40	-185,60	0,11	8,97	8,56	4,52	-8,22	-7,50	8,73
7	-97,65	-97,75	0,10	27,24	26,80	1,62	-33,12	-32,48	1,93
8	-2,59	-4,48	72,59	17,70	17,61	0,51	-42,69	-42,47	0,52
9	-10,08	-11,43	13,39	19,11	18,83	1,47	-46,78	-46,05	1,56
10	-8,62	-10,09	17,04	16,82	16,85	0,18	-40,79	-40,89	0,25
11	-8,25	-9,83	19,18	13,07	13,48	3,14	-31,29	-32,34	3,36
12	-12,96	-14,63	12,89	9,38	9,90	5,46	-21,46	-22,78	6,15
13	9,95	8,45	15,04	4,95	5,34	7,90	-12,11	-13,10	8,18
14	-29,39	-29,30	0,31	4,94	5,21	5,49	-7,85	-8,56	9,10
15	-1584,00	-1590,00	0,38	-45,40	-47,77	5,22	10,78	13,75	27,55
16	-1327,00	-1332,00	0,38	-37,33	-35,63	4,55	49,60	47,90	3,43
17	-1070,00	-1075,00	0,47	-28,64	-27,96	2,37	53,81	51,57	4,16
18	-813,20	-816,60	0,42	-19,95	-20,65	3,51	45,56	45,25	0,68
19	-555,90	-558,00	0,38	-13,30	-14,65	10,15	37,24	38,91	4,48
20	-298,00	-299,20	0,40	-0,06	-1,07	1769,76	9,59	11,69	21,94
21	-110,10	-110,70	0,54	-29,04	-29,30	0,90	57,81	58,52	1,23
22	7,65	7,66	0,10	10,74	10,68	0,56	-23,26	-23,15	0,47
23	-3,05	-3,76	23,37	12,76	12,47	2,27	-28,88	-28,20	2,35
24	-2,07	-2,78	34,20	9,77	9,81	0,40	-21,53	-21,64	0,51
25	-3,24	-3,83	18,22	5,72	6,11	6,96	-11,63	-12,61	8,43
26	-0,55	-1,05	89,78	1,70	2,20	29,82	-2,122	-3,36	58,39
27	-19,48	-19,78	1,54	-2,24	-1,89	15,66	8,928	8,09	9,34
28	-838,90	-843,30	0,52	-22,99	-23,54	2,39	29,14	29,78	2,20
29	-686,10	-690,20	0,60	-31,65	-31,20	1,42	45,11	44,55	1,24
30	-531,60	-535,30	0,70	-27,64	-27,44	0,72	43,46	42,97	1,13
31	-380,30	-383,00	0,71	-24,40	-24,66	1,07	39,45	39,62	0,43
32	-232,80	-234,40	0,69	-20,33	-20,83	2,46	33,13	33,82	2,08
33	-89,21	-89,78	0,64	-19,32	-19,78	2,38	33,28	34,11	2,49

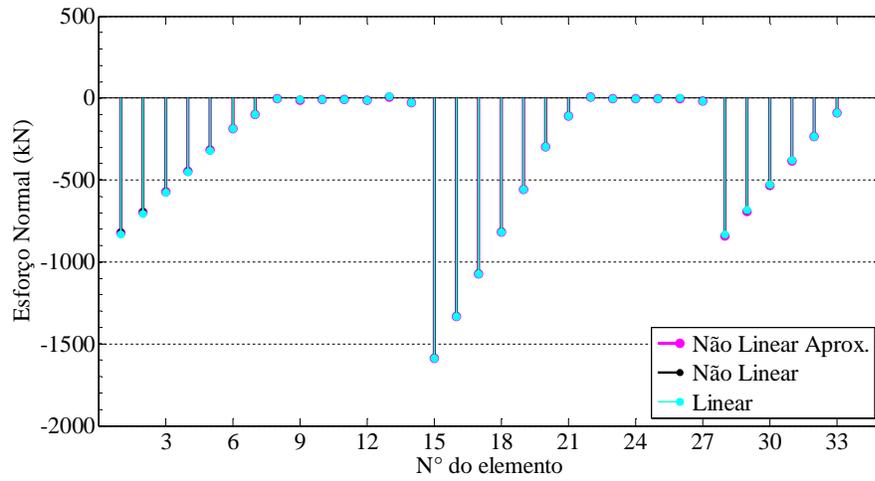


Figura 4.26 Esforço normal nos elementos

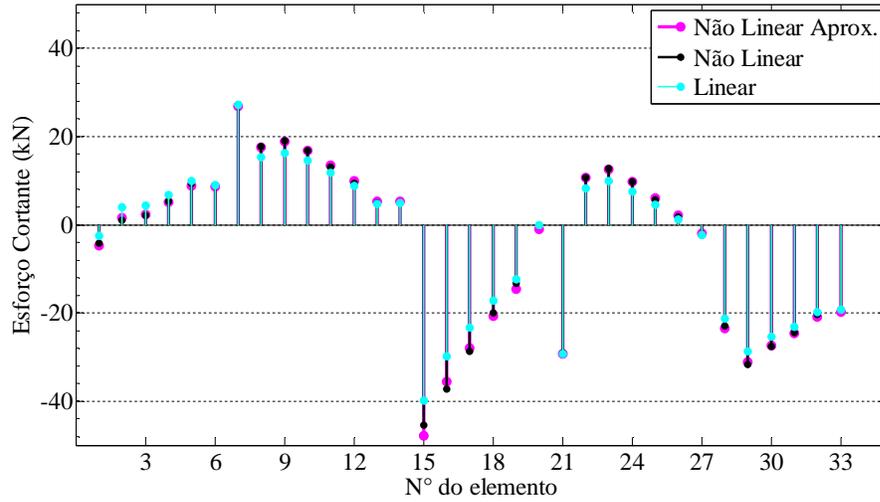


Figura 4.27 Esforço cortante nos elementos

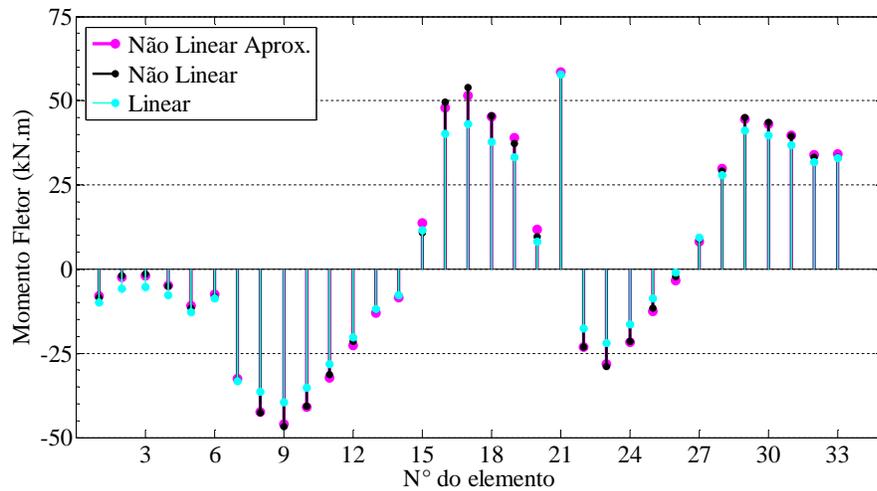
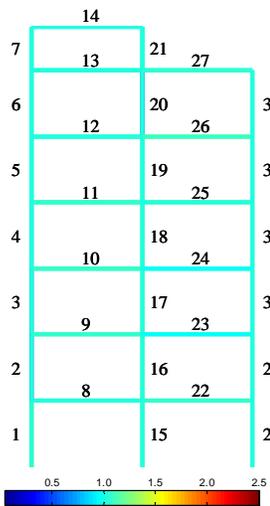
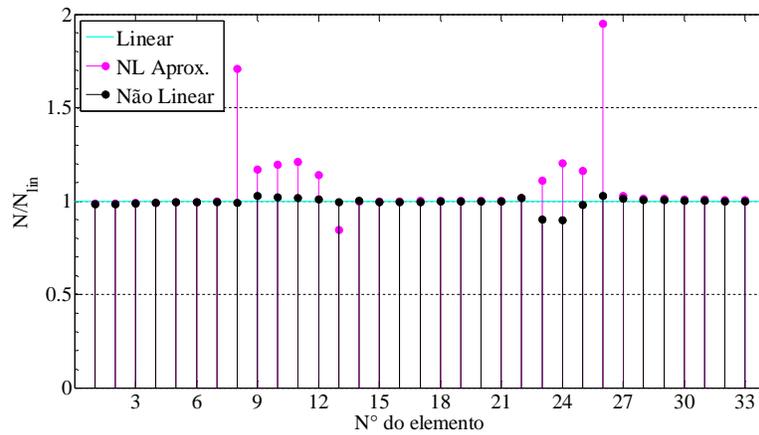


Figura 4.28 Momento fletor no nó extremo direito de cada elemento

Em relação aos esforços normais (Figura 4.26), os valores obtidos através dos três tipos de análise foram muito próximos, isso se deve ao fato destes esforços não sofrerem grandes alterações em decorrência dos deslocamentos horizontais no sistema estrutural. Em contrapartida, pode-se notar que os esforços cortantes (Figura 4.27) e momentos fletores no nó final do elemento (Figura 4.28) assumem valores diferentes ao se comparar a análise linear e não-linear (exata e aproximada). Devido à amplitude desses esforços, para facilitar a comparação entre as análises, foram gerados gráficos com os valores de esforços normalizados em relação aos seus respectivos valores obtidos na análise linear (Figuras 4.29, 4.30 e 4.31).

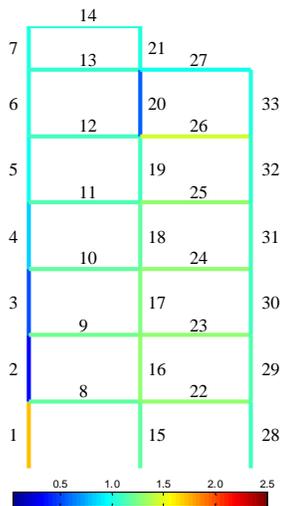


(a) Relação N_{NL}/N_{lin}

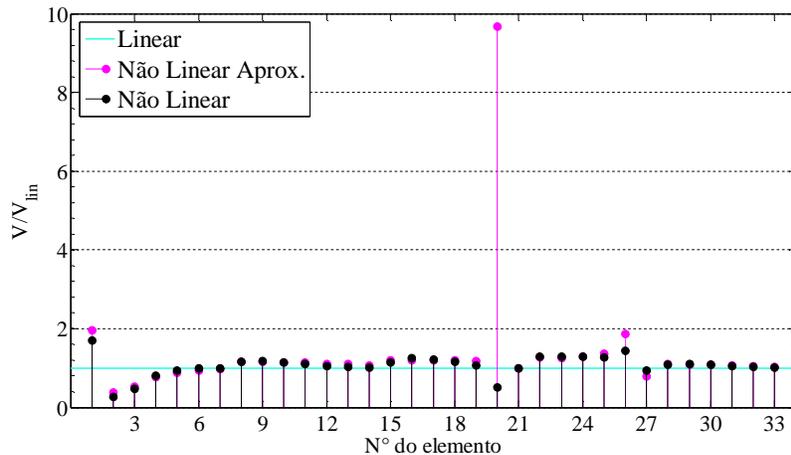


(b) Gráfico comparativo entre os resultados

Figura 4.29 Esforço normal em elemento (valores normalizados)



(a) Relação V_{NL}/V_{lin}



(b) Gráfico comparativo entre os resultados

Figura 4.30 Esforço cortante em elemento (valores normalizados)

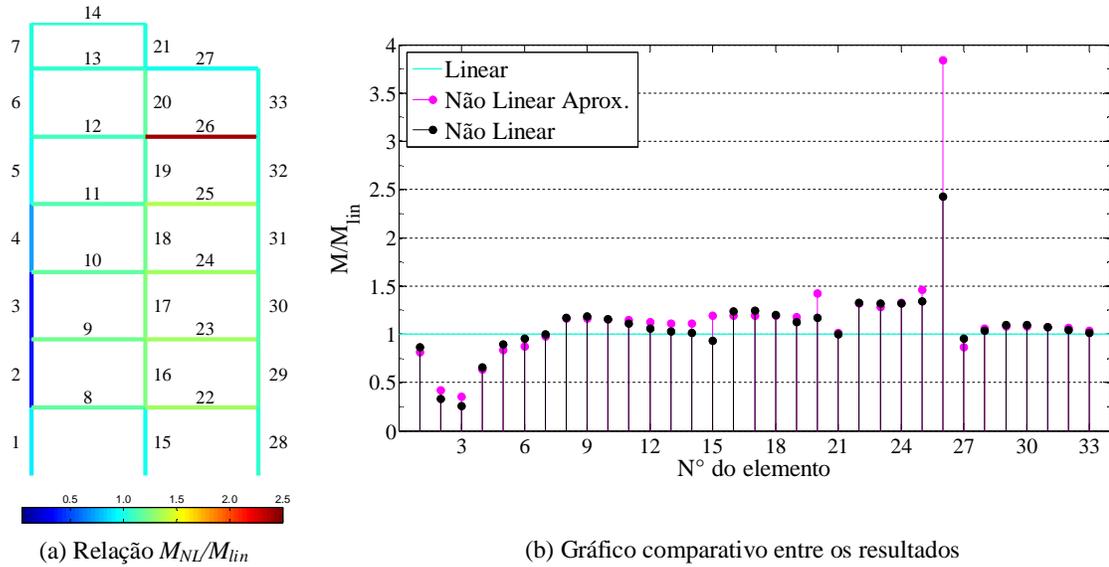


Figura 4.31 Momento fletor no nó extremo dos elementos (valores normalizados)

Tratando-se do diagrama de cores (Figuras 4.29a, 4.30a e 4.31a) deve-se ressaltar que os elementos cujas cores variam do azul escuro ao azul ciano (de 0 a 1 na escala) são elementos nos quais os esforços obtidos na análise linear são maiores do que os da análise de segunda ordem sendo, portanto, elementos superdimensionados naquela análise (desfavorável economicamente). Neste caso citam-se os elementos 2, 3, 4 das Figuras 4.30a e 4.31a. Em contrapartida, os elementos cujas cores constam no intervalo de 1 a 2,5, são elementos subdimensionados em uma análise linear e, portanto, prejudiciais à segurança da edificação (elementos 1 e 26 das Figuras 4.30a e 4.31a, respectivamente). Quando a cor dos elementos é mais próxima do azul ciano (1 da escala de cores), mais próximos entre si são os resultados das análises linear e não-linear.

Os gráficos das Figuras 4.29b, 4.30b e 4.31b também mostram a comparação entre os diferentes tipos de análise. Orientando-se pela linha azul ciano, pode-se identificar como os resultados da análise não-linear (exata e aproximada) se diferenciaram dos resultados lineares em cada elemento.

Os gráficos também facilitam a comparação entre os resultados não-lineares obtidos através dos processos preciso (corrotacional) e do aproximado. Em relação ao esforço normal (Figuras 4.29b), verifica-se que em alguns elementos de viga (do 8 ao 13 e do 23 ao 26) a análise aproximada gera resultados discrepantes em relação à análise não-linear corrotacional. Isso também pode ser verificado para os elementos 20 e 26 nos gráficos das Figuras 4.30b e 4.31b, respectivamente. No entanto, na grande maioria dos casos, verifica-se que o processo

aproximado gera resultados bastante próximos aos resultados da análise não-linear precisa (corrotacional).

Foi realizada também a avaliação do coeficiente γ_z considerando diferentes valores de f_{ck} para o edifício em estudo. Os resultados encontrados são mostrados na Figura 4.32 e na Tabela 4.14. Como esperado, à medida que se aumenta a rigidez do sistema, ocorre uma redução nos valores de γ_z , cabe ainda ressaltar que para o presente edifício essa relação é não-linear. Apesar da redução do γ_z , para o sistema estrutural em estudo e os valores de f_{ck} considerados, a estrutura continua sendo classificada como estrutura de nós deslocáveis.

Tabela 4.14 f_{ck} versus γ_z

f_{ck}	γ_z
20	1,299
25	1,259
30	1,232
35	1,211
40	1,195
45	1,181
50	1,171

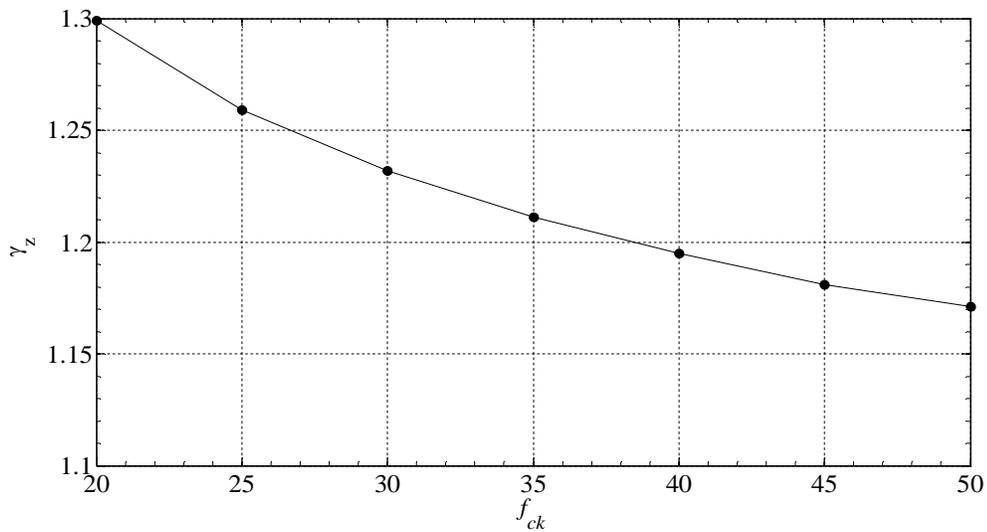


Figura 4.32 f_{ck} versus γ_z

Capítulo 5

Conclusões

O presente trabalho teve como objetivo a análise não-linear geométrica de sistemas estruturais planos em aço e concreto armado, constituídos por elementos com rigidez variável. Com este propósito, utilizou-se a formulação do Método da Rigidez Direta (ou dos Deslocamentos) para a determinação da matriz de rigidez do sistema. A matriz de rigidez geométrica foi obtida a partir da consideração do momento fletor e do esforço cortante gerados por cargas axiais em presença de deslocamento lateral do elemento. O desenvolvimento de tal formulação, estabelecida a partir da configuração deformada do elemento estrutural, foi considerada da maneira mais geral possível, de modo a permitir a modelagem de estruturas com elementos com os mais diversos tipos de rigidez variável ao longo de seu eixo. Para tanto, utilizaram-se leis de variação linear, parabólica, cúbica e quártica, e considerou-se o processo de integração de Gauss-Legendre para a determinação das integrais pertinentes.

No âmbito da análise não-linear, utilizou-se o método incremental-iterativo de *Newton-Raphson* com controle de carga que, associado à atualização da matriz de rigidez tangente em cada iteração e à abordagem corrotacional, permitiu a descrição do comportamento de sistemas estruturais submetidos a grandes deslocamentos. O carregamento crítico foi determinado resolvendo-se o problema de autovalor generalizado correspondente.

De forma complementar, teorias simplificadas consideradas em normas técnicas também foram objeto de estudo deste trabalho, e resultados obtidos segundo essas teorias, para estruturas planas em concreto armado, foram verificados à luz da formulação não-linear geral, precisa, desenvolvida ao longo da pesquisa.

A partir das aplicações realizadas, pode-se perceber que as formulações adotadas resolvem de forma eficaz os problemas sugeridos. Das aplicações parciais referentes ao cálculo da carga crítica (Capítulo 2), nota-se que a matriz de rigidez implementada proporciona resultados coerentes e é eficaz, sobretudo, na análise de sistemas estruturais com

elementos não prismáticos, que constituem, na verdade, um dos objetivos centrais desta pesquisa. Em relação à modelagem de elementos de seção variável, cita-se, ainda, o quão relevante é a etapa de determinação do tipo de variação a ser considerada para que o modelo simplificado se aproxime do modelo real da estrutura em estudo e proporcione a obtenção de resultados precisos.

No que se refere à análise não-linear, a partir dos resultados obtidos nas aplicações dos capítulos 3 e 4, verifica-se que a formulação implementada resolveu, com êxito, os problemas propostos, de forma a determinar o caminho de equilíbrio em concordância com as respostas encontradas através do *software* SAP2000 (2013) e demais referências.

Especial atenção deve ser dada à última aplicação do Capítulo 4, no qual foi analisado um edifício de 6 andares em concreto armado. Nesta aplicação, pode ser constatada a importância da consideração da análise não-linear em detrimento da análise linear, para se prever, de forma mais realística, o comportamento estrutural. Ressalta-se ainda que, no que concerne à análise não-linear geométrica em estruturas de concreto armado, os procedimentos simplificados de norma são capazes de classificar a estrutura e calcular, de maneira satisfatória e incrivelmente simples, os esforços globais de segunda ordem. Sendo assim, a utilização da análise não-linear aproximada, em detrimento da análise não-linear exata, trás como benefícios rapidez e praticidade. Deve-se atentar, no entanto, que este tipo de análise só pode ser realizado para edificações simétricas, com número de andares igual ou superior a 4 e quando o coeficiente de majoração γ_z não for superior a 1,3. Como a maioria dos edifícios convencionais dos grandes centros urbanos respeita a essas restrições, o processo simplificado vem sendo amplamente utilizado.

Por fim, ressalta-se que a estratégia adotada na simulação da rigidez variável de elementos estruturais com seções geométricas quaisquer (usuais ou não) facilita enormemente a geração dos modelos, mesmo quando se faz comparação com o processo de geração desses modelos em *softwares* como o SAP2000 (2013). Menciona-se que isso se explica pelo fato de, no programa NAESY, empregarem-se processos baseados em formulações integrais de contorno para a criação das seções.

Sugestões para trabalhos futuros

A seguir mencionam-se algumas sugestões para trabalhos futuros:

- Inclusão, no programa NAESY, de formulações de análises que considerem a não-linearidade física do material;

- Estudo da não-linearidade física realizada através de prescrições normativas;
- Implementação de especificações da ABNT NBR 8800 (2008) na análise de estruturas em aço;
- Modelagem de elementos não prismáticos considerando métodos alternativos como o descrito em Liu *et. al.* (2016);
- Inclusão de outros processos iterativos no algoritmo de *Newton-Raphson*, como processo de controle de deslocamento e processo de controle de carga e deslocamento (comprimento de arco);
- Análise de estruturas com ligações semirrígidas;
- Estudo estatístico da eficiência do coeficiente γ_z na predição da resposta não-linear a partir da majoração da resposta linear;
- Extensão dos processos não-lineares discutidos nesta pesquisa ao módulo de análise de estruturas espaciais do programa NAESY.

Referências Bibliográficas

- Associação Brasileira de Normas Técnicas, 2008. *NBR 8800: Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios*. Rio de Janeiro.
- Associação Brasileira de Normas Técnicas, 2014. *NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto – Procedimento*. Rio de Janeiro.
- Associação Brasileira de Normas Técnicas, 1988. *NBR 6123: Forças devidas ao vento em edificações*. Rio de Janeiro.
- Associação Brasileira de Normas Técnicas, 1980. *NBR 6120: Cargas para o cálculo de estruturas de edificações*. Rio de Janeiro.
- Batoz, J.L., e Dhatt, G., 1979. *Incremental displacement algorithms for nonlinear problems*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 14, pp. 1262–1267.
- Bathe, K. J., 1996. *Finite Element Procedures in Eng. Analysis*. Prentice–Hall, Inc., New Jersey.
- Belytschko, T., Hsieh, B. J., 1973. *Non–linear transient finite element analysis with convected co–ordinates*. Numerical Methods in Engineering, vol. 7, n. 3, p 255–271.
- Bleich, F., 1952. *Buckling strength of metal structures*. McGraw–Hill.
- Carvalho, R. C., Pinheiro, L. M., 2013. *Cálculo e Detalhamento de Estruturas Usuais de Concreto Armado*, PINI, vol. 2.
- CEB – Comité Euro–International du Béton, 1978. *CEB/FIP Manual of Buckling and Instability*, The Construction Press, Lancaster.
- de Araújo, F. C., 1994. *Time–domain solution of three–dimensional linear problems of elastodynamics by means of a BE/FE coupling process (in German)*, Ph.D. Thesis, Technical University of Braunschweig, Germany.
- Ellwanger , R. J., 2012. *Um limite variável para o parâmetro de instabilidade de estruturas de contraventamento formadas por associações de pórticos com paredes ou núcleos*. Revista IBRACON de Estruturas e Materiais. vol.5 n.1 p. 104–136.
- Franco, M., Vasconcelos, A.C., 1991. *Practical Assessment of Second Order Effects in Tall Buildings*. In: Colóquio do CEB–FIP Model Code 1990, p. 307–24.
- Galvão, A.S., 2004. *Instabilidade Estática e Dinâmica de Pórticos Planos com Ligações Semi–rígidas*. Tese de Doutorado, Programa de Pós–Graduação em Engenharia Civil da PUC–Rio, Rio de Janeiro, Brasil.

- Ghali, A., Favre, R., 1986. *Concrete structures: stresses and deformations*. 1 ed. London. E & FN Spon, Chapman and Hall, 372 p.
- Gonçalves, P. B., 2003. *Análise Elástica de Estruturas Reticuladas*. Apostila com notas de aula. Rio de Janeiro, UFRJ.
- Hillesheim, M. J., 2013. *Análise de torção de Saint-Venant em barras com seção arbitrária via método dos elementos de contorno*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- Khuntia, M.; Ghosh, S. K., 2004. *Flexural stiffness of reinforced concrete columns and beams: analytical approach*. ACI Structural Journal. Title n. 101-S36. p. 350-363.
- Lee, S., Manuel, F.S., e Rossow, E.C., 1968. *Large deflections and stability of elastic frames*. Journal of the Engineering Mechanics Division, EM2, 521-547.
- Li, G-Q., Li, J-J., 2002. *A tapered Timoshenko-Euler beam element for analysis of steel portal frames*. Journal of Constructional Steel Research, n. 58(12), p. 1531-1544.
- Li, J-J., Li, G-Q., Chan, S-L., 2003. *A second-order inelastic model for steel frames of tapered members with slender web*. Engineering Structures, n. 25 , p. 1022-1043.
- Liu, W. S., Bai, R., Chan, L. S. 2016. *Second-order analysis of non-prismatic steel members by tapered beam-column elements*. Structures, n.6, p. 108-118.
- Martha, L. F., 2010. *Análises de Estruturas: conceitos e métodos básicos*. Elsevier, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- Maximiano, D. P., 2012. *Uma técnica eficiente para estabilizar a estratégia do resíduo ortogonal na análise não linear de estruturas*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- Moncayo, W. J. Z., 2011. *Análise de segunda ordem global em edifícios com estrutura de concreto armado*. Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, SP, Brasil.
- O'Rourke, M., Zebrowski, T., 1977. *Buckling load for nonuniform columns*. Computers and Structures, n. 7(6), p. 717-720.
- Pacoste, C., e Eriksson, A., 1997. *Beam elements in instability problems*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 144, pp. 163-197.
- Pereira, R. A. T., 2015. *Análise de estruturas reticuladas espaciais com barras de seções variáveis*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- Saffari, H., Mirzai, N. M., Mansouri, I., Baghetipour, M. H., 2013. *Efficient Numerical Method in Second-Order Inelastic Analysis of Space Trusses*. Journal of Computing in Civil Engineering.

- SAP2000, 2013. *Structural Analysis Program (SAP)*. Versão Ultimate 16.0.0. Computers and Structures, Inc.
- Schweizerhof, K.H., e Wriggers, P., 1986. *Consistent linearization for path following methods in nonlinear FE analysis*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 59, pp. 269–279.
- Silva, A. R. D., 2009. *Sistema computacional para análise avançada estática e dinâmica de estruturas metálicas (CS-ASA)*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- Silva, S. S., 2011. *Análise não linear de pórticos planos utilizando uma formulação co-rotacional e plasticidade por camadas*. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF.
- Silvestre, N., Camotin, D., 2007. *Elastic buckling and second-order behavior of pitched-roof steel frames*. Journal of Constructional Steel Research, n.63, p. 804–818.
- Southwell, R.V., 1941. *An introduction to the Theory of Elasticity for Engineers and Physicists*. 2nd Ed., Oxford University Press, Oxford, England.
- TQS, 2016. *Tecnologia e Qualidade em Sistemas (CAD/TQS)*. Versão 18.17. TQS Informática, Ltda.
- Valipour, H. R., Bradford, M. A., 2011. *A new shape function for tapered three-dimensional beams with flexible connections*. Journal of Constructional Steel Research, n. 70, p. 43–50.
- Yang, Y.B., e Kuo, S.B., 1994. *Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures*. Prentice Hall.