

**Universidade Federal de Ouro Preto**

Escola de Minas

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

PROPEC

---

Dissertação

---

**Análise Dinâmica Transiente  
em Pórticos Planos com  
Elementos Não-Prismáticos  
de Seção Qualquer, Descritos  
Segundo Formulação de  
Timoshenko.**

*Fernando Rodrigues Pillon*

Ouro Preto  
2021



UFOP

Universidade Federal de Ouro Preto – Escola de Minas  
Departamento de Engenharia Civil  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

# **Análise Dinâmica Transiente em Pórticos Planos com Elementos Não-Prismáticos de Seção Qualquer, Descritos Segundo Formulação de Timoshenko**

**Fernando Rodrigues Pillon**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr.-Ing. Francisco Célio de Araújo

Ouro Preto, Fevereiro de 2021

## SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

P642a Pillon, Fernando.

Análise dinâmica transiente em pórticos planos com elementos não-prismáticos de seção qualquer, descritos segundo a formulação de timoshenko. [manuscrito] / Fernando Pillon. - 2021.

113 f.: il.: color., gráf., tab..

Orientador: Prof. Dr. Francisco Araújo.

Dissertação (Mestrado Acadêmico). Universidade Federal de Ouro Preto. Departamento de Engenharia Civil. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.

Área de Concentração: Estruturas e Construção.

1. Pórticos estruturais. 2. Análise térmica. 3. Sismologia. I. Araújo, Francisco. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

CDU 624.01

Bibliotecário(a) Responsável: Angela Maria Raimundo - SIAPE: 1.644.803



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO  
REITORIA  
ESCOLA DE MINAS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL



## FOLHA DE APROVAÇÃO

**Fernando Rodrigues Pillon**

### **Análise Dinâmica Transiente em Pórticos Planos com Elementos Não-Prismáticos de Seção Qualquer, Descritos Segundo a Formulação de Timoshenko**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de mestre

Aprovada em 24 de fevereiro de 2021

#### Membros da banca

Dr.-Ing. - Francisco Célio de Araújo - Orientador - Universidade Federal de Ouro Preto  
D.Sc. - Francisco de Assis das Neves - Universidade Federal de Ouro Preto  
D.Sc. - Ivan Fabio Mota de Menezes - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Francisco Célio de Araújo, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito no Repositório Institucional da UFOP em 24/02/2021



Documento assinado eletronicamente por **Francisco Celio de Araujo, PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR**, em 24/02/2021, às 19:41, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [http://sei.ufop.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **0139323** e o código CRC **42780607**.

Referência: Caso responda este documento, indicar expressamente o Processo nº 23109.001758/2021-95

SEI nº 0139323

R. Diogo de Vasconcelos, 122, - Bairro Pilar Ouro Preto/MG, CEP 35400-000  
Telefone: 3135591546 - [www.ufop.br](http://www.ufop.br)

Aos meus familiares e orientadores.

# Agradecimentos

A Deus por guiar meus passos nessa trajetória.

Aos meus pais, Fausto e Leandra e às minhas avós, Ilzair e Ivone, pelo amor e apoio incondicional; e por construírem um caminho que me trouxe até aqui.

Ao meu orientador, prof. Francisco Célio de Araújo, pela oportunidade, motivação, dedicação e amizade ao longo destes anos de trabalho. Muito obrigado pela confiança, paciência e orientação.

A minha amiga Iara Souza Ribeiro por toda ajuda, disposição e colaboração durante a produção deste trabalho. Muito obrigado pela paciência e amizade.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PROPEC) pelos ensinamentos; e à Sílvia pela atenção e trabalho na secretaria do PROPEC.

Aos meus amigos e amigas do PROPEC, em especial a Marcela Nicolato, Endersom, Otávio, Bruno, Jackson, Maicon e Marcela Santos, pelas horas de estudo, convívio, risadas e bons momentos.

À CAPES pelo auxílio financeiro.

Resumo da Dissertação apresentada ao PROPEC/UFOP como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil.

## **ANÁLISE DINÂMICA TRANSIENTE EM PÓRTICOS PLANOS COM ELEMENTOS NÃO-PRISMÁTICOS DE SEÇÃO QUALQUER, DESCRITOS SEGUNDO FORMULAÇÃO DE TIMOSHENKO**

**Fernando Rodrigues Pillon**

Fevereiro/2021

*Orientador:* Francisco Célio de Araújo

O presente trabalho tem como foco a análise, no domínio do tempo, de pórticos planos com seções transversais genericamente variáveis, descritos segundo a formulação de Timoshenko. Para isso, uma nova formulação é proposta para determinar as matrizes "exatas" de propriedades estruturais envolvidas nas equações de movimento do sistema. Ao contrário das formulações padrões de elementos finitos, no presente trabalho, o princípio das forças virtuais (PVF) é aplicado, em nível do elemento, para obter as expressões exatas para cálculo dos coeficientes de rigidez e de cargas nodais equivalentes. Aqui, um conjunto de equações do tipo flexibilidade é gerado, cujas incógnitas são os valores procurados das propriedades estruturais. É importante notar que esses coeficientes são "exatos" desde que a variação da rigidez ao longo do elemento também seja descrita de forma exata. Para elementos não prismáticos, polinômios de diferentes ordens podem ser empregados para aproximar suas rigidezes axial, de flexão e de cisalhamento, ao longo do elemento. O processo também permite construir as funções de forma exatas de Timoshenko, necessárias para calcular matrizes de propriedades estruturais dependentes da deformação do elemento, como a matriz de massa. A estratégia implícita de Newmark é usada para integrar as equações de equilíbrio no tempo. A precisão e eficiência da formulação proposta são verificadas efetuando-se várias análises no domínio do tempo de estruturas com elementos geometricamente complexos e submetidas a diversas excitações dinâmicas, inclusive sismos. Para fins de validação, as respostas obtidas são comparadas às calculadas por meio dos pacotes comerciais ANSYS e SAP2000.

**Palavras-Chave:** Elementos de pórtico não-prismáticos, funções de forma de Timoshenko; análise transiente linear; sismos

Abstract of Dissertation presented to PROPEC/UFOP as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Civil Engineering.

**DYNAMIC TRANSIENT ANALYSIS OF TIMOSHENKO'S PLANE FRAMES  
WITH NONPRISMATIC ELEMENTS HAVING CROSS SECTIONS OF ANY  
SHAPES**

**Fernando Rodrigues Pillon**

February/2021

*Advisor:* Francisco Célio de Araújo

This work focuses on the time-domain analysis of plane framed structures with generically variable cross sections and described according to Timoshenko's formulation. For that, a novel formulation is proposed to determine the "exact" structural-property matrices involved in the motion matrix equations of the structural system. Unlike standard finite-element formulations, the principle of virtual forces (PVF) is applied, at the element level, to obtain closed-form expressions for stiffness and equivalent nodal load coefficients. Herein, a flexibility-type set of equations is generated whose unknowns are the sought-after structural-property values. It is worth noting that these coefficients are "exact" as long as the rigidity variation along the element be exactly described as well. For non-prismatic elements, polynomials of different orders may be employed to approximate their axial, bending, and shear rigidities along the element. The process also allows constructing the exact Timoshenko's shape functions, necessary to calculate structural-property matrices dependent on the element deformation such as the mass matrix. The implicit Newmark method is considered to integrate the time-dependent equilibrium equations. Accuracy and efficiency of the proposed formulation are verified by effecting several time-domain analyses of framed structures having geometrically complex elements, including seismic analyses. Aiming at validating the developed formulations, the responses are compared to the ones calculated using ANSYS and SAP2000 commercial packages.

**Keywords:** Non-prismatic frame elements; exact Timoshenko's shape functions; linear time-domain analysis; earthquakes.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>vii</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xi</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Considerações Iniciais .....	1
1.2 Objetivos .....	4
1.5 Organização do Trabalho .....	5
<b>2 Propriedades Estruturais de Elemento</b>	<b>6</b>
2.1 Introdução .....	6
2.2 Equações Básicas .....	7
2.2.1 Cargas Nodais Equivalentes.....	11
2.2.2 Matriz de Rigidez de Elemento.....	12
2.2.3 Matriz de Massa de Elemento .....	13
2.3 Método Alternativo .....	21
2.4 Funções de Forma de Timoshenko para Elementos com Rigidez Variável .....	24
2.5 Elementos com Rigidez e Distribuição de Massa Variáveis.....	29
2.5.1 Determinação das propriedades geométricas .....	31
2.6 Análises Parciais .....	33
2.6.1 Funções de forma de Timoshenko para elementos de rigidez constante	34
2.6.2 Funções de forma de Timoshenko para elementos de rigidez variável ..	35
2.6.3 Frequências naturais de um elemento com rigidez variável .....	36
<b>3 Sistema de Equações Dinâmicas da Estrutura</b>	<b>39</b>
3.1 Introdução .....	39
3.2 Ligações Semirrígidas.....	40
3.2.1 Atenuadores Dinâmicos Sintonizados .....	43
3.3 Formulação das Equações de Movimento .....	45

3.3.1	Amortecimento Proporcional .....	46
3.4	Análises Sísmicas.....	48
3.4.1	Acelerogramas Sintéticos.....	49
3.4.2	Excitação de Base .....	50
3.4	Solução do Problema Transiente.....	52
3.5.1	Método de Newmark.....	53
<b>4</b>	<b>Aplicações</b>	<b>56</b>
4.1	Introdução .....	56
4.2	Galpão Industrial.....	57
4.3	Ponte Mista de Aço e Concreto .....	62
4.4	Ponte em Concreto.....	69
4.4.1	Análise modal.....	75
4.4.2	Análise sísmica.....	78
4.4.3	Carregamento harmônico e atenuador dinâmico.....	80
<b>5</b>	<b>Conclusões</b>	<b>94</b>
5.1	Sugestões para futuras pesquisas .....	96
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>97</b>
<b>A</b>	<b>Código Fortran para geração de acelerogramas sintéticos</b>	<b>101</b>
A.1	Introdução .....	101
A.2	Código Fortran .....	101

# Lista de Figuras

2.1	Elemento de Pórtico plano .....	7
2.2	Estado de carregamento.....	8
2.3	Elemento de pórtico plano – Caso I .....	9
2.4	Elemento de Pórtico Plano – Caso II.....	10
2.5	Elemento Deformado .....	13
2.6	Forças Inerciais.....	14
2.7	Forças Inerciais no Elemento – Caso I.....	16
2.8	Forças Inerciais no Elemento – Caso II.....	19
2.9	Aplicação do PTV para ações de Engastamento .....	22
2.10	Modos de Deformação do Elemento .....	24
2.11	Casos considerados para obtenção das funções de forma .....	25
2.12	Esforços Solicitantes Virtuais .....	26
2.13	Variação da Rigidez e Distribuição de Massa.....	29
2.14	Funções de Interpolação .....	31
2.15	Seção Transversal Genérica e o Detalhe do Contorno (Pereira, 2015).....	32
2.16	Viga “I” – Seção e Material Constantes .....	34
2.17	Funções de Forma para Rigidez Constante .....	34
2.18	Derivada das Funções de Forma para Rigidez Constante .....	35
2.19	Viga “I” – Seção Variável e Material Constante.....	35
2.20	Funções de Forma para o Elemento de Rigidez Variável .....	36
2.21	Viga “I” – Seção variável e Material Constante com Extremidade Engastada.....	37
2.22	Diferença entre as Frequências Versus Número de Elementos.....	37
3.1	Elemento de Pórtico com Ligação Semirrígida.....	40
3.2	Detalhe da Ligação Semirrígida .....	41
3.3	Viga com Ligação Semirrígida.....	42

3.4	Modelagem de Atenuadores Dinâmicos Sintonizados – ADS's.....	44
3.5	Conectividade do ADS.....	44
3.6	Taxa de Amortecimento em Função da Frequência (Clough e Penzien, 1993)....	47
3.7	Definição dos Graus de Liberdade da Superestrutura e dos Apoios .....	51
3.8	Variação da Aceleração.....	54
4.1	Pórtico Galpão Industrial: Detalhamento da Estrutura.....	57
4.2	Pórtico Galpão Industrial: Tipos de Elementos.....	57
4.3	Pórtico Galpão Industrial: Dimensões da Seção .....	58
4.4	Pórtico Galpão Industrial: Discretização em Subelementos .....	58
4.5	Pórtico Galpão Industrial: Modelo da Estrutura no SAP2000 .....	58
4.6	Pórtico Galpão Industrial: Forma do 1º Modo .....	59
4.7	Pórtico Galpão Industrial: Forma do 2º Modo .....	59
4.8	Pórtico Galpão Industrial: Forma do 3º Modo .....	60
4.9	Pórtico Galpão Industrial: Forma do 4º Modo .....	60
4.10	Pórtico Galpão Industrial: Pontos para Comparação das Respostas .....	61
4.11	Pórtico Galpão Industrial: Histórico de Deslocamentos .....	61
4.12	Ponte Mista: Detalhamento da Estrutura.....	62
4.13	Ponte Mista: Variação Longitudinal da Seção .....	63
4.14	Ponte Mista: Cargas Dinâmicas Aplicadas .....	63
4.15	Ponte Mista: Modelo com Elementos Reticulados.....	64
4.16	Ponte Mista: Modelagem das Seções no SAP2000.....	64
4.17	Ponte Mista: Discretização no ANSYS.....	65
4.18	Ponte Mista: Forma dos dois primeiros modos no ANSYS.....	66
4.19	Ponte Mista: Forma dos dois primeiros modos no Presente Trabalho .....	66
4.20	Ponte Mista: Históricos de Deslocamentos .....	67
4.21	Ponte Mista: Históricos de Velocidade .....	68
4.22	Ponte Mista: Históricos de Aceleração .....	69
4.23	Ponte em Concreto: Fotografia da Ponte Internacional Tancredo Neves .....	70
4.24	Ponte em Concreto: Detalhes da Estrutura.....	70
4.25	Ponte em Concreto: Categoria de Superelementos .....	71
4.26	Ponte em Concreto: Superelementos do tipo $e_1$ e $e_3$ .....	71
4.27	Ponte em Concreto: Superelementos do tipo $e_2$ .....	72
4.28	Ponte em Concreto: Superelementos do tipo $e_4$ e $e_5$ .....	73

4.29	Ponte em Concreto: Detalhes das Barras Rígidas .....	74
4.30	Ponte em Concreto: Malha de elementos do ANSYS.....	75
4.31	Ponte em Concreto: Deslocamento Prescrito .....	76
4.32	Ponte em Concreto: Primeiro modo de vibração.....	76
4.33	Ponte em Concreto: Segundo modo de vibração.....	77
4.34	Ponte em Concreto: Terceiro modo de vibração .....	77
4.35	Ponte em Concreto: Quarto modo de vibração .....	78
4.36	Ponte em Concreto: Acelerograma.....	79
4.37	Ponte em Concreto: Pontos para comparação das respostas .....	79
4.38	Ponte em Concreto: Resposta da estrutura sob ação de sismo .....	80
4.39	Ponte em Concreto: Carregamento harmônico distribuído .....	81
4.40	Ponte em Concreto: Pontos para comparação das respostas .....	81
4.41	Ponte em Concreto: Carregamento harmônico – históricos na direção de $u_1$ .....	82
4.42	Ponte em Concreto: Carregamento harmônico – históricos na direção de $u_2$ .....	83
4.43	Ponte em Concreto: Carregamento harmônico – históricos na direção de $u_3$ .....	84
4.44	Ponte em Concreto: Carregamento harmônico – históricos na direção de $u_4$ .....	85
4.45	Ponte de Concreto: Seções para Análises de Tensões.....	86
4.46	Ponte de Concreto: Tensão Normal na Seção do Corte AA.....	87
4.47	Ponte de Concreto: Tensão Normal na Seção do Corte BB .....	87
4.48	Ponte de Concreto: Tensão Normal na Seção do Corte CC .....	87
4.49	Ponte em Concreto: ADS's .....	88
4.50	Ponte em Concreto: Estrutura com ADS's – históricos na direção de $u_1$ .....	89
4.51	Ponte em Concreto: Estrutura com ADS's – históricos na direção de $u_2$ .....	90
4.52	Ponte em Concreto: Estrutura com ADS's – históricos na direção de $u_3$ .....	91
4.53	Ponte em Concreto: Estrutura com ADS's – históricos na direção de $u_4$ .....	92
4.54	Ponte em Concreto: Deslocamentos dos ADS's em relação a ponte .....	93

# Lista de Tabelas

2.1	Biblioteca de seções disponíveis no programa.....	33
2.2	Frequências naturais de vibração dos modos 1 e 2 sem cisalhamento.....	37
2.3	Frequências naturais de vibração com cisalhamento .....	38
3.1	Valores recomendados de amortecimento (Newmark e Hall, 1982).....	48
3.2	Tipos de solo (Adaptado de Eurocódigo 8, 2004).....	50
3.3	Solução pelo Método de Newmark .....	55
4.1	Pórtico Galpão Industrial: Alturas iniciais e finais das seções em milímetro .....	58
4.2	Pórtico Galpão Industrial: Frequências de vibração dos primeiros 4 modos .....	59
4.3	Ponte Mista: Propriedades dos Materiais .....	63
4.4	Ponte Mista: Frequências naturais de vibração dos modos 1 e 2 .....	65
4.5	Ponte em Concreto: Variação de $H_1$ e $H_2$ ao longo do comprimento.....	73
4.6	Ponte em Concreto: Frequências dos primeiros 4 modos .....	78

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Considerações Iniciais

As necessidades do mercado aliadas aos avanços tecnológicos têm motivado o emprego de novas técnicas na execução de estruturas, que, atualmente, se tornam cada vez mais esbeltas. Para que isso fosse possível, processos que simulem de forma o mais real possível o comportamento de sistemas estruturais complexos têm sido objeto de intensa pesquisa na comunidade internacional de Engenharia Estrutural.

Devido a à sua concepção estrutural, as estruturas aporticadas são uma excelente solução para os mais variados tipos de edificações e constituem um dos mais importantes sistemas construtivos empregados na construção civil. Uma das principais questões que se coloca no dimensionamento desses elementos é a escolha da sua forma geométrica. Elementos estruturais podem ser dimensionados com seções quaisquer, que, por sua vez, podem variar genericamente ao longo do elemento, permitindo uma melhor adaptação das seções transversais aos respectivos esforços atuantes, de modo a promover redução no consumo de materiais necessários para a construção do sistema estrutural.

Na análise de sistemas estruturais, uma área que merece especial destaque é Dinâmica Estrutural, que permite determinar amplitudes de grandezas físicas relevantes para o seu dimensionamento, quando esses sistemas estruturais são submetidos a excitações dependentes do tempo. Segundo Vieira (2004), o interesse pela Dinâmica Estrutural sempre esteve presente no contexto da engenharia, visto que, na natureza, as ações aplicadas às estruturas geralmente variam com o tempo.

Nas últimas décadas, verificou-se uma grande evolução no desenvolvimento de ferramentas computacionais que possibilitem a solução de problemas de engenharia sob

tais tipos de carregamentos. Neste sentido, essas ferramentas devem ser capazes de avaliar o comportamento das mesmas de maneira precisa. Formulações unidimensionais (voltadas para sistemas estruturais reticulados), devido à simplicidade da modelagem computacional de estruturas e reduzido tempo de processamento, apresentam, para casos práticos de engenharia, vantagem em relação a formulações tridimensionais, que apesar de versáteis e precisas, são, muitas vezes, computacionalmente inviáveis para estes casos. Contudo, para que respostas baseadas em formulações unidimensionais correspondam satisfatoriamente às respostas contínuas, muitos efeitos devem ser levados em consideração. Além disso, a estrutura deve ser modelada como se apresenta, por exemplo, com seções quaisquer que possam variar genericamente ao longo do elemento.

No último século, estão entre os tópicos frequentemente abordados por pesquisadores, a modelagem de elementos não prismáticos, com inclusão de efeitos de cisalhamento e não lineares. Citam-se entre outros: Karabalis e Beskos (1982), que propuseram um método para obtenção das matrizes de rigidez elástica, de rigidez geométrica e de massa de elementos não prismáticos com larguras constantes e seção variando linearmente; Valipour e Bradford (2011), que utilizaram o princípio dos trabalhos virtuais e o conceito de interpolação de forças com o objetivo de derivar funções de forma para elementos não prismáticos de pórtico espacial com ligações semirrígidas; Li e Li (2002), que usam polinômios de Chebyshev para obter a matriz de rigidez de elementos de pórtico plano cônicos considerando os efeitos do cisalhamento e deformação axial.

Araújo e Pereira (2017) apresentaram uma estratégia para calcular diretamente a matriz de rigidez de elementos de pórtico espacial tendo seções transversais arbitrárias e variação genérica de rigidez ao longo de seus eixos. Todas as propriedades de seção necessárias são determinadas por meio de formulações baseadas puramente em integrais de contorno, onde para expressar as propriedades de seção como área, primeiro e segundo momentos de inércia e os fatores de forma ao cisalhamento, em termos de integrais de contorno, a estratégia emprega o teorema de Green. Para a determinação da rigidez torsional em seções quaisquer, utiliza-se o Método dos Elementos de Contorno (MEC) Araújo, Hillesheim e Soares (2019).

Araújo e Ribeiro (2020) propuseram uma estratégia unificada para derivar matrizes exatas de elementos finitos para estruturas apertadas com elementos com rigidez variável, com base na teoria de viga de Timoshenko. O processo consiste em aplicar o princípio das forças virtuais (PFV), em nível de elemento, para obter um conjunto de equações de compatibilidade a partir do qual os coeficientes de propriedade estrutural e de

carga nodal podem ser avaliados diretamente. Nesta formulação, as características físicas e geométricas variáveis ao longo dos elementos de pórtico podem ser aproximadas por polinômios de diferentes ordens. Estes autores também aplicam o PFV para obter as funções de forma de Timoshenko (determinadas segundo a teoria de viga de Timoshenko) para elementos de rigidez variável, as quais foram empregadas, nesse artigo, na determinação dos coeficientes de rigidez geométrica.

Segundo Costa (2014), estruturas esbeltas costumam apresentar frequências naturais de vibração mais baixas, as quais, muitas vezes, se aproximam dos valores da frequência de excitação provocada pelos carregamentos ambientais (ventos, ondas, terremotos), ações humanas, equipamentos e tráfego, causando aumento considerável nas amplitudes de deslocamentos. Nesses casos, um tipo comum de mecanismo passivo de controle de vibração é a utilização de Atenuadores Dinâmicos Sintonizados (ADS). Estes dispositivos já foram amplamente empregados em diversas estruturas ao redor do mundo e renderam estudos importantes, como em Battista e Pfeil (2000, 2005 e 2008), no controle de amplitudes de deslocamentos no vão central da Ponte Rio Niterói provocados por rajadas de vento. Menciona-se que esses atenuadores de vibração possibilitaram uma redução de até 75% nas amplitudes máximas não-controladas no vão central da ponte Rio-Niterói. Em Sun *et al.* (2020), descreve-se o desempenho de ADS's na ponte de Chongqi, sobre o rio Yangtzé na China, que foram instalados, ainda na fase de construção da ponte, após observarem-se vibrações elevadas induzidas por vórtices. Relata-se que ensaios dessa ponte em túneis de vento indicaram excitações significativas na frequência do primeiro modo de vibração.

Em respostas dinâmicas de estruturas reais, observa-se que a energia é dissipada durante a vibração, o que em análise dinâmica é geralmente levado em consideração pela introdução de forças de amortecimento dependentes da velocidade. Dados de amortecimento não podem ser deduzidos deterministicamente de outras propriedades estruturais, porque as propriedades de amortecimento são, em geral, dependentes da frequência. O amortecimento de Rayleigh, segundo o qual a matriz de amortecimento é estabelecida como uma combinação linear das matrizes de rigidez e de massa, é frequentemente utilizado (Clough e Penzien, 2003). Para aplicação do amortecimento de Rayleigh, faz-se necessário o conhecimento de taxas de amortecimento de pelo menos dois modos naturais de vibração da estrutura. Em geral, os dados de amortecimento podem ser obtidos experimentalmente ou estimados usando-se dados de estruturas semelhantes. Nas últimas décadas vários pesquisadores apresentaram trabalhos com dados de amortecimento

para diferentes tipos de estruturas, dentre eles citam-se aqui: Newmark (1982), Cook *et al.* (1989), Papageorgiou e Gantes (2008 e 2010) e Butterworth, Lee e Davidson (2004).

## 1.2 Objetivos

O propósito central desta pesquisa é desenvolver uma estratégia para a análise dinâmica de pórticos planos, no domínio do tempo, capaz de modelar elementos com seções transversais de formas geométricas arbitrárias, variando genericamente ao longo do elemento. Mais especificamente, foi proposto:

- Determinar as propriedades geométricas das seções (área, centroides, momentos de inércia e fatores de forma ao cisalhamento), empregando integrais de contorno;
- Obtenção dos coeficientes da matriz de rigidez e de massa para elementos com rigidez e distribuição de massa variáveis com formulação própria;
- Derivação e implementação de funções de forma para elemento de rigidez variável com inclusão de efeitos do cisalhamento segundo formulação de Timoshenko;
- Implementação e utilização do Método de Newmark para solução de problemas transientes;
- Implementação de opções de visualização dos modelos e respostas via a utilização do software VisIt, livre, desenvolvido pelo Lawrence Livermore National Laboratory - LLNL (<http://www.llnl.gov/visit>);
- Validação dos resultados por comparação de respostas com pacotes comerciais disponíveis na instituição ou disponibilizados gratuitamente pelo desenvolvedor;
- Implementação de opções específicas que possibilitem a determinação de respostas de sistemas estruturais sob incidência de abalos sísmicos.

Por fim, destaca-se que esta dissertação vai ao encontro dos objetivos do PROPEC/Deciv/EM/UFOP e está relacionada com as seguintes linhas de pesquisa:

1. *Mecânica Computacional*: que objetiva a aplicação de métodos numéricos na determinação de respostas de sistemas de engenharia;
2. *Comportamento e Dimensionamento de Estruturas*: que visa o estudo do comportamento das diversas partes de uma estrutura, isoladamente ou em conjunto, envolvendo estruturas metálicas e mistas.

### **1.3 Organização do Trabalho**

Esta dissertação é constituída por este capítulo e outros quatro, nos quais são apresentados todos os processos e a base conceitual das estratégias implementadas e utilizadas para análises dinâmicas de estruturas modeladas com elementos de pórtico plano.

Inicialmente, no Capítulo 2, são apresentados os processos generalizados para obtenção dos vetores e matrizes de propriedades estruturais em nível de elemento. Nesse capítulo também são derivadas funções de forma para elementos de rigidez variável com inclusão de efeitos de cisalhamento. São destacadas também as estratégias utilizadas para descrever a variação de rigidez e distribuição de massa ao longo do comprimento dos elementos a partir da interpolação de propriedades físicas do material e geométricas da seção.

No Capítulo 3, são abordados os processos para montagem do sistema de equações dinâmicas da estrutura. De maneira sucinta, neste capítulo apresentam-se os processos para consideração de ligações semirrígidas, simulação de atenuadores dinâmicos, montagem da matriz de amortecimento da estrutura e considerações de excitação de base na obtenção da resposta da estrutura submetida a ações sísmicas. A solução do problema transiente também é abordada neste capítulo, onde para tanto adotou-se no Método do Newmark.

O Capítulo 4 tem por objetivo a aplicação dos processos apresentados na análise de sistemas estruturais em aço, concreto e mistos de aço e concreto. As análises apresentadas são de estruturas submetidas a diversas ações dinâmicas distintas como cargas harmônicas, de impacto e ações sísmicas. São apresentadas as conclusões referentes a esse estudo, no Capítulo 5. Ainda no quinto capítulo, são feitas sugestões para pesquisas futuras.

# Capítulo 2

## Propriedades Estruturais de Elemento

### 2.1 Introdução

Neste Capítulo serão apresentados os processos para obtenção das ações de engastamento e das matrizes de propriedades estruturais de elemento, como a matriz de rigidez elástica, matriz de massa consistente, vetores de cargas nodais equivalentes, etc., a partir das expressões exatas de seus coeficientes para elementos com variação genérica de rigidez e de distribuição de massa. O objetivo deste capítulo, então, é apresentar a formulação utilizada para obtenção das propriedades estruturais em nível de elemento.

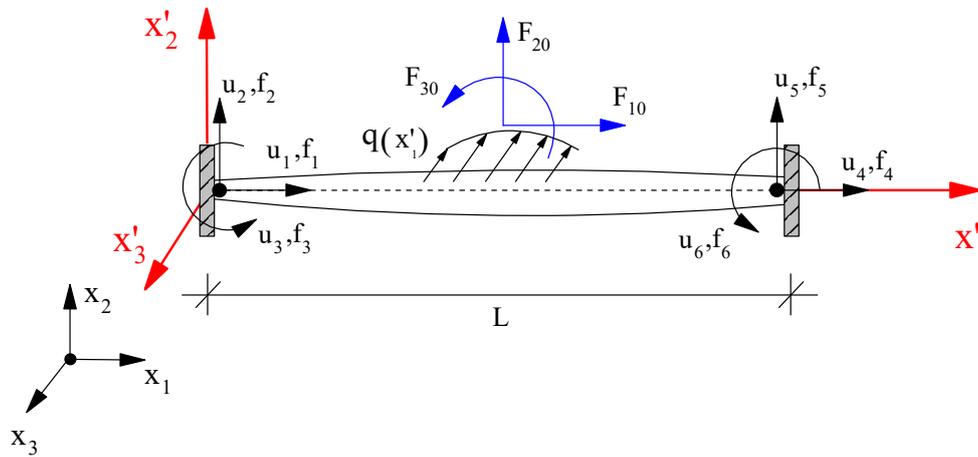
Na Seção 2.2, as equações básicas de compatibilidade de deslocamentos, derivadas do princípio das forças virtuais (PVF), são apresentadas, e o sistema de equações do processo, utilizado na determinação direta da matriz de rigidez do elemento finito de pórtico e das cargas nodais equivalentes, é estabelecido. Este processo é unificado e permite obter, a partir do mesmo sistema de equações, todos os coeficientes do elemento finito. Particularmente nas subseções 2.2.1, 2.2.2 e 2.2.3, o processo é utilizado, respectivamente, na obtenção das forças nodais equivalentes, da matriz de rigidez e da matriz de massa. Para isso, o vetor do lado direito do processo é convenientemente determinado pela imposição dos deslocamentos próprios na direção dos graus de liberdade pertinentes, pois se trata de processo baseado no método da flexibilidade. No caso da determinação das cargas nodais equivalentes, um processo alternativo baseado no Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) é aplicado na determinação dos coeficientes das cargas nodais equivalentes e da matriz de massa do elemento.

Na Seção 2.4 são derivadas as funções de forma para elementos de pórtico plano com rigidez variável ao longo do comprimento segundo a formulação de viga de Timoshenko, onde são consideradas as deformações por cisalhamento transversal. Na Seção 2.5 apresentam-se as generalizações para descrever variações de rigidez segundo leis quaisquer e o processo para determinar as propriedades geométricas das seções arbitrárias empregando integrais de contorno. Por fim, na Seção 2.6, serão apresentados resultados parciais de análises utilizadas para testar a eficiência do método em exemplos simples.

## 2.2 Equações básicas

As expressões gerais para os coeficientes da matriz de rigidez elástica, da matriz de massa e das ações de engastamento podem ser obtidas a partir das equações de equilíbrio e condições de compatibilidade relacionadas ao elemento estrutural. Este processo foi proposto por Araújo e Pereira (2017), empregado na análise de pórticos espaciais, e por Araújo e Ribeiro (2017), empregado para obtenção da matriz de rigidez elástica, matriz de rigidez geométrica e vetor de ações de engastamento em análises geometricamente não lineares de pórticos planos.

A Figura 2.1 considera o elemento de pórtico plano, onde:



**Figura 2.1** – Elemento de Pórtico Plano

$L$  é o comprimento do elemento,  $f_i$  e  $u_i$  são respectivamente as ações de engastamento e os deslocamentos nodais (com  $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ),  $q(x')$  é um carregamento qualquer presente no elemento e  $\mathbf{F}_0$  é o vetor com as componentes resultantes desse carregamento,  $x'_j$  e  $x_j$  são respectivamente o sistema local e global de eixos coordenados (com  $j = 1, 2, 3$ ). A componente  $F_{30}$  é o momento resultante do carregamento de elemento medido em relação ao nó final.

As equações de equilíbrio para este elemento são dadas pelas expressões:

$$\begin{aligned} \sum F_{x_1'} &= f_1 + f_4 + F_{10} = 0 \\ \sum F_{x_2'} &= f_2 + f_5 + F_{20} = 0 \\ \sum F_{x_3'} &= f_3 + f_6 - f_2 \cdot L + F_{30} = 0 \end{aligned} \quad , \quad (2.1)$$

na forma matricial, obtém-se:

$$\mathbf{E}_{II} \cdot \mathbf{f}_{II} + \mathbf{E}_{IF} \cdot \mathbf{f}_{FI} = -\mathbf{F}_0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.2)$$

onde

$$\mathbf{E}_{II} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -L & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_{IF} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_{II} = \begin{Bmatrix} f_{1i} \\ f_{2i} \\ f_{3i} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{f}_{FI} = \begin{Bmatrix} f_{4i} \\ f_{5i} \\ f_{6i} \end{Bmatrix} \text{ e } \mathbf{F}_0 = \begin{Bmatrix} F_{10} \\ F_{20} \\ F_{30} \end{Bmatrix}. \quad (2.3)$$

As equações de equilíbrio são necessárias, porém não são suficientes para obtenção das ações de engastamento do elemento, pois tem-se um número de incógnitas maior que o número de equações. Portanto, cria-se uma estrutura isostática auxiliar (sistema principal) obtida da estrutura original pela eliminação de vínculos e a associação de forças incógnitas aos vínculos eliminados. A solução consiste em encontrar os valores das forças incógnitas de modo que os deslocamentos nos vínculos, na direção dos graus de liberdade liberados, sejam impostos. Deste modo, definindo-se equações de compatibilidade de deslocamentos a partir do estado de carregamento da Figura 2.2 e aplicando o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) para obtenção dos termos das equações, obtém-se:

$$\bar{f}_i \cdot u_i = \int_L \bar{N}_i d\delta + \int_L \bar{M}_i d\theta + \int_L \bar{Q}_i d\lambda, \quad (2.4)$$

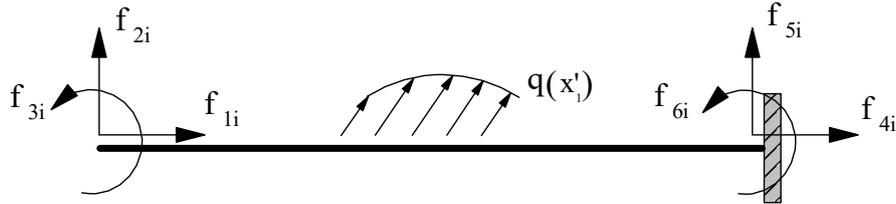
onde  $u_i$  é o deslocamento nodal incógnito,  $\bar{N}_i$ ,  $\bar{M}_i$  e  $\bar{Q}_i$  são respectivamente, o esforço normal, o momento fletor e o esforço cortante devido a força virtual unitária  $\bar{f}_i$ . O deslocamento axial, a rotação flexional e o deslizamento relativo de uma seção num ponto  $x_1'$  do elemento são respectivamente  $d\delta$ ,  $d\theta$  e  $d\lambda$ .



**Figura 2.2** – Estado de carregamento

Estabelecendo-se, a partir da Equação (2.4), as expressões de deslocamentos da direção dos graus de liberdade de interesse, pode-se então montar as equações de compatibilidade de deslocamentos, as quais são escritas conforme os dois casos indicados a seguir:

**Caso I:** Conforme a Figura 2.3, considera-se apenas o nó final (nó direito) restringido, isto é, admite-se que  $u_4 = u_5 = u_6 = 0$ .



**Figura 2.3** – Elemento de Pórtico Plano - Caso I

As equações de compatibilidade de deslocamentos para este caso são:

$$\mathbf{u}_{I0} + \mathbf{A}_{II} \cdot \mathbf{f}_{II} = \mathbf{u}_{II}, \quad (2.5)$$

onde

$$\mathbf{u}_{I0} = \begin{Bmatrix} u_{10} \\ u_{20} \\ u_{30} \end{Bmatrix} \text{ e } \mathbf{u}_{II} = \begin{Bmatrix} u_{1i} \\ u_{2i} \\ u_{3i} \end{Bmatrix}. \quad (2.6)$$

Na Expressão (2.6) acima,  $\mathbf{u}_{II}$  é o vetor de deslocamentos prescritos do nó inicial e  $\mathbf{u}_{I0}$  é o vetor de deslocamentos na direção dos graus de liberdade do nó inicial, quando atua o carregamento  $q(x'_1)$  no elemento. Da Equação (2.4), resulta que

$$\mathbf{u}_{I0} = \int_L \frac{\bar{N}_i N'_0}{EA} dx'_1 + \int_L \frac{\bar{M}_i M'_0}{EI} dx'_1 + \int_L \frac{\chi \bar{Q}_i Q'_0}{GA} dx'_1, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.7)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal,  $G$  é o módulo de elasticidade transversal,  $A$  é a área da seção transversal,  $I$  é o momento de inércia em relação ao eixo principal local e  $\chi$  é o fator de forma da seção para o cisalhamento em relação à direção  $x'_2$ . Nota-se que

$$N'_0 = N(q); \quad M'_0 = M(q); \quad Q'_0 = Q(q). \quad (2.8)$$

A matriz  $\mathbf{A}_{II}$  é composta por coeficientes  $a_{ij}$ , que são deslocamentos ou rotações na direção do  $i$ -ésimo grau de liberdade devido a uma força unitária na direção do  $j$ -ésimo grau de liberdade (coeficientes de flexibilidade). Neste caso, considera-se a expressão

$$a_{ij} = \int_L \frac{\bar{N}_i N_j}{EA} dx'_1 + \int_L \frac{\bar{M}_i M_j}{EI} dx'_1 + \int_L \frac{\chi \bar{Q}_i Q_j}{GA} dx'_1, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (2.9)$$

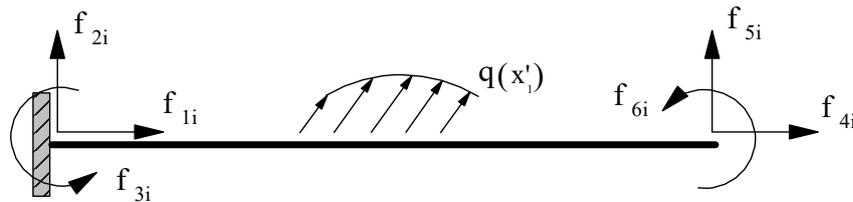
onde  $\bar{N}_i$ ,  $\bar{M}_i$  e  $\bar{Q}_i$  são os esforços solicitantes devido a força virtual unitária  $\bar{f}_i$  e  $N_j$ ,  $M_j$  e  $Q_j$  são os esforços solicitantes devido a força unitária  $f_j$  ( com  $i, j = 1, 2, 3$ ). A matriz  $\mathbf{A}_{II}$  é definida por:

$$\mathbf{A}_{II} = \begin{bmatrix} \int_L \frac{1}{EA} dx'_1 & 0 & 0 \\ 0 & \int_L \frac{(x'_1)^2}{EI} dx'_1 + \int_L \frac{\chi}{GA} dx'_1 & \int_L -\frac{x'_1}{EI} dx'_1 \\ 0 & \int_L -\frac{x'_1}{EI} dx'_1 & \int_L \frac{1}{EI} dx'_1 \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

As equações de equilíbrio e as de compatibilidade de deslocamentos, Equações (2.2) e (2.5), respectivamente, podem ser agrupadas em um sistema de equações do elemento, resultando em:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_{II} & \mathbf{E}_{IF} \\ \mathbf{A}_{II} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{Ii} \\ \mathbf{f}_{Fi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\mathbf{F}_0 \\ \mathbf{u}_{Ii} - \mathbf{u}_{I0} \end{Bmatrix}. \quad (2.11)$$

**Caso II:** Conforme a Figura 2.4, considera-se apenas o nó inicial (nó esquerdo) restringido, isto é,  $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ .



**Figura 2.4** – Elemento de Pórtico Plano - Caso II

De modo análogo ao Caso I, o sistema de equações do elemento para o Caso II é dado por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_{II} & \mathbf{E}_{IF} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{FF} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{If} \\ \mathbf{f}_{Ff} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\mathbf{F}_0 \\ \mathbf{u}_{Ff} - \mathbf{u}_{F0} \end{Bmatrix}, \quad (2.12)$$

onde

$$\mathbf{f}_{If} = \begin{Bmatrix} f_{1f} \\ f_{2f} \\ f_{3f} \end{Bmatrix}, \mathbf{f}_{Ff} = \begin{Bmatrix} f_{4f} \\ f_{5f} \\ f_{6f} \end{Bmatrix}, \mathbf{u}_{Ff} = \begin{Bmatrix} u_{4f} \\ u_{5f} \\ u_{6f} \end{Bmatrix} \text{ e } \mathbf{u}_{F0} = \begin{Bmatrix} u_{40} \\ u_{50} \\ u_{60} \end{Bmatrix}, \quad f = 4, 5, 6, \quad (2.13)$$

em que  $\mathbf{f}_{If}$  e  $\mathbf{f}_{Ff}$  são os vetores de cargas nodais e  $\mathbf{u}_{Ff}$  é o vetor de deslocamentos prescritos para o Caso II.

Os coeficientes do vetor  $\mathbf{u}_{F0}$  são os deslocamentos na direção dos graus de liberdade do nó final quando atua o carregamento  $q(x'_1)$  no elemento. Seus coeficientes são obtidos da seguinte equação:

$$\mathbf{u}_{F0} = \int_L \frac{\bar{N}_f \cdot N_0''}{EA} dx'_1 + \int_L \frac{\bar{M}_f \cdot M_0''}{EI} dx'_1 + \int_L \frac{\chi \cdot \bar{Q}_f \cdot Q_0''}{GA} dx'_1, \quad f = 4, 5, 6, \quad (2.14)$$

e os termos  $N_0''$ ,  $M_0''$  e  $Q_0''$  são dados por:

$$N_0'' = N(q); \quad M_0'' = M(q); \quad Q_0'' = Q(q). \quad (2.15)$$

Os coeficientes da matriz  $\mathbf{A}_{FF}$  são obtidos a partir da Equação (2.9), mas dessa vez para  $i, j = 4, 5, 6$ , com a estrutura na configuração do Caso II. A matriz  $\mathbf{A}_{FF}$  é então definida por:

$$\mathbf{A}_{FF} = \begin{bmatrix} \int_L \frac{1}{EA} dx'_1 & 0 & 0 \\ 0 & \int_L \frac{(L-x'_1)^2}{EI} dx'_1 + \int_L \frac{\chi}{GA} dx'_1 & \int_L \frac{(L-x'_1)}{EI} dx'_1 \\ 0 & \int_L \frac{(L-x'_1)}{EI} dx'_1 & \int_L \frac{1}{EI} dx'_1 \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

### 2.2.1 Cargas nodais equivalentes

Para um carregamento genérico  $q(x'_1)$  atuando sobre o elemento, as ações de engastamento podem ser obtidas com a solução da Equação (2.11). Para este caso, o vetor de deslocamentos prescritos é nulo, resultando na expressão:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_{II} & \mathbf{E}_{IF} \\ \mathbf{A}_{II} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{I0} \\ \mathbf{f}_{F0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\mathbf{F}_0 \\ \mathbf{u}_{I0} \end{Bmatrix}, \quad (2.17)$$

onde  $\mathbf{f}_{I0}$  e  $\mathbf{f}_{F0}$  são as ações de engastamento e incógnitas do sistema de equações,  $\mathbf{F}_0$  é o vetor das resultantes do carregamento externo, cujos termos são dados por:

$$F_{10} = \int_0^L qt(x'_1)dx'_1; \quad F_{20} = \int_0^L qn(x'_1)dx'_1; \quad F_{30} = \int_0^L (x-L) \cdot qn(x'_1)dx'_1, \quad (2.18)$$

onde  $qt(x'_1)$  e  $qn(x'_1)$  são respectivamente as componentes do carregamento  $q(x'_1)$  tangencial e normal ao elemento. O vetor  $\mathbf{u}_{10}$  é obtido utilizando a Equação (2.7), seus termos são:

$$u_{10} = -\int_0^L \frac{N'_0}{EA} dx'_1; \quad u_{20} = \int_0^L \frac{x'_1 \cdot M'_0}{EI} dx'_1 + \int_0^L \frac{\chi \cdot Q'_0}{GA} dx'_1; \quad u_{30} = -\int_0^L \frac{M'_0}{EI} dx'_1, \quad (2.19)$$

em que  $N'_0$ ,  $Q'_0$  e  $M'_0$  são dados pelas equações:

$$\begin{aligned} N'_0(x'_1) &= -\int_0^{x'_1} qt(\xi)d\xi; & Q'_0(x'_1) &= \int_0^{x'_1} qn(\xi)d\xi; \\ M'_0(x'_1) &= \int_0^{x'_1} (x'_1 - \xi) \cdot qn(\xi)d\xi \end{aligned} \quad (2.20)$$

Ressalta-se que com as expressões acima, torna-se possível implementar situações frequentes, complexas, na prática, como o peso próprio do elemento com variação de seção ou de massa específica ao longo do comprimento, que produz uma distribuição não uniforme de carga no elemento.

## 2.2.2 Matriz de Rigidez de Elemento

Para determinar os coeficientes da matriz de rigidez do elemento, considera-se o elemento descarregado, ou seja, faz-se  $\mathbf{F}_0 = \mathbf{u}_{10} = \mathbf{u}_{F0} = 0$ . A  $i$ -ésima coluna da matriz de rigidez, para  $i = 1, 2, 3$ , e a  $f$ -ésima coluna, com  $f = 4, 5, 6$ , podem ser obtidas com a solução das Equações (2.11) e (2.12) respectivamente. Impondo-se os deslocamentos nodais prescritos  $\mathbf{u}_{1i}$  e  $\mathbf{u}_{Ff}$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{1i} &= \mathbf{A}_{II}^{-1} \cdot \mathbf{u}_{1i}, & \mathbf{f}_{Fi} &= -\mathbf{E}_{II} \cdot \mathbf{f}_{1i}, & i &= 1, 2, 3 \\ \mathbf{f}_{Ff} &= \mathbf{A}_{FF}^{-1} \cdot \mathbf{u}_{Ff}, & \mathbf{f}_{If} &= -\mathbf{E}_{II}^{-1} \cdot \mathbf{f}_{Ff}, & f &= 4, 5, 6 \end{aligned} \quad (2.21)$$

em que

$$\mathbf{u}_{1i} = \begin{Bmatrix} u_{1i} \\ u_{2i} \\ u_{3i} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_{1i} \\ \delta_{2i} \\ \delta_{3i} \end{Bmatrix} \text{ para } i = 1, 2, 3; \quad \mathbf{u}_{Ff} = \begin{Bmatrix} u_{4f} \\ u_{5f} \\ u_{6f} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_{4f} \\ \delta_{5f} \\ \delta_{6f} \end{Bmatrix} \text{ para } f = 4, 5, 6, \quad (2.22)$$

onde  $\delta$  é o delta de Kronecker.

A matriz de rigidez de elemento é então dada por:

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{li} & \mathbf{f}_{lf} \\ \mathbf{f}_{Fi} & \mathbf{f}_{Ff} \end{bmatrix}, \quad \text{com } i = 1, 2, 3, \quad j = 4, 5, 6. \quad (2.23)$$

No caso particular em que o elemento possui rigidez constante, sua matriz de rigidez elástica pode ser escrita como:

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{(1+\varphi)L^3} & \frac{6EI}{(1+\varphi)L^2} & 0 & -\frac{12EI}{(1+\varphi)L^3} & \frac{6EI}{(1+\varphi)L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{(1+\varphi)L^2} & \frac{(4+\varphi)EI}{(1+\varphi)L^2} & 0 & -\frac{6EI}{(1+\varphi)L^2} & \frac{(2-\varphi)EI}{(1+\varphi)L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{(1+\varphi)L^3} & -\frac{6EI}{(1+\varphi)L^2} & 0 & \frac{12EI}{(1+\varphi)L^3} & -\frac{6EI}{(1+\varphi)L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{(1+\varphi)L^2} & \frac{(2-\varphi)EI}{(1+\varphi)L} & 0 & -\frac{6EI}{(1+\varphi)L^2} & \frac{(4+\varphi)EI}{(1+\varphi)L^2} \end{bmatrix}, \quad (2.24)$$

onde

$$\varphi = \frac{12EI\chi}{GAL^2} \quad (2.25)$$

### 2.2.3 Matriz de Massa de Elemento

As expressões gerais para os coeficientes da matriz de massa são obtidas das ações de engastamento em razão da distribuição de forças inerciais no elemento devido a imposição de acelerações unitárias nos graus de liberdade. Considerando o elemento de pórtico plano deformado mostrado na Figura 2.5, tem-se:

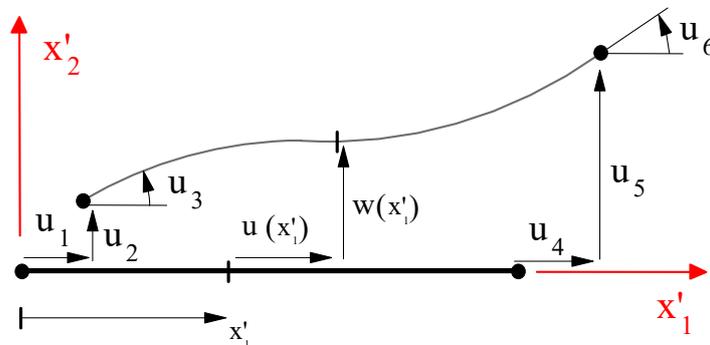


Figura 2.5 – Elemento deformado

O campo de deslocamentos do elemento é escrito em termos dos deslocamentos nodais  $u_i$  utilizando de funções de forma  $\phi_i(x'_1)$ , que são dadas por:

$$u(x'_1) = \phi_1(x'_1) \cdot u_1 + \phi_4(x'_1) \cdot u_4, \quad (2.26a)$$

$$w(x'_1) = \phi_2(x'_1) \cdot u_2 + \phi_3(x'_1) \cdot u_3 + \phi_5(x'_1) \cdot u_5 + \phi_6(x'_1) \cdot u_6, \quad (2.26b)$$

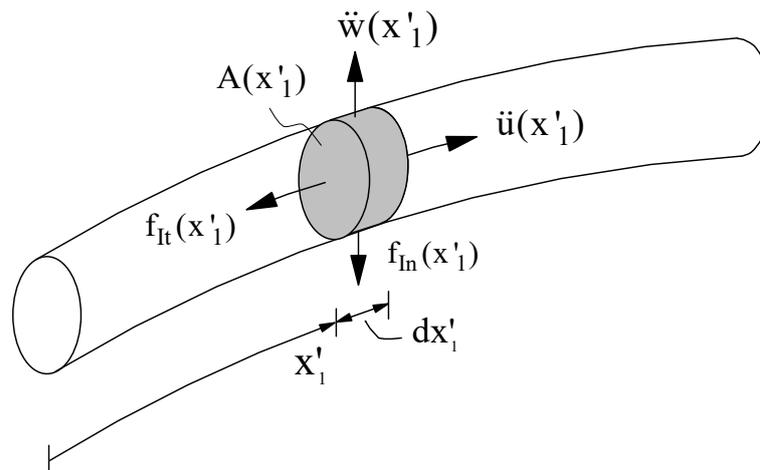
onde  $u(x'_1)$  e  $w(x'_1)$  são os campos de deslocamentos axial e transversal respectivamente, em função de  $x'_1$ .

A força inercial é definida como sendo o produto da aceleração pela massa e ocorre na direção oposta à aceleração. No elemento de pórtico a força inercial é distribuída no elemento e corresponde a uma função dada pelo produto da massa por unidade de comprimento pelo campo de acelerações ao longo do elemento. O infinitesimal de massa  $dM(x'_1)$  em um determinado ponto  $x'_1$  do elemento, é dado por:

$$dM(x'_1) = \rho(x'_1) \cdot A(x'_1) \cdot dx'_1 \quad (2.27)$$

onde  $\rho(x'_1)$  e  $A(x'_1)$  são, respectivamente, a massa específica e a área da seção transversal do elemento em um determinado ponto  $x'_1$ . A distribuição de massa ao longo do comprimento do elemento  $m(x'_1)$  é então:

$$m(x'_1) = \left| \frac{dM(x'_1)}{dx'_1} \right| = \rho(x'_1) \cdot A(x'_1) \quad (2.28)$$



**Figura 2.6 – Forças Inerciais**

A força inercial é escrita em duas parcelas, uma tangencial ao elemento,  $f_{It}$ , associada ao campo de acelerações axial, e uma normal ao elemento,  $f_{In}$ , associada ao campo de acelerações transversal, conforme Figura 2.6, resultando nas expressões:

$$f_{It}(x'_1) = -m(x'_1) \cdot \ddot{u}(x'_1) \quad (2.29a)$$

$$f_{In}(x'_1) = -m(x'_1) \cdot \ddot{w}(x'_1) \quad (2.29b)$$

Escrevendo o campo de acelerações como sendo a segunda derivada do campo de deslocamentos em relação ao tempo, obtém-se:

$$f_{It}(x'_1) = -m(x'_1) \frac{\partial^2}{\partial t^2} [u(x'_1)], \quad (2.30a)$$

$$f_{In}(x'_1) = -m(x'_1) \frac{\partial^2}{\partial t^2} [w(x'_1)], \quad (2.30b)$$

logo,

$$f_{It}(x'_1) = -m(x'_1) \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\phi_1(x'_1) \cdot u_1 + \phi_4(x'_1) \cdot u_4], \quad (2.31a)$$

$$f_{In}(x'_1) = -m(x'_1) \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\phi_2(x'_1) \cdot u_2 + \phi_3(x'_1) \cdot u_3 + \phi_5(x'_1) \cdot u_5 + \phi_6(x'_1) \cdot u_6]. \quad (2.31b)$$

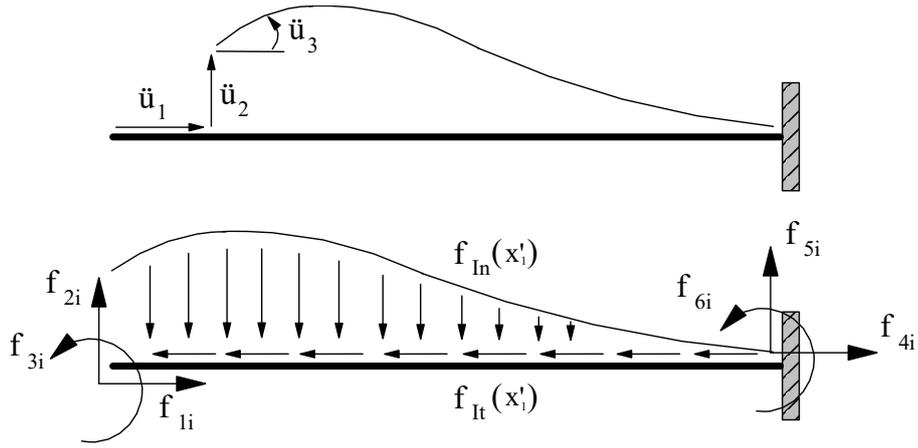
Por fim, as forças inerciais distribuídas no elemento podem ser escritas em termos das acelerações nodais, na seguinte forma:

$$f_{It}(x'_1) = -m(x'_1) \cdot \phi_1(x'_1) \cdot \ddot{u}_1 - m(x'_1) \cdot \phi_4(x'_1) \cdot \ddot{u}_4, \quad (2.32a)$$

$$f_{In}(x'_1) = -m(x'_1) \cdot \phi_2(x'_1) \cdot \ddot{u}_2 - m(x'_1) \cdot \phi_3(x'_1) \cdot \ddot{u}_3 - m(x'_1) \cdot \phi_5(x'_1) \cdot \ddot{u}_5 - m(x'_1) \cdot \phi_6(x'_1) \cdot \ddot{u}_6. \quad (2.32b)$$

Os coeficientes da matriz de massa serão obtidos de forma análoga ao vetor de cargas nodais equivalentes. Conforme os dois casos descritos acima, tem-se:

**Caso I:** Considera-se aqui apenas o nó final (nó direito) restringido, isto é,  $\ddot{u}_4 = \ddot{u}_5 = \ddot{u}_6 = 0$  (vide Figura 2.7).



**Figura 2.7 – Forças Inerciais no Elemento - Caso I**

Para a solução do sistema de equações do Caso I, Equação (2.11), é necessário determinar os termos dos vetores  $\mathbf{F}_0^{(1)}$  e  $\mathbf{u}_{10}$ .

Os termos do vetor  $\mathbf{u}_{10}$  são calculados de acordo com a Equação (2.19), onde  $N'_0(x'_1)$ ,  $Q'_0(x'_1)$  e  $M'_0(x'_1)$  são obtidos com a Equação (2.20) e para este caso em que as cargas de elemento são as forças inerciais, tem-se:

$$\begin{aligned}
 N'_0(x'_1) &= -\int_0^{x'_1} f_{It}(\xi) d\xi; & Q'_0(x'_1) &= \int_0^{x'_1} f_{In}(\xi) d\xi; \\
 M'_0(x'_1) &= \int_0^{x'_1} (x'_1 - \xi) \cdot f_{In}(\xi) d\xi
 \end{aligned}
 \tag{2.33}$$

Para  $N'_0(x'_1)$ , com  $\ddot{u}_4 = 0$ , tem-se:

$$N'_0(x'_1) = -\int_0^{x'_1} [-m(\xi) \cdot \phi_1(\xi) \cdot \ddot{u}_1] d\xi = \mu_{11}(x'_1) \cdot \ddot{u}_1,
 \tag{2.34}$$

onde,

$$\mu_{11}(x'_1) = \int_0^{x'_1} m(\xi) \cdot \phi_1(\xi) \cdot d\xi = \int_0^{x'_1} \rho(\xi) \cdot A(\xi) \cdot \phi_1(\xi) \cdot d\xi.
 \tag{2.35}$$

Para  $Q'_0(x'_1)$ , com  $\ddot{u}_5 = \ddot{u}_6 = 0$ , tem-se:

$$\begin{aligned}
 Q'_0(x'_1) &= \int_0^{x'_1} [-m(\xi) \cdot \phi_2(\xi) \cdot \ddot{u}_2 - m(\xi) \cdot \phi_3(\xi) \cdot \ddot{u}_3] d\xi, \\
 Q'_0(x'_1) &= -\mu_{22}(x'_1) \cdot \ddot{u}_2 - \mu_{23}(x'_1) \cdot \ddot{u}_3
 \end{aligned}
 \tag{2.36}$$

onde

$$\mu_{2j}(x'_1) = \int_0^{x'_1} \rho(\xi) \cdot A(\xi) \cdot \phi_j(\xi) \cdot d\xi, \quad \text{para } j = 2, 3. \quad (2.37)$$

Para  $M'_0(x'_1)$ , com  $\ddot{u}_5 = \ddot{u}_6 = 0$ , tem-se:

$$M'_0(x'_1) = \int_0^{x'_1} (x'_1 - \xi) [-m(\xi) \cdot \phi_2(\xi) \cdot \ddot{u}_2 - m(\xi) \cdot \phi_3(\xi) \cdot \ddot{u}_3] d\xi, \quad (2.38)$$

em que podemos escrever na forma:

$$M'_0(x'_1) = [-x'_1 \cdot \mu_{22}(x'_1) + \mu_{32}(x'_1)] \ddot{u}_2 + [-x'_1 \cdot \mu_{23}(x'_1) + \mu_{33}(x'_1)] \ddot{u}_3, \quad (2.39)$$

onde,

$$\mu_{3j}(x'_1) = \int_0^{x'_1} \xi \cdot \rho(\xi) \cdot A(\xi) \cdot \phi_j(\xi) \cdot d\xi, \quad \text{para } j = 2, 3. \quad (2.40)$$

De posse das expressões dos esforços internos escritos em termos de acelerações nodais, pode-se substituí-las na Equação (2.19) para obter os termos do vetor  $\mathbf{u}_{10}$ , resultando nas seguintes expressões:

$$\mathbf{u}_{10} = \mathbf{a}_{11}^{(m)} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_1; \quad \mathbf{u}_{20} = \mathbf{a}_{22}^{(m)} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_2 + \mathbf{a}_{23}^{(m)} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_3; \quad \mathbf{u}_{30} = \mathbf{a}_{32}^{(m)} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_2 + \mathbf{a}_{33}^{(m)} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_3, \quad (2.41)$$

onde,

$$\mathbf{a}_{11}^{(m)} = -\int_L \frac{\mu_{11}(x'_1)}{EA(x'_1)} dx'_1, \quad (2.42a)$$

$$\mathbf{a}_{2k}^{(m)} = -\int_L \left[ \frac{x'_1 [x'_1 \mu_{2k}(x'_1) - \mu_{3k}(x'_1)]}{EI(x'_1)} + \frac{\chi \mu_{2k}(x'_1)}{GA(x'_1)} \right] dx'_1; \quad \text{para } k = 2, 3, \quad (2.42b)$$

$$\mathbf{a}_{3k}^{(m)} = -\int_L \frac{x'_1 \mu_{2k}(x'_1) - \mu_{3k}(x'_1)}{EI(x'_1)} dx'_1. \quad (2.42c)$$

A Equação (2.41) pode ser organizada da seguinte forma:

$$\mathbf{u}_{10} = \mathbf{A}_{\Pi}^{(m)} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{\Pi}, \quad (2.43)$$

ou ainda na forma:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{10} \\ \mathbf{u}_{20} \\ \mathbf{u}_{30} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11}^{(m)} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{a}_{22}^{(m)} & \mathbf{a}_{23}^{(m)} \\ 0 & \mathbf{a}_{32}^{(m)} & \mathbf{a}_{33}^{(m)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_{1i} \\ \ddot{\mathbf{u}}_{2i} \\ \ddot{\mathbf{u}}_{3i} \end{Bmatrix}, \quad (2.44)$$

Os termos do vetor  $\mathbf{F}_0^{(I)}$  são calculados de acordo com a Equação (2.18) e para este caso, tem-se para  $F_{10}^{(I)}$ , com  $\ddot{u}_4 = 0$ ,

$$F_{10}^{(I)} = \int_0^L f_{It}(x'_1) \cdot dx'_1 = \int_0^L [-m(x'_1) \cdot \phi_1(x'_1) \cdot \ddot{u}_1] dx'_1 = -\mu_{11}(L) \cdot \ddot{u}_1. \quad (2.45)$$

Para  $F_{20}^{(I)}$ , com  $\ddot{u}_5 = \ddot{u}_6 = 0$ ,

$$F_{20}^{(I)} = \int_0^L f_{In}(x'_1) \cdot dx'_1 = \int_0^L [-m(x'_1) \cdot \phi_2(x'_1) \cdot \ddot{u}_2 - m(x'_1) \cdot \phi_3(x'_1) \cdot \ddot{u}_3] dx'_1. \quad (2.46)$$

$$F_{20}^{(I)} = -\mu_{22}(L) \cdot \ddot{u}_2 - \mu_{23}(L) \cdot \ddot{u}_3$$

Por fim, para  $F_{30}^{(I)}$ , tem-se:

$$F_{30}^{(I)} = \int_0^L (x'_1 - L) [-m(x'_1) \cdot \phi_2(x'_1) \cdot \ddot{u}_2 - m(x'_1) \cdot \phi_3(x'_1) \cdot \ddot{u}_3] dx'_1. \quad (2.47)$$

$$F_{30}^{(I)} = [L \cdot \mu_{22}(L) - \mu_{32}(L)] \ddot{u}_2 + [L \cdot \mu_{23}(L) - \mu_{33}(L)] \ddot{u}_3$$

Neste caso, as Equações (2.45), (2.46) e (2.47) são dadas na forma:

$$\begin{Bmatrix} F_{10}^{(I)} \\ F_{20}^{(I)} \\ F_{30}^{(I)} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -L & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mu_{11}(L) & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{22}(L) & \mu_{23}(L) \\ 0 & \mu_{32}(L) & \mu_{33}(L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_{1i} \\ \ddot{\mathbf{u}}_{2i} \\ \ddot{\mathbf{u}}_{3i} \end{Bmatrix}, \quad (2.48)$$

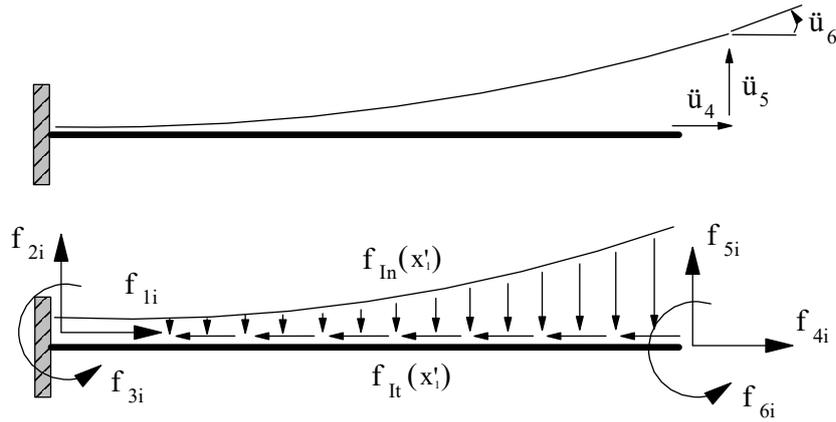
ou ainda por:

$$\mathbf{F}_0^{(I)} = -\mathbf{E}_{II} \cdot \mathbf{G}_{II} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{II}, \quad (2.49)$$

onde,

$$\mathbf{G}_{II} = \begin{bmatrix} \mu_{11}(L) & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{22}(L) & \mu_{23}(L) \\ 0 & \mu_{32}(L) & \mu_{33}(L) \end{bmatrix}. \quad (2.50)$$

**Caso II:** Considera-se apenas o nó final (nó direito) restringido, isto é,  $\ddot{u}_1 = \ddot{u}_2 = \ddot{u}_3 = 0$ , conforme a Figura 2.8.



**Figura 2.8** – Forças Inerciais no Elemento - Caso II

De modo análogo ao Caso I, para a solução do sistema de equações do Caso II, Equação (2.12), também é necessário determinar os termos dos vetores  $\mathbf{F}_0^{(II)}$  e  $\mathbf{u}_{F0}$ . O cálculo dos termos do vetor  $\mathbf{u}_{F0}$  é dado por:

$$u_{40} = \int_0^L \frac{N_0''}{EA} dx_1'; \quad u_{50} = \int_0^L \frac{(L-x_1')M_0''}{EI} dx_1' - \int_0^L \frac{\chi \cdot Q_0''}{GA} dx_1'; \quad u_{60} = \int_0^L \frac{M_0''}{EI} dx_1', \quad (2.51)$$

As expressões para os esforços solicitantes para o Caso II,  $N_0''(x_1')$ ,  $Q_0''(x_1')$  e  $M_0''(x_1')$ , são obtidas com a nova configuração da estrutura e são dadas por:

$$\begin{aligned} N_0''(x_1') &= \int_{x_1'}^L f_{lt}(\xi) d\xi; & Q_0''(x_1') &= - \int_{x_1'}^L f_{ln}(\xi) d\xi; \\ M_0''(x_1') &= \int_{x_1'}^L (\xi - x_1') f_{ln}(\xi) d\xi \end{aligned}, \quad (2.52)$$

e resultam em:

$$\begin{aligned} N_0''(x_1') &= -\mu_{44}(x_1') \cdot \ddot{u}_4 \\ Q_0''(x_1') &= \mu_{55}(x_1') \cdot \ddot{u}_5 + \mu_{56}(x_1') \cdot \ddot{u}_6 \\ M_0''(x_1') &= [x_1' \cdot \mu_{55}(x_1') - \mu_{65}(x_1')] \ddot{u}_5 + [x_1' \cdot \mu_{56}(x_1') - \mu_{66}(x_1')] \ddot{u}_6 \end{aligned}, \quad (2.53)$$

com

$$\begin{aligned}
\mu_{44}(x'_1) &= \int_{x'_1}^L \rho(\xi) \cdot A(\xi) \cdot \phi_4(\xi) \cdot d\xi \\
\mu_{5j}(x'_1) &= \int_{x'_1}^L \rho(\xi) \cdot A(\xi) \cdot \phi_j(\xi) \cdot d\xi, \quad \text{para } j = 5, 6. \\
\mu_{6j}(x'_1) &= \int_{x'_1}^L \xi \cdot \rho(\xi) \cdot A(\xi) \cdot \phi_j(\xi) \cdot d\xi
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Substituindo (2.53) em (2.51), obtém-se:

$$u_{40} = a_{44}^{(m)} \cdot \ddot{u}_4; \quad u_{50} = a_{55}^{(m)} \cdot \ddot{u}_5 + a_{56}^{(m)} \cdot \ddot{u}_6; \quad u_{60} = a_{65}^{(m)} \cdot \ddot{u}_5 + a_{66}^{(m)} \cdot \ddot{u}_6, \tag{2.55}$$

onde

$$\begin{aligned}
a_{44}^{(m)} &= -\int_L \frac{\mu_{44}(x'_1)}{EA(x'_1)} dx'_1; \\
a_{5k}^{(m)} &= \int_L \frac{(L - x'_1) [x'_1 \cdot \mu_{5k}(x'_1) - \mu_{6k}(x'_1)]}{EI(x'_1)} + \frac{\chi \cdot \mu_{5k}(x'_1)}{GA(x'_1)} dx'_1; \quad \text{para } k = 5, 6. \\
a_{6k}^{(m)} &= \int_L \frac{x'_1 \cdot \mu_{5k}(x'_1) - \mu_{6k}(x'_1)}{EI(x'_1)} dx'_1
\end{aligned} \tag{2.56}$$

A Equação (2.55) pode ser organizadas da seguinte forma:

$$\mathbf{u}_{F0} = \mathbf{A}_{FF}^{(m)} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{FF}, \tag{2.57}$$

ou ainda na forma:

$$\begin{Bmatrix} u_{40} \\ u_{50} \\ u_{60} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{44}^{(m)} & 0 & 0 \\ 0 & a_{55}^{(m)} & a_{56}^{(m)} \\ 0 & a_{65}^{(m)} & a_{66}^{(m)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_{4f} \\ \ddot{u}_{5f} \\ \ddot{u}_{6f} \end{Bmatrix}. \tag{2.58}$$

Os termos do vetor  $\mathbf{F}_0^{(II)}$  são calculados de acordo com a Equação (2.18), porém com a estrutura na configuração do Caso II tem-se uma nova distribuição de forças inerciais, já que  $\ddot{u}_1 = \ddot{u}_2 = \ddot{u}_3 = 0$ , resultando em:

$$\begin{aligned}
F_{10}^{(II)} &= -\mu_{44}(L) \cdot \ddot{u}_4 \\
F_{20}^{(II)} &= -\mu_{55}(L) \cdot \ddot{u}_5 - \mu_{56}(L) \cdot \ddot{u}_6, \\
F_{30}^{(II)} &= [L \cdot \mu_{55}(L) - \mu_{65}(L)] \ddot{u}_5 + [L \cdot \mu_{56}(L) - \mu_{66}(L)] \ddot{u}_6
\end{aligned} \tag{2.59}$$

podendo ser organizadas da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{10}^{(II)} \\ \mathbf{F}_{20}^{(II)} \\ \mathbf{F}_{30}^{(II)} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -L & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mu_{44}(L) & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{55}(L) & \mu_{56}(L) \\ 0 & \mu_{65}(L) & \mu_{66}(L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_{4f} \\ \ddot{\mathbf{u}}_{5f} \\ \ddot{\mathbf{u}}_{6f} \end{Bmatrix}, \quad (2.60)$$

ou ainda na forma:

$$\mathbf{F}_0^{(II)} = -\mathbf{E}_{II} \cdot \mathbf{G}_{FF} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{FF}, \quad (2.61)$$

onde

$$\mathbf{G}_{FF} = \begin{bmatrix} \mu_{44}(L) & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{55}(L) & \mu_{56}(L) \\ 0 & \mu_{65}(L) & \mu_{66}(L) \end{bmatrix}. \quad (2.62)$$

Assim como na obtenção das ações de engastamento, a  $i$ -ésima coluna da matriz de massa, para  $i = 1, 2, 3$  e a  $f$ -ésima coluna para  $f = 4, 5, 6$  podem ser obtidas com a solução das Equações (2.11) e (2.12) respectivamente. Utilizando das Equações (2.43) e (2.49) para  $\mathbf{u}_{10}$  e  $\mathbf{F}_0^{(I)}$  e das equações (2.57) e (2.61) para  $\mathbf{u}_{F0}$  e  $\mathbf{F}_0^{(II)}$  respectivamente, e impondo as acelerações nodais prescritos  $\ddot{\mathbf{u}}_{li}$  e  $\ddot{\mathbf{u}}_{Ff}$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{li} &= -\mathbf{A}_{II}^{-1} \cdot \mathbf{A}_{II}^{(m)} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{li}, & \mathbf{f}_{Fi} &= -\mathbf{E}_{II} \cdot \mathbf{f}_{li} + \mathbf{E}_{II} \cdot \mathbf{G}_{II} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{li}, & i &= 1, 2, 3 \\ \mathbf{f}_{Ff} &= -\mathbf{A}_{FF}^{-1} \cdot \mathbf{A}_{FF}^{(m)} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{Ff}, & \mathbf{f}_{If} &= -\mathbf{E}_{II}^{-1} \cdot \mathbf{f}_{Ff} + \mathbf{G}_{FF} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{Ff}, & f &= 4, 5, 6 \end{aligned}, \quad (2.63)$$

em que

$$\ddot{\mathbf{u}}_{li} = \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_{1i} \\ \ddot{\mathbf{u}}_{2i} \\ \ddot{\mathbf{u}}_{3i} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_{1i} \\ \delta_{2i} \\ \delta_{3i} \end{Bmatrix} \text{ para } i = 1, 2, 3; \quad \ddot{\mathbf{u}}_{Ff} = \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_{4f} \\ \ddot{\mathbf{u}}_{5f} \\ \ddot{\mathbf{u}}_{6f} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_{4f} \\ \delta_{5f} \\ \delta_{6f} \end{Bmatrix} \text{ para } f = 4, 5, 6, \quad (2.64)$$

onde  $\delta$  é o delta de Kronecker.

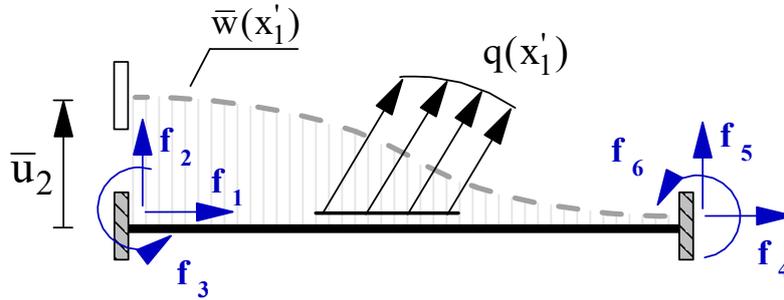
A matriz de massa de elemento é então dada por:

$$\mathbf{M}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{li} & \mathbf{f}_{If} \\ \mathbf{f}_{Fi} & \mathbf{f}_{Ff} \end{bmatrix}, \quad \text{com } i = 1, 2, 3, \quad j = 4, 5, 6. \quad (2.65)$$

## 2.3 Método Alternativo

O objetivo desta Seção é apresentar um método alternativo, mais conveniente do ponto de vista da implementação computacional, para obtenção das ações de engastamento e dos coeficientes da matriz de massa do elemento de pórtico, com base na aplicação direta do PTV, dado que as funções de forma do elemento (segundo teoria de Timoshenko ou outra

qualquer) sejam conhecidas. Para isso, considera-se o elemento sob o qual atua um carregamento genérico, conforme Figura 2.9, onde  $f_i$  são as reações de engastamento do elemento submetido às ações externas (com  $i=1, 2, 3, 4, 5, 6$ ).



**Figura 2.9** – Aplicação do PTV para ações de engastamento

Toma-se como exemplo o cálculo da reação  $f_2$ , força transversal da extremidade esquerda do elemento, no sistema acima (Figura 2.9). Um deslocamento virtual unitário é aplicado na direção de  $f_2$  de modo que o campo de deslocamentos virtuais tenha o mesmo modo da função de forma  $\phi_2(x'_1)$  e é dado por:

$$\bar{w}(x'_1) = \phi_2(x'_1) \cdot \bar{u}_2, \quad (2.66)$$

O trabalho realizado pelas forças reais e o campo de deslocamentos virtuais, chamado aqui de  $W_A$ , é igual ao trabalho realizado pelas forças que surgem devido o deslocamento virtual e campo de deslocamentos reais, chamado aqui de  $W_B$ ,

$$W_A = W_B. \quad (2.67)$$

Nota-se que as forças e momentos que surgem devido ao deslocamento virtual ocorrem nos apoios e, devido aos engastamentos, são nulos os correspondentes deslocamentos e rotações reais, resultando em:

$$W_B = 0, \quad (2.68)$$

Portanto, o trabalho das forças reais com os deslocamentos virtuais também deve ser nulo, assim obtém-se:

$$W_A = f_2 \cdot \bar{u}_2 + \int_L q_n(x'_1) \cdot \bar{w}(x'_1) \cdot dx'_1 = 0, \quad (2.69)$$

com o campo de deslocamentos escrito conforme Equação (2.66), tem-se:

$$f_2 \cdot \bar{u}_2 + \int_L q_n(x'_1) \cdot \phi_2(x'_1) \cdot \bar{u}_2 \cdot dx'_1 = 0, \quad (2.70)$$

Dessa forma, chega-se à expressão da reação desejada em função da parcela do carregamento normal ao elemento:

$$f_2 = -\int_L q_n(x'_1) \cdot \phi_2(x'_1) \cdot dx'_1 \quad (2.71)$$

O resultado obtido pode ser generalizado para:

$$\begin{aligned} f_i &= -\int_L q_t(x'_1) \cdot \phi_i(x'_1) \cdot dx'_1 & i = 1, 4 \\ f_j &= -\int_L q_n(x'_1) \cdot \phi_j(x'_1) \cdot dx'_1 & j = 2, 3, 5, 6 \end{aligned} \quad (2.72)$$

O processo pode ser aplicado na obtenção dos coeficientes da matriz de massa do elemento. Ao aplicarmos uma aceleração  $\ddot{u}_j$  surgem reações do tipo:

$$f_i = m_{ij} \cdot \ddot{u}_j \quad i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \quad (2.73)$$

e surgem forças inerciais distribuídas sobre o elemento na forma:

$$\begin{aligned} q_t(x'_1) &= -\rho(x'_1) \cdot A(x'_1) \cdot \phi_i(x'_1) \cdot \ddot{u}_i & i = 1, 4 \\ q_n(x'_1) &= -\rho(x'_1) \cdot A(x'_1) \cdot \phi_j(x'_1) \cdot \ddot{u}_j & j = 2, 3, 5, 6' \end{aligned} \quad (2.74)$$

utilizando de (2.73) e (2.74), podendo escrever a Equação (2.71) na forma:

$$\begin{aligned} m_{ij} \cdot \ddot{u}_j &= \int_L \rho(x'_1) \cdot A(x'_1) \cdot \phi_i(x'_1) \cdot \phi_j(x'_1) \cdot \ddot{u}_j \cdot dx'_1 & i, j = 1, 4 \\ m_{ij} \cdot \ddot{u}_j &= \int_L \rho(x'_1) \cdot A(x'_1) \cdot \phi_i(x'_1) \cdot \phi_j(x'_1) \cdot \ddot{u}_j \cdot dx'_1 & i, j = 2, 3, 5, 6' \end{aligned} \quad (2.75)$$

resultando em

$$m_{ij} = \int_L \rho(x'_1) \cdot A(x'_1) \cdot \phi_i(x'_1) \cdot \phi_j(x'_1) \cdot dx'_1 \quad i, j = 1, 4 \quad \text{e} \quad i, j = 2, 3, 5, 6, \quad (2.76)$$

Para elementos cuja rigidez e distribuição de massa são constantes ao longo do comprimento, utilizando das funções de forma de Timoshenko, propostas por Araújo e Ribeiro (2020) e descritas na Seção 2.4, obtém-se a seguinte matriz de massa:

$$M_e = \frac{\rho AL}{840} \begin{bmatrix} 280 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ \frac{312 + 588\varphi + 280\varphi^2}{(1+\varphi)^2} & \frac{(44 + 77\varphi + 35\varphi^2)L}{(1+\varphi)^2} & 0 & \frac{108 + 252\varphi + 140\varphi^2}{(1+\varphi)^2} & -\frac{(26 + 63\varphi + 35\varphi^2)L}{(1+\varphi)^2} \\ & \frac{(8 + 14\varphi + 7\varphi^2)L^2}{(1+\varphi)^2} & 0 & \frac{(26 + 63\varphi + 35\varphi^2)L}{(1+\varphi)^2} & -\frac{(6 + 14\varphi + 7\varphi^2)L^2}{(1+\varphi)^2} \\ & & 280 & 0 & 0 \\ \text{SIMÉTRICO} & & & \frac{312 + 588\varphi + 280\varphi^2}{(1+\varphi)^2} & -\frac{(44 + 77\varphi + 35\varphi^2)L}{(1+\varphi)^2} \\ & & & & \frac{(8 + 14\varphi + 7\varphi^2)L^2}{(1+\varphi)^2} \end{bmatrix}, \quad (2.77)$$

onde

$$\varphi = \frac{12EI\chi}{GAL^2} \quad (2.78)$$

## 2.4 Funções de Forma de Timoshenko para Elementos com Rigidez Variável

O objetivo desta seção é apresentar um processo proposto por Araújo e Ribeiro (2020), para determinar as funções de forma "exatas" de Timoshenko para elementos cuja rigidez varia em função do comprimento. O efeito do cisalhamento é considerado levando em consideração um valor médio de tensão de cisalhamento constante, determinado com base no conceito de fatores de correção de cisalhamento.

Por definição, as funções de forma de Timoshenko  $\phi_i(x'_1)$  correspondem ao modo exato de deformação produzido por um deslocamento na extremidade na direção do  $i$ -ésimo grau de liberdade (com  $i=1, \dots, 6$ ), conforme representado na Figura 2.10.

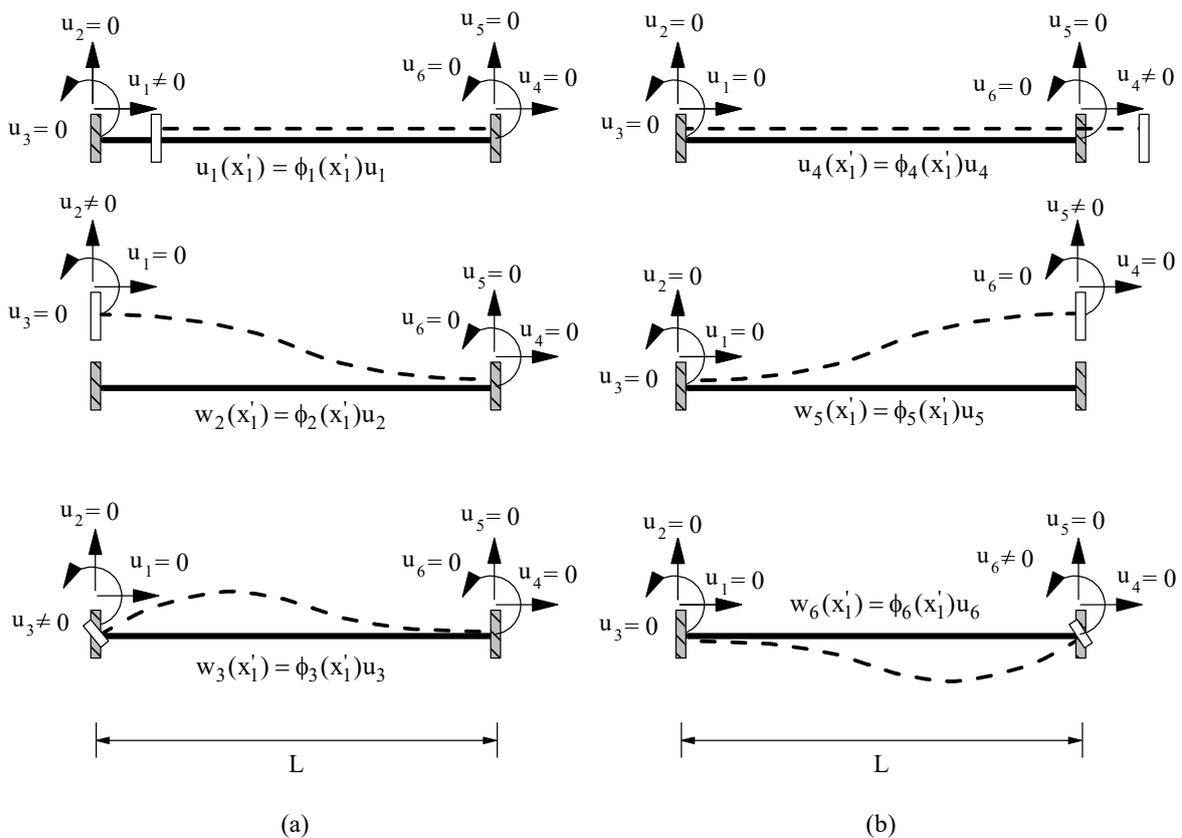
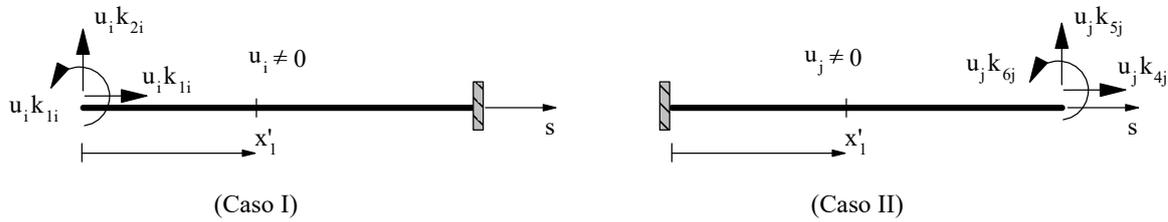


Figura 2.10 – Modos de deformação do elemento

O campo de deslocamentos produzido por um deslocamento nodal na direção do  $i$ -ésimo grau de liberdade é proporcional ao  $i$ -ésimo modo de deformação. Para os modos de deformação axiais tem-se campos de deslocamentos axiais do tipo  $u_i(x'_1)$  e para modos de deslocamentos transversais temos campos de deslocamentos transversais do tipo  $w_i(x'_1)$ , dados por

$$\begin{aligned} u_i(x'_1) &= \phi_i(x'_1) \cdot u_i & i &= 1, 4 \\ w_i(x'_1) &= \phi_i(x'_1) \cdot u_i & i &= 2, 3, 5, 6 \end{aligned} \quad (2.79)$$

Para obtenção das funções de forma exatas de Timoshenko para um elemento de rigidez variável, conforme descrito anteriormente, dois casos são considerados, conforme ilustrado na Figura 2.11.



**Figura 2.11** – Casos considerados para obtenção das funções de forma

Ao impormos um deslocamento na direção do  $i$ -ésimo grau de liberdade, ações de engastamento proporcionais a esse deslocamento surgem no elemento e podem ser escritas em termos dos coeficientes de rigidez deste elemento, conforme segue:

$$f_j = u_i \cdot k_{ji} \quad i, j = 1, \dots, 6, \quad (2.80)$$

Os esforços solicitantes que surgem são:

$$\begin{aligned} N_i &= -k_{1i}u_i, & Q_i &= k_{2i}u_i, & M_i &= k_{2i}u_ix'_1 - k_{3i}u_i, & (\text{Caso I, } i=1,2,3) \\ N_i &= k_{4i}u_i, & Q_i &= -k_{5i}u_i, & M_i &= k_{5i}u_i(L-x'_1) + k_{6i}u_i, & (\text{Caso II, } i=4,5,6) \end{aligned}, \quad (2.81)$$

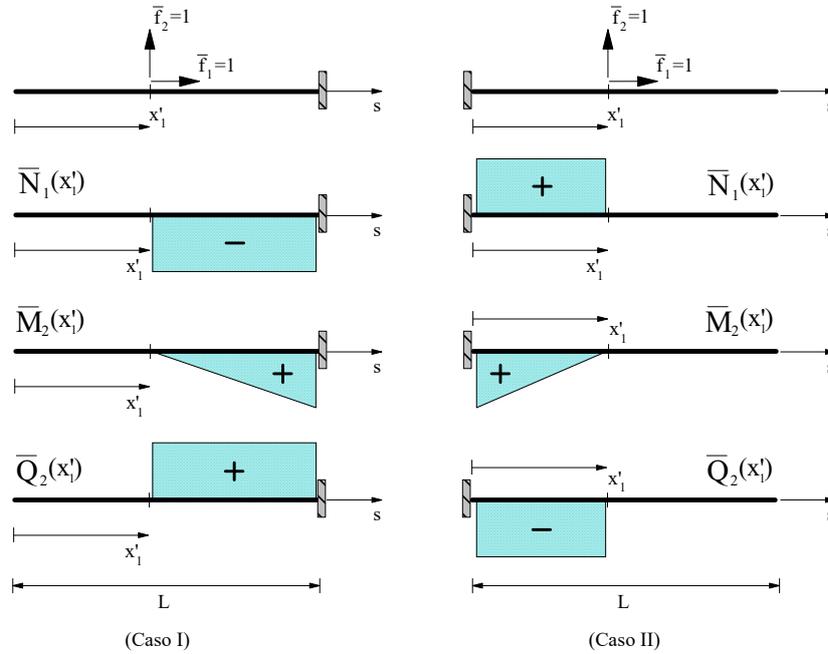
onde  $N_i$ ,  $Q_i$  e  $M_i$  são, respectivamente, o esforço normal, o esforço cortante e o momento fletor desenvolvidos ao longo do elemento devido o deslocamento  $u_i$ . Nota-se que:

$$\begin{aligned} k_{2i} &= k_{3i} = k_{5i} = k_{6i} = 0 & \text{para } i &= 1, 4 \\ k_{1i} &= k_{4i} = 0 & \text{para } i &= 2, 3, 5, 6 \end{aligned} \quad (2.82)$$

resultando em

$$\begin{aligned} Q_i &= M_i = 0 & \text{para } i &= 1, 4 \\ N_i &= 0 & \text{para } i &= 2, 3, 5, 6 \end{aligned} \quad (2.83)$$

Para a obtenção dessas funções de forma, o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) pode ser usado. Aqui, para determinar o campo de deslocamentos axial e transversal no elemento produzidos pelo deslocamento da direção  $i$ -ésimo grau de liberdade, aplicam-se forças virtuais na direção axial e transversal em pontos arbitrários do elemento, conforme a Figura 2.12.



**Figura 2.12** – Esforços solicitantes virtuais

Na Figura 2.12, acima,  $\bar{f}_1$  e  $\bar{f}_2$  são as forças virtuais axial e transversal aplicadas em pontos arbitrários do elemento. A força virtual  $\bar{f}_1$  produz apenas esforço normal dado por  $\bar{N}_1$ , já a força virtual  $\bar{f}_2$  gera momento fletor e esforço cortante no elemento, dados por  $\bar{M}_2$  e  $\bar{Q}_2$  respectivamente.

Os esforços solicitantes virtuais para o Caso I são então dados por:

$$\begin{aligned} \bar{N}_1 &= -H(s - x'_1) & \bar{Q}_1 &= 0 & \bar{M}_1 &= 0 \\ \bar{N}_2 &= 0 & \bar{Q}_2 &= +H(s - x'_1) & \bar{M}_2 &= +H(s - x'_1)(s - x'_1) \end{aligned} \quad (2.84)$$

e para o caso II, são:

$$\begin{aligned} \bar{N}_1 &= +H(x'_1 - s) & \bar{Q}_1 &= 0 & \bar{M}_1 &= 0 \\ \bar{N}_2 &= 0 & \bar{Q}_2 &= -H(x'_1 - s) & \bar{M}_2 &= +H(x'_1 - s)(x'_1 - s) \end{aligned} \quad (2.85)$$

onde  $H(x'_1)$  é a função de Heaviside.

O campo de deslocamentos pode ser obtido da expressão:

$$\begin{aligned}\bar{f}_1 \cdot u_i(x'_1) &= \int_L \frac{\bar{N}_1 \cdot N_i}{EA} ds + \int_L \frac{\bar{M}_1 \cdot M_i}{EI} ds + \int_L \frac{\chi \cdot \bar{Q}_1 \cdot Q_i}{GA} ds \\ \bar{f}_2 \cdot w_i(x'_1) &= \int_L \frac{\bar{N}_2 \cdot N_i}{EA} ds + \int_L \frac{\bar{M}_2 \cdot M_i}{EI} ds + \int_L \frac{\chi \cdot \bar{Q}_2 \cdot Q_i}{GA} ds\end{aligned}\quad (2.86)$$

com  $i=1, 2, 3, 4, 5, 6$ .

Aplicando, na Equação (2.86), as expressões (2.83), (2.84) e (2.85), obtêm-se as expressões:

$$\begin{aligned}\bar{f}_1 \cdot u_i(x'_1) &= \int_L \frac{\bar{N}_1 \cdot N_i}{EA} ds & i = 1, 4 \\ \bar{f}_2 \cdot w_i(x'_1) &= \int_L \frac{\bar{M}_2 \cdot M_i}{EI} ds + \int_L \frac{\chi \cdot \bar{Q}_2 \cdot Q_i}{GA} ds & i = 2, 3, 5, 6\end{aligned}\quad (2.87)$$

Utilizando a Equação (2.79) e fazendo  $i = 1$  na Equação (2.87), obtêm-se a função de forma  $\phi_1(x'_1)$ . Tem-se:

$$\begin{aligned}\bar{f}_1 \cdot \phi_1(x'_1) \cdot u_1 &= \int_L \frac{\bar{N}_1 \cdot N_1}{EA} ds = \int_L \frac{-H(s-x'_1)(-k_{11}u_1)}{EA} ds = k_{11} \int_{x'_1}^L \frac{1}{EA} ds \cdot u_1 \\ \phi_1(x'_1) &= k_{11} \left[ \int_{x'_1}^L \frac{1}{EA} ds \right]\end{aligned}\quad (2.88)$$

Para  $i = 2, 3$  tem-se:

$$\begin{aligned}\bar{f}_2 \cdot \phi_i(x'_1) u_i &= \int_L \frac{\bar{M}_2 \cdot M_i}{EI} ds + \int_L \frac{\chi \cdot \bar{Q}_2 \cdot Q_i}{GA} ds \\ \phi_i(x'_1) \cdot u_i &= \int_L \frac{[+H(s-x'_1)(s-x'_1)](s \cdot k_{2i} \cdot u_i - k_{3i} \cdot u_i)}{EI} ds + \int_L \frac{\chi [+H(s-x'_1)] k_{2i} \cdot u_i}{GA} ds, (2.89) \\ \phi_i(x'_1) &= k_{2i} \left[ \int_{x'_1}^L \frac{s^2}{EI} ds \right] - (x'_1 \cdot k_{2i} + k_{3i}) \left[ \int_{x'_1}^L \frac{s}{EI} ds \right] + x'_1 \cdot k_{3i} \left[ \int_{x'_1}^L \frac{1}{EI} ds \right] + k_{2i} \left[ \int_{x'_1}^L \frac{\chi}{GA} ds \right]\end{aligned}$$

Para  $i = 4$  tem-se:

$$\begin{aligned}\bar{f}_1 \cdot \phi_4(x'_1) \cdot u_4 &= \int_L \frac{\bar{N}_1 \cdot N_4}{EA} ds = \int_L \frac{+H(x'_1-s)(k_{44} \cdot u_4)}{EA} ds = k_{44} \int_0^{x'_1} \frac{1}{EA} ds \cdot u_4 \\ \phi_4(x'_1) &= k_{44} \left[ \int_0^{x'_1} \frac{1}{EA} ds \right]\end{aligned}\quad (2.90)$$

Por fim, para  $i = 5, 6$ , tem-se:

$$\begin{aligned}
\bar{f}_2 \cdot \phi_i(x'_1) \cdot u_i &= \int_L \frac{\bar{M}_2 \cdot M_i}{EI} ds + \int_L \frac{\chi \cdot \bar{Q}_2 \cdot Q_i}{GA} ds \\
\phi_i(x'_1) &= k_{5i} \left[ \int_0^{x'_1} \frac{s^2}{EI} ds \right] - [(L + x'_1)k_{5i} + k_{6i}] \left[ \int_0^{x'_1} \frac{s}{EI} ds \right] +, \\
&+ x'_1(L \cdot k_{5i} + k_{6i}) \left[ \int_0^{x'_1} \frac{1}{EI} ds \right] + k_{5i} \left[ \int_0^{x'_1} \frac{\chi}{GA} ds \right]
\end{aligned} \tag{2.91}$$

Para elementos com rigidez constante, as funções de forma se simplificam para:

$$\phi_1(x'_1) = 1 - \frac{x'_1}{L}, \tag{2.92a}$$

$$\phi_2(x'_1) = \frac{1}{1+\varphi} \left[ 1 - 3 \left( \frac{x'_1}{L} \right)^2 + 2 \left( \frac{x'_1}{L} \right)^3 + \left( 1 - \frac{x'_1}{L} \right) \varphi \right], \tag{2.92b}$$

$$\phi_3(x'_1) = \frac{L}{1+\varphi} \left[ \frac{x'_1}{L} - 2 \left( \frac{x'_1}{L} \right)^2 + \left( \frac{x'_1}{L} \right)^3 + \frac{1}{2} \left( \frac{x'_1}{L} - \left( \frac{x'_1}{L} \right)^2 \right) \varphi \right], \tag{2.92c}$$

$$\phi_4(x'_1) = \frac{x'_1}{L}, \tag{2.92d}$$

$$\phi_5(x'_1) = \frac{1}{1+\varphi} \left[ 3 \left( \frac{x'_1}{L} \right)^2 - 2 \left( \frac{x'_1}{L} \right)^3 + \frac{x'_1}{L} \varphi \right], \tag{2.92e}$$

$$\phi_6(x'_1) = \frac{L}{1+\varphi} \left[ - \left( \frac{x'_1}{L} \right)^2 + \left( \frac{x'_1}{L} \right)^3 - \frac{1}{2} \left( \frac{x'_1}{L} - \left( \frac{x'_1}{L} \right)^2 \right) \varphi \right], \tag{2.92f}$$

$$\text{com } \varphi = \frac{12EI\chi}{GAL^2}$$

Nota-se que nas funções de forma de Timoshenko 2,3,5,6 dadas por (2.89) e (2.91), para fator de forma ao cisalhamento nulo ( $\chi = 0$ ), a parcela que considera a deformação por cisalhamento é eliminada das funções. Ao eliminar o efeito do cisalhamento, anulando o fator de forma, nas funções para o elemento de rigidez constante dada por (2.92), as funções resultantes (2.93) são idênticas aos polinômios de Hermite e atendem às condições de contorno do modelo de viga de Euler-Bernoulli, representadas aqui por  $\psi$ .

$$\psi_1(x'_1) = 1 - \frac{x'_1}{L}, \tag{2.93a}$$

$$\psi_2(x'_1) = 1 - 3\left(\frac{x'_1}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x'_1}{L}\right)^3, \quad (2.93b)$$

$$\psi_3(x'_1) = L \left[ \frac{x'_1}{L} - 2\left(\frac{x'_1}{L}\right)^2 + \left(\frac{x'_1}{L}\right)^3 \right], \quad (2.93c)$$

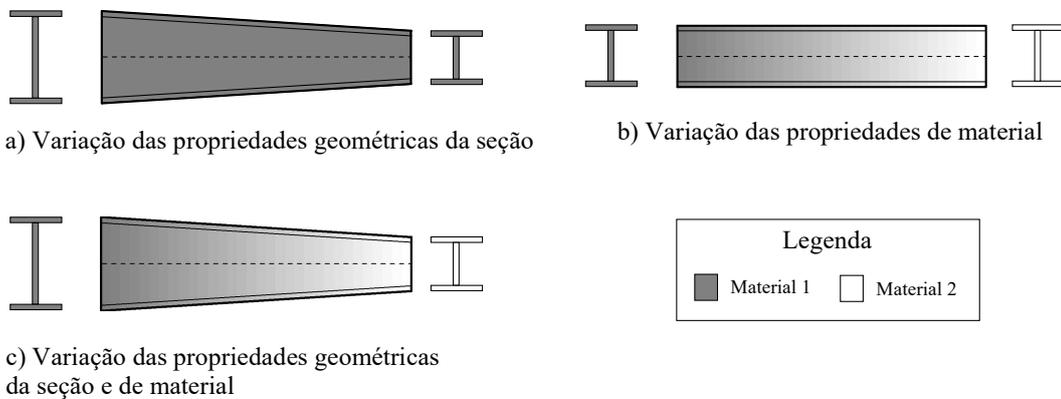
$$\psi_4(x'_1) = \frac{x'_1}{L}, \quad (2.93d)$$

$$\psi_5(x'_1) = 3\left(\frac{x'_1}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x'_1}{L}\right)^3, \quad (2.93e)$$

$$\psi_6(x'_1) = L \left[ -\left(\frac{x'_1}{L}\right)^2 + \left(\frac{x'_1}{L}\right)^3 \right]. \quad (2.93f)$$

## 2.5 Elementos com Rigidez e Distribuição de Massa Variáveis

Uma das propostas da formulação apresentada nesta dissertação é a possibilidade de modelar elementos cuja rigidez e distribuição de massa variem em função do comprimento. A variação pode ocorrer por uma mudança gradual das propriedades geométricas como área, momento de inércia e fator de forma ao cisalhamento ao decorrer do comprimento do elemento, Figura 2.13a, podendo ocorrer também por uma mudança nas propriedades do material como o módulo de elasticidade, o coeficiente de Poisson e a massa específica, Figura 2.13b, ou com a associação das duas variações, podendo até serem de ordens distintas Figura 2.13c.



**Figura 2.13** – Variação de Rigidez e Distribuição de Massa

Essas variações podem seguir leis quaisquer. No código implementado, consideram-se, porém, que essas variações sejam regidas por funções polinomiais cujo grau pode variar de zero (rigidez constante) até 4 (quártica). Chamando de  $P_n(\eta)$  a função polinomial de grau  $n$  de distribuição de alguma propriedade, obtida da interpolação de um número  $n+1$  de propriedades  $P_i$  fornecidas, tem-se:

$$P_n(\eta) = \sum_{i=1}^{n+1} P_i N_i(\eta), \quad (2.94)$$

onde  $N_i(\eta)$  é a  $i$ -ésima função de interpolação (com  $i = 1, \dots, n + 1$ ). Na Figura 2.14 apresentam-se as funções de interpolação utilizadas neste trabalho para a aproximação da variação da rigidez e da distribuição de massa no elemento.

As funções de interpolação são convenientemente mapeadas no intervalo de coordenadas naturais,  $-1 \leq \eta \leq +1$ , pois para os casos em que a rigidez e distribuição de massa não são constantes, utiliza-se o processo de integração numérica de Gauss-Legendre para a solução das integrais presentes nas várias etapas da formulação. As funções de interpolação lineares são

$$N_1(\eta) = \frac{1}{2}(1 - \eta); \quad N_2(\eta) = \frac{1}{2}(1 + \eta), \quad (2.95)$$

para interpolação quadrática, tem-se as funções de interpolação

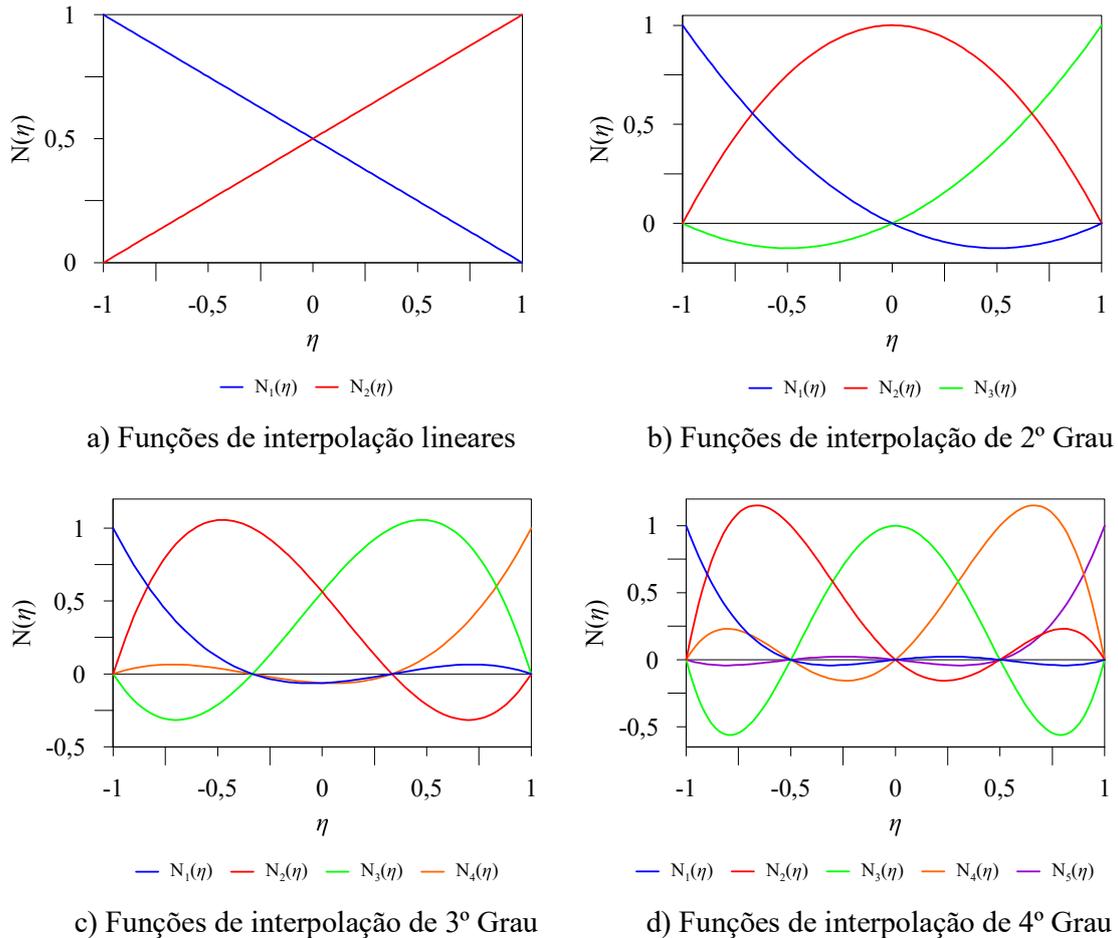
$$N_1(\eta) = \frac{1}{2}(1 - \eta)\eta; \quad N_2(\eta) = 1 - \eta^2; \quad N_3(\eta) = \frac{1}{2}(1 + \eta)\eta, \quad (2.96)$$

para interpolação com polinômio de grau 3, tem-se as funções

$$\begin{aligned} N_1(\eta) &= \frac{9}{16}(1 - \eta)\left(\eta^2 - \frac{1}{9}\right); \quad N_2(\eta) = \frac{27}{16}\left(\frac{1}{3} - \eta\right)(1 - \eta^2); \\ N_3(\eta) &= \frac{27}{16}\left(\frac{1}{3} + \eta\right)(1 - \eta^2); \quad N_4(\eta) = \frac{9}{16}(1 + \eta)\left(\eta^2 - \frac{1}{9}\right); \end{aligned} \quad (2.97)$$

por fim, para uma interpolação de quarto grau, utilizam-se as funções

$$\begin{aligned} N_1(\eta) &= -\frac{4}{6}\eta(1 - \eta)\left(\eta^2 - \frac{1}{4}\right); \quad N_2(\eta) = \frac{4}{3}\eta(1 - 2\eta)(\eta^2 - 1); \\ N_3(\eta) &= 4\left(\frac{1}{4} - \eta^2\right)(1 - \eta^2); \quad N_4(\eta) = -\frac{4}{3}\eta(1 + \eta)(\eta^2 - 1); \\ N_5(\eta) &= \frac{4}{6}\eta(1 + \eta)\left(\eta^2 - \frac{1}{4}\right); \end{aligned} \quad (2.98)$$



**Figura 2.14** – Funções de interpolação

O processo de integração numérica de Gauss-Legendre consiste em substituir a integral por um somatório da função em certos pontos do intervalo de integração e ponderado pelos seus respectivos pesos

$$I = \int_L f(x)dx = \int_{-1}^{+1} f(x(\eta))J(\eta)d\eta = \frac{L}{2} \sum_{k=1}^{npg} f(x(\eta_k))\omega_k \quad (2.99)$$

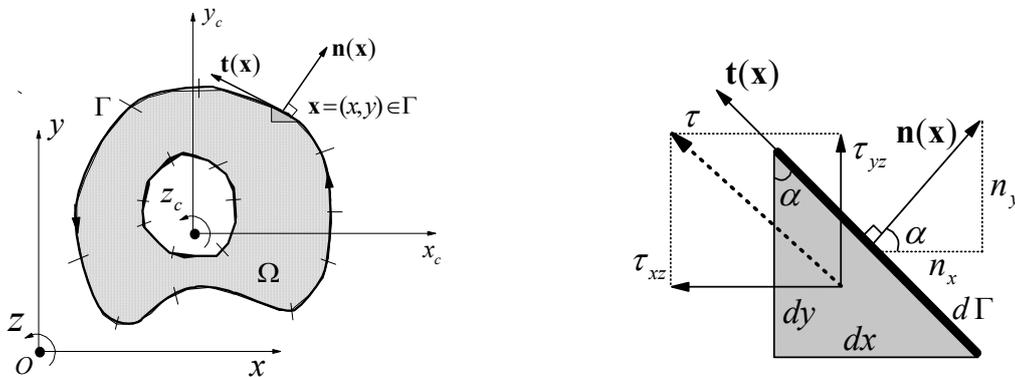
em que I é o resultado da integral, f(x) é a função que se deseja integrar,  $\eta_k$  é a abscissa do k-ésimo ponto de integração e  $\omega_k$  seu respectivo peso. Na Expressão (2.99), npg é o número de pontos de integração e J é o jacobiano da função.

### 2.5.1 Determinação das Propriedades Geométricas

Para determinar a função de variação de rigidez ou a distribuição de massa no elemento, é necessário conhecer as propriedades geométricas de uma quantidade de seções necessárias para que a interpolação descreva precisamente essa variação. Essas propriedades são a área

da seção transversal (A), o momento de inércia (I) e o fator de forma ao cisalhamento ( $\chi$ ), e podem ser prontamente fornecidas ou determinadas a partir das dimensões da seção transversal. No referido programa, considera-se uma biblioteca de seções que são do tipo retangular, “I”, “H”, circular, tubular circular e tubular retangular, cujas propriedades geométricas são determinadas analiticamente. Na Tabela 2.1 encontram-se as expressões para o fator de forma ao cisalhamento das seções disponíveis na biblioteca do programa.

Porém, para o caso de seções arbitrárias, utiliza-se de uma formulação baseada em integrais de contorno para calcular suas propriedades geométricas, onde a malha de contorno da seção deve ser fornecida. Em termos das grandezas ilustradas na Figura 2.15, as expressões para o cálculo das propriedades geométricas da seção, obtidas a partir da aplicação do Teorema de Green, são dadas em (2.100).



**Figura 2.15** – Seção transversal genérica e o detalhe do contorno (Pereira, 2015).

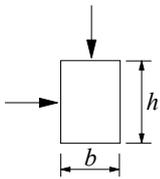
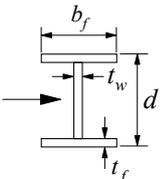
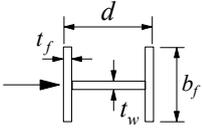
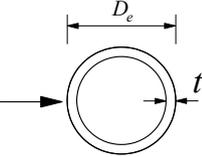
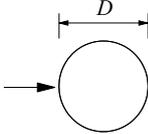
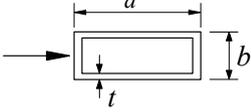
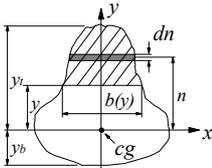
$$A = \int_{\Omega} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial(x)}{\partial x} d\Omega = \oint_{\Gamma} x n_x d\Gamma \quad (2.100a)$$

$$I = \int_{\Omega} y^2 d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial(xy^2)}{\partial x} d\Omega = \oint_{\Gamma} x y^2 n_x d\Gamma \quad (2.100b)$$

$$x_c = \frac{1}{A} \int_{\Omega} x d\Omega = \frac{1}{A} \int_{\Omega} \frac{\partial(yx)}{\partial y} d\Omega = \frac{1}{A} \oint_{\Gamma} x y n_y d\Gamma \quad (2.100c)$$

$$y_c = \frac{1}{A} \int_{\Omega} y d\Omega = \frac{1}{A} \int_{\Omega} \frac{\partial(xy)}{\partial x} d\Omega = \frac{1}{A} \oint_{\Gamma} x y n_x d\Gamma \quad (2.100d)$$

**Tabela 2.1** Biblioteca de seções disponíveis no programa

Seção	Descrição	Fator de forma ao cisalhamento
	Seção retangular Força cisalhante paralela às bordas	$\frac{6}{5} \frac{A}{bd}$
	Seção I Força cisalhante paralela ao flange	$\frac{3}{5} \frac{A}{t_f b_f}$
	Seção I Força cisalhante paralela à alma	$\frac{A}{t_w d}$
	Seção tubular de parede fina Força cisalhante	$\frac{A}{\pi r t}$
	Seção circular Força cisalhante	$\frac{10}{9}$
	Seção retangular tubular de parede fina Força cisalhante paralela à direção d	$\frac{A}{2td}$
	Seção genérica Força cisalhante paralela à direção y	$\frac{I_x^2}{\int_{y_b}^{y_t} \frac{Q^2(y)}{b(y)} dy}$

Maiores detalhes, bem como o processo para obtenção do fator de forma ao cisalhamento de seções arbitrárias podem ser encontrados em Pereira (2015).

## 2.6 Análises Parciais

Nesta seção, apresentam-se algumas análises parciais referentes às funções de forma e às matrizes de propriedade de elemento. Essas aplicações visam validar a formulação para obtenção das matrizes de rigidez e massa apresentadas neste trabalho. Para fim de

comparação, os resultados obtidos são confrontados com a literatura e com análises utilizando o *software* SAP2000.

### 2.6.1 Funções de forma de Timoshenko para elemento de rigidez constante

Nesta aplicação, as funções de forma de Timoshenko para um elemento de rigidez constante são plotadas e compara-se os modos de deformação com os polinômios Hermitianos, comumente utilizados na aproximação do campo de deslocamentos.

O elemento consiste em uma viga de 1 metro de comprimento, de seção transversal “I” com dimensões apresentadas na Figura 2.16, o material possui módulo de elasticidade  $E = 210\text{GPa}$  e coeficiente de Poisson  $\nu = 0,26$ .

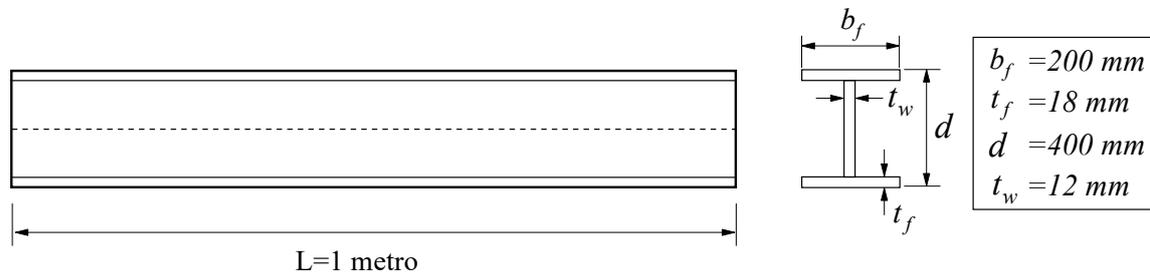


Figura 2.16 – Viga “I” - seção e material constantes

Na Figura 2.17 apresentam-se as funções de forma para o elemento. O efeito do cisalhamento é considerado nas funções de forma de Timoshenko  $\phi_i(x)$  e desprezadas nas funções de forma  $\psi_i(x)$ , com  $i = 2, 3, 5, 6$ .

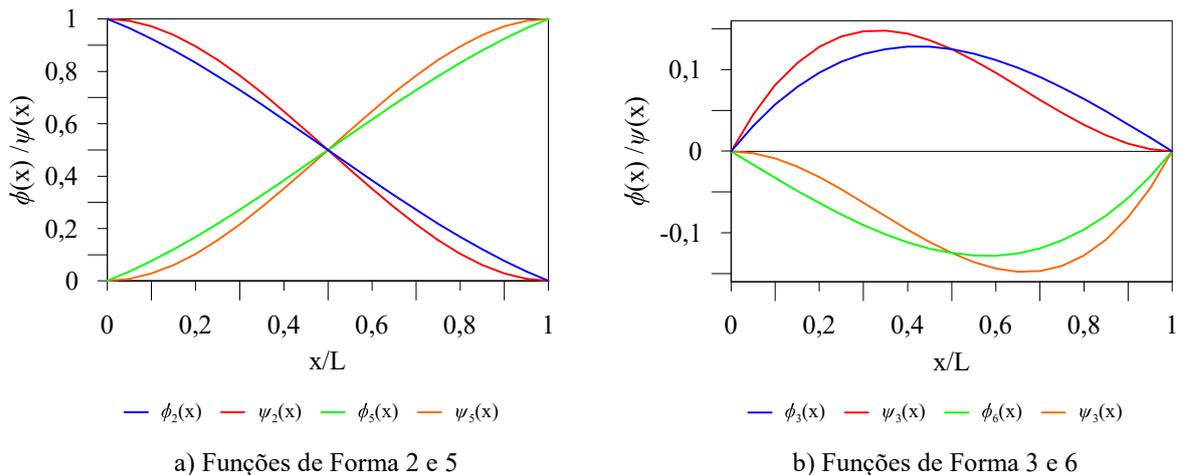
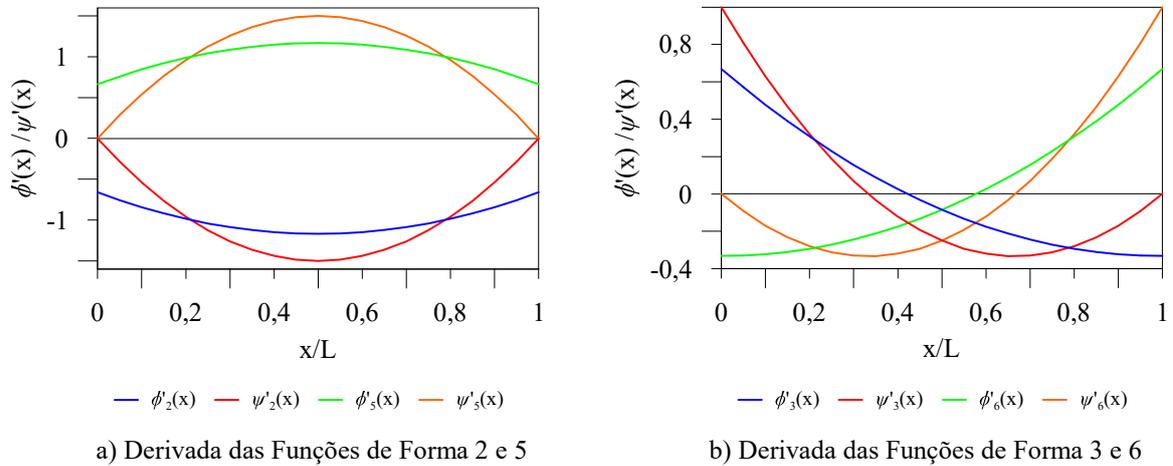


Figura 2.17 – Funções de forma para rigidez constante

Nota-se que a consideração da deformação por cisalhamento produz modos de deformação transversal diferentes, como esperado. Enquanto as funções  $\psi_2$  e  $\psi_5$  possuem

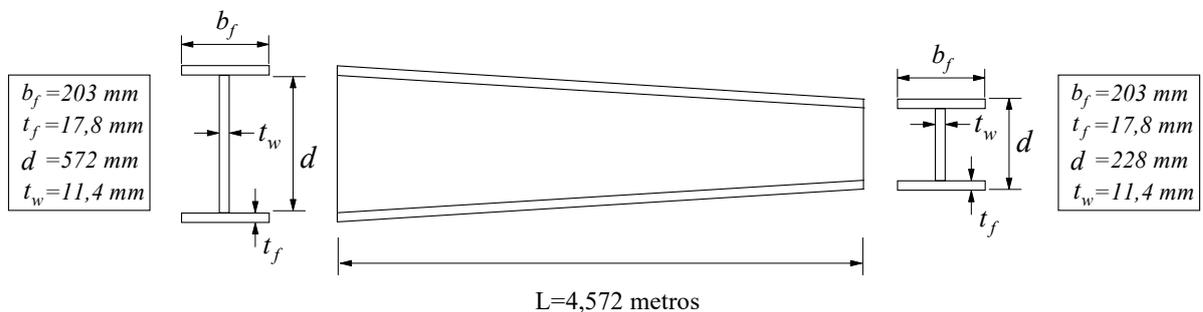
inclinações nulas em ambas as extremidades, assim como  $\psi_3$ , na extremidade final, e  $\psi_6$ , na extremidade inicial, as funções de forma de Timoshenko apresentam inclinações diferentes de zero nas extremidades, conforme pode-se observar no gráfico das derivadas das funções de forma mostrado na Figura 2.18.



**Figura 2.18** – Derivadas das funções de forma para rigidez constante

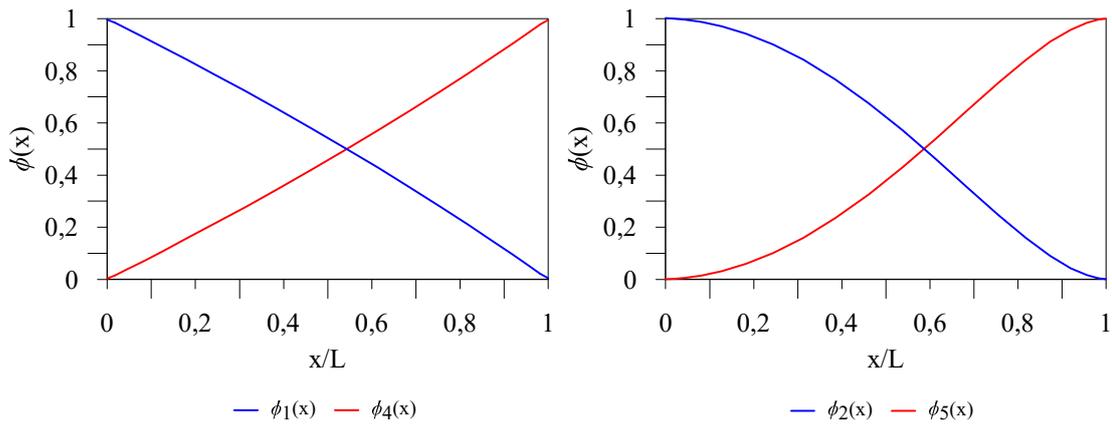
## 2.6.2 Funções de forma de Timoshenko para elemento de rigidez variável

Nesta aplicação, as funções de forma de Timoshenko para um elemento de rigidez variável são plotadas para apresentar como o modo de deformação do elemento se apresenta. O elemento consiste em uma viga de 4,572 metros de comprimento, de seção transversal tipo “I” cuja altura da alma varia linearmente com o comprimento e as dimensões estão apresentadas na Figura 2.19, o material tem suas propriedades constantes ao longo do comprimento e possui módulo de elasticidade  $E = 210\text{GPa}$  e coeficiente de Poisson  $\nu = 0,26$ .



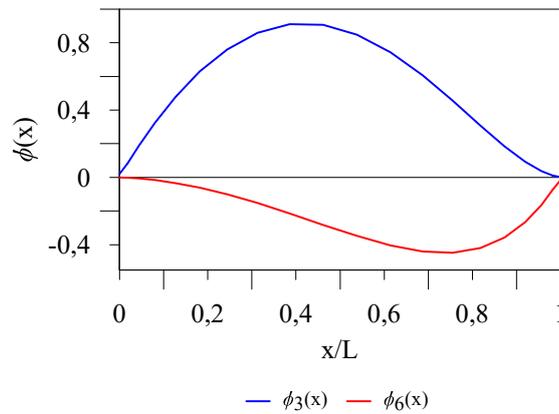
**Figura 2.19** – Viga “I” - seção variável e material constante

As funções de forma apresentadas na Figura 2.20 foram obtidas com a interpolação das propriedades geométricas de 4 seções igualmente espaçadas, sendo elas a seção do início, um terço do comprimento, dois terços do comprimento e no final do elemento.



a) Funções de Forma 1 e 4

b) Funções de Forma 2 e 5



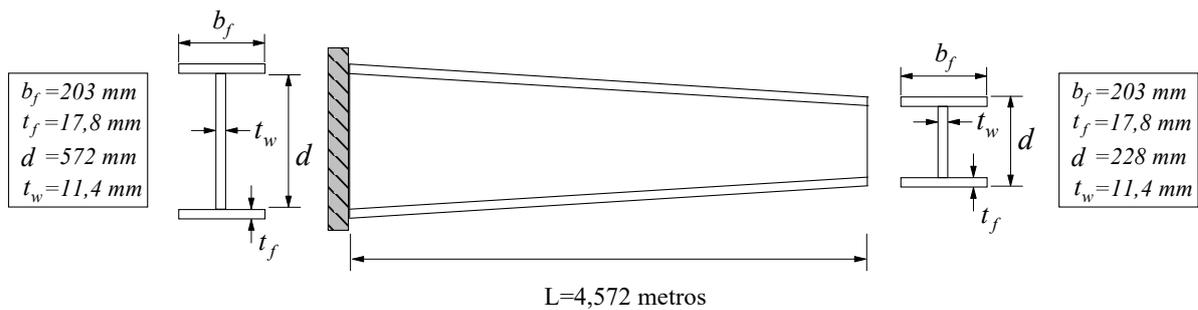
c) Funções de Forma 3 e 6

**Figura 2.20** – Funções de forma para o elemento de rigidez variável

Nota-se que a variação de rigidez ao longo do comprimento produziu funções de forma distintas daquelas obtidas para um elemento de rigidez constante.

### 2.6.3 Frequências naturais de um elemento com rigidez variável

Nesta aplicação, as frequências naturais não amortecidas de uma viga engastada-livre de seção transversal tipo “I” cuja altura da alma varia linearmente com o comprimento e as dimensões estão apresentadas na Figura 2.21, o material tem suas propriedades constantes ao longo do comprimento e possui módulo de elasticidade  $E = 206,85\text{GPa}$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0,20$  e massa específica  $\rho = 7845,45\text{ kg/m}^3$ .



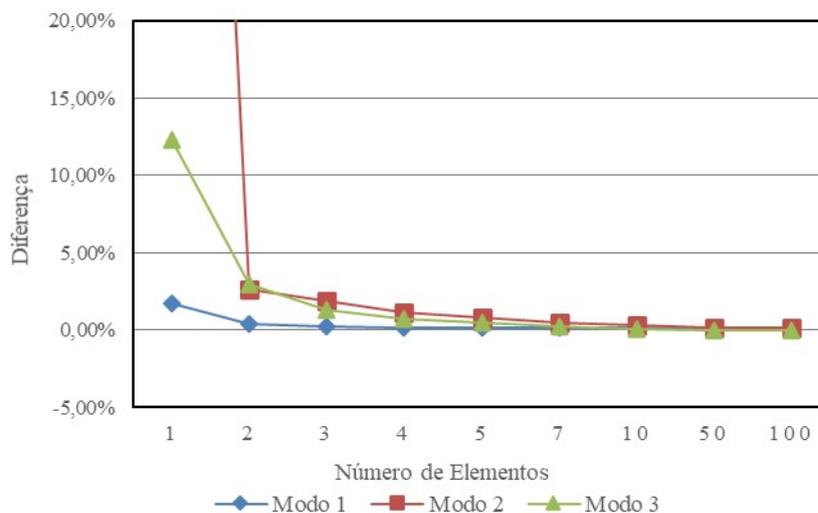
**Figura 2.21** – Viga “I” - seção variável e material constante com extremidade engastada

Desprezando o efeito do cisalhamento, as frequências naturais dos primeiros dois modos obtidas por Ochoa (1991) utilizando apenas um único elemento são comparados com os obtidos com o processo proposto no presente trabalho. Na Tabela 2.2 as frequências são apresentadas bem como a diferença entre os dados.

**Tabela 2.2** Frequências naturais de vibração dos modos 1 e 2 sem cisalhamento

Modo	Frequência (Hz)		Diferença (%)
	Presente Trabalho	Ochoa (1991)	
1	30,92	30,92	0,00
2	279,55	275,77	1,37

Por fim, consideram-se as deformações por cisalhamento nas análises cujos resultados são comparados com o *software* SAP2000 variando o número de elementos, os resultados são apresentados na Tabela 2.3. Na Figura 2.22 apresenta-se um gráfico da diferença nas frequências dos três primeiros modos em relação ao resultado do SAP2000 versus o número de elementos em que a viga foi discretizada.



**Figura 2.22** – Diferença entre as frequências versus número de elementos

**Tabela 2.3** Frequências naturais de vibração com cisalhamento

	Nº de Elementos	Frequência (Hz)					
		Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6
	1	30,248	272,541	338,135	-----	-----	-----
	2	29,878	138,626	310,077	460,116	1021,797	1327,543
	3	29,815	137,600	305,039	328,187	814,670	939,615
	4	29,797	136,675	303,294	325,384	567,191	900,938
Presente Trabalho	5	29,790	136,191	302,490	321,681	562,166	836,280
	7	29,784	135,759	301,791	317,310	548,208	819,645
	10	29,781	135,530	301,421	314,746	537,005	791,400
	50	29,778	135,321	301,080	312,304	525,659	758,105
	100	29,778	135,314	301,069	312,227	525,296	757,022
SAP2000	100	29,745	135,080	301,093	311,918	526,126	759,241

Observa-se uma rápida convergência com poucos elementos para as frequências dos primeiros modos, já para os modos de maior ordem, obtém-se uma convergência com um número maior de elementos.

# Capítulo 3

## Sistema de Equações Dinâmicas da Estrutura

### 3.1 Introdução

No Capítulo 2, apresentaram-se os processos generalizados para a obtenção das propriedades estruturais em nível de elemento. Neste Capítulo, apresenta-se o processo de montagem do sistema de equações no domínio do tempo de movimento da estrutura, cujos elementos apresentam características genéricas de variação de rigidez. Além disso, também se propõe um processo para a simulação de ligações semirrígidas entre os elementos estruturais e apoios. Na reconstituição da resposta no domínio do tempo, adota-se o método de Newmark, incondicionalmente estável para certos parâmetros adotados, cujos detalhes são discutidos ao final deste capítulo.

O capítulo encontra-se, em geral, estruturado como se descreve sucintamente a seguir. Na seção 3.2 discute-se a simulação de ligações semirrígidas com comportamento elástico-linear. Na subseção 3.2.1, o processo é utilizado, na simulação de atenuadores dinâmicos. Na Seção 3.3, as equações de movimento da estrutura são transformadas em um sistema de equações de equilíbrio dinâmico, e na subseção 3.3.1, descreve-se o processo para obtenção da matriz de amortecimento, responsável pela dissipação de energia do sistema. Na seção 3.4 trata-se de análises sísmicas, onde na subseção 3.4.1 aborda-se a geração dos acelerogramas sintéticos e na subseção 3.4.2 o processo para consideração dos movimentos dos apoios na análise da estrutura. Por fim, na seção 3.5, são comentados os processos para solução do sistema de equações de movimento da estrutura, e na subseção

3.4.1, foca-se no método de Newmark, efetivamente utilizado nesta pesquisa para a obtenção da resposta transiente da estrutura.

### 3.2 Ligações Semirrígidas e Atenuadores

Segundo Silva (2009), uma ligação é um meio através do qual forças e momentos são transferidos de um membro estrutural para outro. Na maior parte das ligações usadas na prática, o comportamento semirrígido é observado e pode influenciar substancialmente o comportamento da estrutura. Para esta pesquisa, foi adotado um comportamento elástico-linear para essas ligações, que é justificado pelo tipo de análise realizada.

As ligações semirrígidas serão simuladas por elementos de comprimento nulo, definido por dois nós que possuem o mesmo número de graus de liberdade do tipo de elemento finito em questão (ou seja, três graus de liberdade no caso de pórtico plano). Estes elementos consistem efetivamente de vinculações elásticas e, no modelo de análise, será sempre definida entre um nó da estrutura e um nó de um elemento e sua direção será a direção do elemento ao qual ela se associa. Na Figura 3.1, mostra-se duas ligações semirrígidas associadas ao elemento  $e_1$  e  $e_2$  de uma estrutura qualquer.

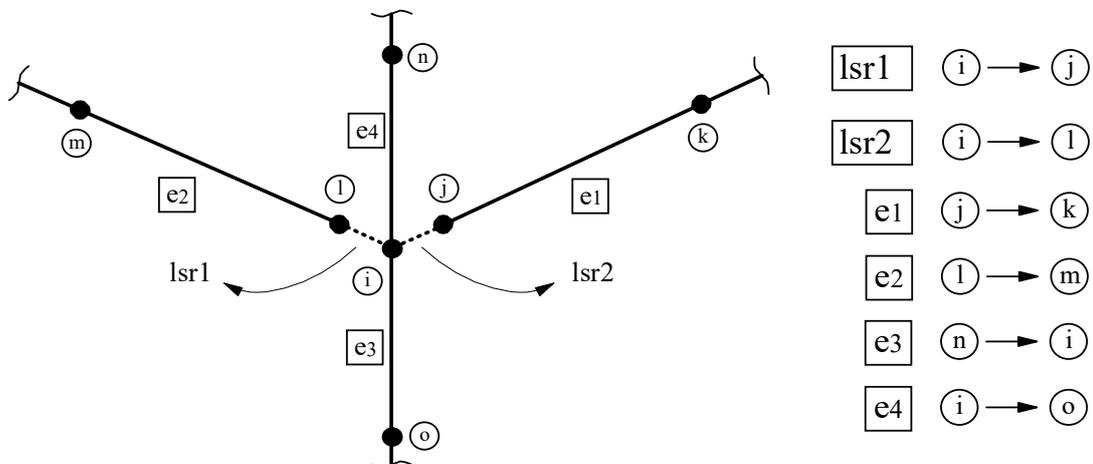


Figura 3.1 – Elemento de Pórtico Plano com Ligação Semirrígida

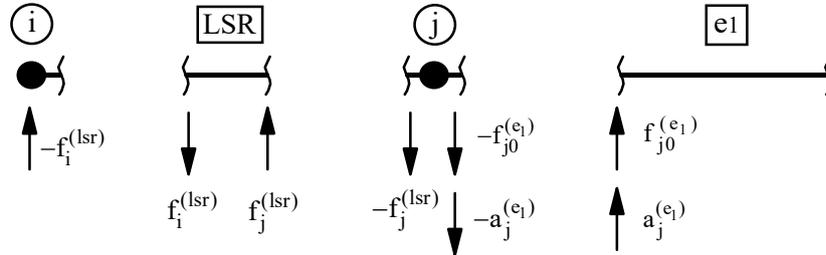
Para que os comprimentos dos elementos que simulam as ligações semirrígidas sejam nulos, as coordenadas dos nós  $i$ ,  $j$  e  $l$  devem ser as mesmas. Porém, devido às deformações das ligações, haverá descontinuidade de deslocamento, nesses nós, na direção dos graus de liberdade não rigidamente ligados entre si.

Note que, em geral,

$$\mathbf{f}_i = -\mathbf{k}_{ii}(\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_i) = -\mathbf{f}_f, \quad (3.1)$$

onde  $\mathbf{f}_i$  e  $\mathbf{f}_f$  são, respectivamente, os vetores de forças nos nós inicial e final da ligação semirrígida,  $\mathbf{u}_i$  e  $\mathbf{u}_f$  são, respectivamente, os vetores de deslocamentos dos nós inicial e final e  $\mathbf{k}_{ii}$  é a matriz de rigidez da ligação.

Particularmente para o nó  $j$  do exemplo da Figura 3.1, as forças que agem sobre ele são esquematizadas conforme a Figura 3.2.



**Figura 3.2** – Detalhe da Ligação Semirrígida

Aqui  $\mathbf{f}_{j0}^{(e_1)}$  é o vetor de forças que agem no nó  $j$  devido a presença de cargas no elemento  $e_1$ ,  $\mathbf{a}_j^{(e_1)}$  é o vetor de forças elásticas no nó  $j$  devido a deformação do elemento  $e_1$ . Por fim,  $\mathbf{f}_j^{(lsr)}$  é o vetor de forças elásticas no nó  $j$  devido a deformação da ligação semirrígida, resultando na equação de equilíbrio

$$-\mathbf{f}_j^{(lsr)} - \mathbf{f}_{j0}^{(e_1)} - \mathbf{a}_j^{(e_1)} = \mathbf{0}, \quad (3.2)$$

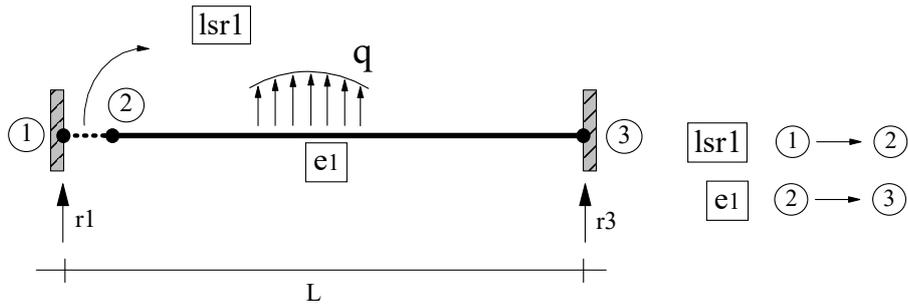
sendo  $i$  o nó inicial e  $j$  o nó final da ligação. Tem-se

$$\mathbf{k}_{ii}^{(lsr)} (\mathbf{u}_j^{(lsr)} - \mathbf{u}_i^{(lsr)}) + (\mathbf{k}_{jj}^{(e_1)} \mathbf{u}_j^{(e_1)} + \mathbf{k}_{jk}^{(e_1)} \mathbf{u}_k^{(e_1)}) = -\mathbf{f}_{j0}^{(e_1)}. \quad (3.3)$$

Como em uma ligação semirrígida há sempre continuidade entre os deslocamentos de seu nó final e o nó do elemento ao qual ela se associa, tem-se  $\mathbf{u}_j^{(lsr)} = \mathbf{u}_j^{(e_1)} = \mathbf{u}_j$ , então resulta:

$$-\mathbf{k}_{ii}^{(lsr)} \mathbf{u}_i^{(lsr)} + (\mathbf{k}_{ii}^{(lsr)} + \mathbf{k}_{jj}^{(e_1)}) \mathbf{u}_j + \mathbf{k}_{jk}^{(e_1)} \mathbf{u}_k^{(e_1)} = -\mathbf{f}_{j0}^{(e_1)}, \quad (3.4)$$

Tomando como exemplo a viga abaixo, com engaste elástico, Figura 3.3



**Figura 3.3** – Viga com Ligação Semirrígida

A matriz de rigidez da ligação semirrígida é dada por

$$\mathbf{k}_{ii}^{(lsr1)} = \begin{bmatrix} k_1 & & \\ & k_2 & \\ & & k_3 \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

As forças que agem no nó 1,  $\mathbf{f}_1^{(lsr1)}$ , são as reações devido a restrição de deslocamentos neste nó,  $\mathbf{r}_1$ . A matriz de rigidez do elemento  $e_1$ ,  $\mathbf{K}^{(e_1)}$ , é composta pelas submatrizes  $\mathbf{k}_{ij}^{(e_1)}$  que relacionam as forças elásticas que surgem no nó  $i$  devido os deslocamentos no nó  $j$ , com  $i, j = 2, 3$ , na seguinte forma

$$\mathbf{K}^{(e_1)} = \begin{bmatrix} k_{22}^{(e_1)} & k_{23}^{(e_1)} \\ k_{32}^{(e_1)} & k_{33}^{(e_1)} \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

As forças que agem no elemento  $e_1$  são apresentadas no vetor  $\mathbf{f}^{(e_1)}$  e são as forças que surgem nos nós 2 e 3, nós que definem o elemento  $e_1$ . Para o nó 2 e 3, tem-se as cargas nodais equivalentes às cargas de elemento, que são, respectivamente, dadas por  $-\mathbf{f}_{20}^{(e_1)}$  e  $-\mathbf{f}_{30}^{(e_1)}$ . Devido às restrições de deslocamento no nó 3, forças de reação surgem neste nó, representadas pelo vetor  $\mathbf{r}_3$ . O vetor de forças para o elemento  $e_1$  é então

$$\mathbf{f}^{(e_1)} = \begin{Bmatrix} -\mathbf{f}_{20}^{(e_1)} \\ -\mathbf{f}_{30}^{(e_1)} + \mathbf{r}_3 \end{Bmatrix}. \quad (3.7)$$

Para o exemplo em questão, tem-se o seguinte sistema de equações

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11}^{(lsr1)} & -\mathbf{k}_{11}^{(lsr1)} & 0 \\ -\mathbf{k}_{11}^{(lsr1)} & (\mathbf{k}_{11}^{(lsr1)} + \mathbf{k}_{22}^{(e_1)}) & \mathbf{k}_{23}^{(e_1)} \\ 0 & \mathbf{k}_{32}^{(e_1)} & \mathbf{k}_{33}^{(e_1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ -\mathbf{f}_{20}^{(e_1)} \\ -\mathbf{f}_{30}^{(e_1)} + \mathbf{r}_3 \end{Bmatrix}, \quad (3.8)$$

onde os deslocamentos nos nós 1 e 3 são nulos,  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_3 = 0$ , assim, o sistema de equações do nó 2 fica

$$-\mathbf{k}_{11}^{(lsr1)} 0 + (\mathbf{k}_{11}^{(lsr1)} + \mathbf{k}_{22}^{(e_1)}) \mathbf{u}_2 + \mathbf{k}_{23}^{(e_1)} = -\mathbf{f}_{20}^{(e_1)}, \quad (3.9)$$

Em relação ao sistema de referência local de cada ligação semirrígida, a respectiva matriz de rigidez da ligação semirrígida será dada por

$$\mathbf{K}^{(lsr)} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{ii}^{(lsr)} & -\mathbf{k}_{ii}^{(lsr)} \\ -\mathbf{k}_{ii}^{(lsr)} & \mathbf{k}_{ii}^{(lsr)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & -k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 & -k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 & 0 & -k_3 \\ -k_1 & 0 & 0 & k_1 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

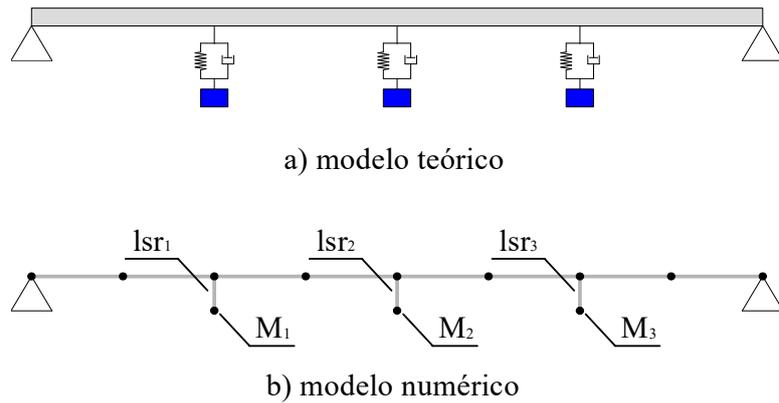
sendo  $k_1$ ,  $k_2$  e  $k_3$ , os coeficientes de rigidez da ligação semirrígida.

### 3.2.1 Atenuadores Dinâmicos

Vibrações de grandes amplitudes podem ser desenvolvidas em estruturas pouco amortecidas quando sujeitas a cargas com frequências próximas às suas frequências naturais. Estas vibrações podem ser reduzidas anexando-se à estrutura uma ou mais massas secundárias por meio de molas e amortecedores adequadamente ajustados (KRENK & HOGSBERG, 2014).

Segundo Costa (2014), esses sistemas são um tipo comum de controle passivo e são conhecidos como Atenuadores Dinâmicos Sintonizados (ADS) ou Amortecedor de Massa Sintonizado (AMS), comumente chamado na literatura internacional de *Tuned Mass Dampers (TMD)*. A redução das vibração da estrutura ocorre pela transferência de parte da energia de vibração para o dispositivo que é dissipada através do amortecimento.

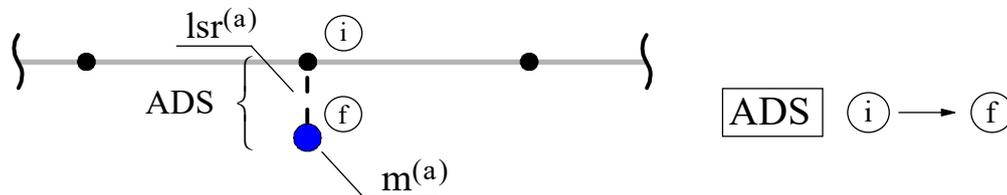
Na modelagem de estruturas com elementos reticulados de pórtico plano, os ADS's podem ser simulados por elementos discretos inseridos diretamente no modelo, conforme Figura 3.4.



**Figura 3.4** – Modelagem de Atenuadores Dinâmicos Sintonizados – ADS's

Para simular os ADS's são inseridos novos nós ao modelo, onde se concentrarão as massas dos dispositivos. Essas massas se conectam aos nós da estrutura por meio de elementos de mola do tipo elementos de ligação semirrígida, conforme apresentado anteriormente. Tanto a rigidez da mola, quanto a massa e o amortecimento do sistema são fornecidos diretamente.

Define-se aqui, que a conectividade do atenuador terá como nó inicial (i) o nó da estrutura em que o dispositivo se vincula e o nó final (f) o nó onde se concentrará a massa. A Figura 3.5 apresenta um esquema do modelo de AMS e sua conectividade.



**Figura 3.5** – Conectividade do ADS

A matriz de rigidez do dispositivo é a mesma apresentada para a matriz de rigidez da ligação semirrígida na Expressão (3.10), já para a matriz de massa e de amortecimento usam-se as expressões apresentadas abaixo (3.11).

$$\mathbf{C}^{(a)} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & -c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 & -c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 & -c_3 \\ -c_1 & 0 & 0 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & -c_2 & 0 & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & -c_3 & 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}^{(a)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

Já que a massa do atenuador está concentrada apenas no nó final e desconsiderando a massa da mola, a matriz de massa do ADS possui apenas os coeficiente relacionados aos graus de liberdade do nó final do atenuador diferentes de zero. Nesta matriz, o coeficiente relacionado ao terceiro grau de liberdade do nó final, corresponde ao momento de inércia de massa, que é desprezada aqui por se considerar massa concentrada.

### 3.3 Formulação das Equações de Movimento

Os fenômenos naturais e as atividades humanas impõem forças que usualmente variam com o tempo (em magnitude, direção e/ou posição) e a análise e o projeto de tais estruturas sujeitas a cargas dinâmicas envolvem a consideração das forças inerciais desenvolvidas. Cook *et al.* (1989) afirmam que, se a frequência de excitação aplicada a uma estrutura for inferior a aproximadamente um terço da frequência natural de vibração mais baixa da estrutura, então os efeitos da inércia podem ser desprezados e o problema é quase estático.

Para os casos em que as frequências de excitação forem mais altas do que as observadas acima, forças inerciais tornam-se relevantes e devem ser consideradas na análise, ou seja, um problema dinâmico precisa ser resolvido.

Uma análise dinâmica estrutural consiste na determinação dos históricos de variáveis como deslocamentos, velocidades e acelerações, bem como a magnitude de grandezas físicas relevantes para o dimensionamento, como os esforços internos, quando esses sistemas estruturais são submetidos a excitações dependentes do tempo.

A inclusão de forças inerciais pode ser feita com a aplicação do princípio de d'Alembert que estabelece que a massa desenvolve uma força inercial proporcional e oposta à sua aceleração. O princípio de d'Alembert é um dispositivo muito conveniente em problemas de dinâmica estrutural porque permite que as equações de movimento sejam expressas como equações de equilíbrio dinâmico (Clough e Penzien, 2003).

Em problemas de engenharia, esses sistemas estruturais são analisados via modelos discretos com um número finito de graus de liberdade. Utilizando-se do Método dos Elementos Finitos, a equação que traduz o equilíbrio dinâmico entre as forças externas, inerciais e elásticas, como matrizes e vetores de ordem igual aos graus de liberdade considerados, é dada por:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{f} , \quad (3.12)$$

onde  $\ddot{\mathbf{u}}$  e  $\mathbf{u}$  são, respectivamente, os vetores de acelerações e deslocamentos nodais, já  $\mathbf{f}$  representa o vetor de forças externas dependentes do tempo. Os termos  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{K}$  são, respectivamente, a matriz de massa e de rigidez da estrutura e são obtidas conforme procedimentos descritos no Capítulo 2.

Em respostas dinâmicas de estruturas reais, observa-se que a energia é dissipada durante a vibração, o que em análise dinâmica é geralmente levada em consideração pela introdução de forças de amortecimento dependentes da velocidade. Paz e Leigh (2004) afirmam que a presença inevitável dessas forças de amortecimento constitui um mecanismo pelo qual a energia mecânica do sistema, energia cinética ou potencial, é transformada em outras formas de energia, como o calor. A inclusão das forças de amortecimento dependentes da velocidade na equação de equilíbrio dinâmico, Equação (3.12), resulta em:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (3.13)$$

onde  $\dot{\mathbf{u}}$  é o vetor de velocidades nodais e  $\mathbf{C}$ , a matriz de amortecimento da estrutura.

### 3.3.1 Amortecimento proporcional

Bathe (2016) afirma que, na prática, é difícil, senão impossível, determinar para conjuntos gerais de elementos finitos os parâmetros de amortecimento do elemento, em particular porque as propriedades de amortecimento são dependentes da frequência. Por esta razão, o amortecimento considerado neste trabalho é conhecido como amortecimento proporcional ou amortecimento de Rayleigh. A matriz de amortecimento é estabelecida como sendo uma combinação linear das matrizes de massa e rigidez da estrutura, na forma:

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}, \quad (3.14)$$

sendo  $\alpha$  e  $\beta$  coeficientes de proporcionalidade de Rayleigh. De acordo com Clough e Penzien (2003), o amortecimento de Rayleigh, representado pela Equação (3.14), leva à seguinte relação entre taxa modal de amortecimento,  $\xi$ , e frequência,  $\omega$ :

$$\xi = \alpha \frac{1}{2\omega} + \beta \frac{\omega}{2}, \quad (3.15)$$

A relação entre a taxa de amortecimento e a frequência é expressa graficamente pela Figura 3.6. A taxa de amortecimento  $\xi$  depende do material e do nível de tensão. As frequências naturais de vibração podem ser obtidas a partir dos autovalores da estrutura,

que nesta pesquisa, são determinados por uma rotina escrita em linguagem Fortran e que utiliza de rotinas auxiliares LAPACK.

Conhecendo-se para duas frequências naturais quaisquer  $\omega_i$  e  $\omega_j$  as respectivas taxas de amortecimento  $\xi_i$  e  $\xi_j$ , pode-se então determinar os coeficientes  $\alpha$  e  $\beta$  usados no cálculo da matriz de amortecimento  $\mathbf{C}$ .

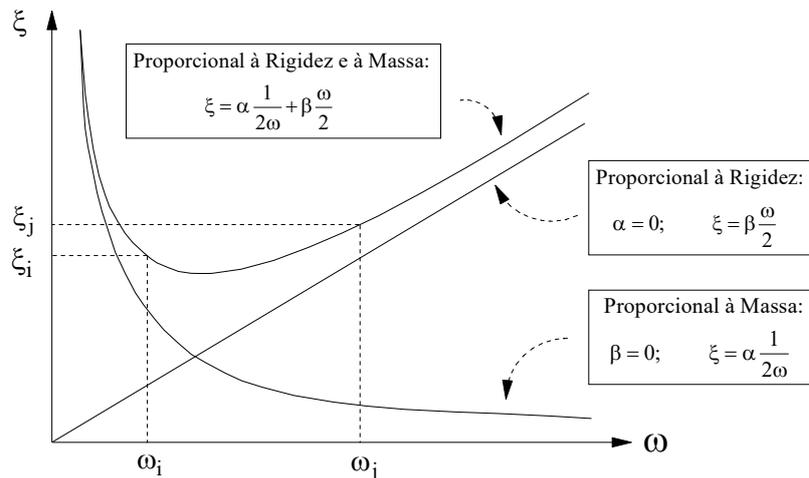
$$\begin{Bmatrix} \xi_i \\ \xi_j \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1/\omega_i & \omega_i \\ 1/\omega_j & \omega_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix}. \quad (3.16)$$

Os coeficientes de proporcionalidade de Rayleigh resultam da solução da Equação acima, assim, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \frac{2\omega_i\omega_j}{\omega_j^2 - \omega_i^2} \begin{bmatrix} \omega_j & -\omega_i \\ -1/\omega_j & 1/\omega_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_i \\ \xi_j \end{Bmatrix}, \quad (3.17)$$

Usualmente, admite-se a mesma taxa de amortecimento modal para ambas as frequências, ou seja,  $\xi_i = \xi_j = \xi$ .

Quando os coeficientes de Rayleigh forem encontrados, a matriz de amortecimento proporcional que fornecerá as forças de amortecimento dependentes da velocidade é dada pela expressão (3.14).



**Figura 3.6** – Taxa de amortecimento em função da frequência (Clough e Penzien, 2003)

Segundo Chopra (1995), normalmente não é viável determinar experimentalmente as propriedades de amortecimento por falta de orçamento e tempo, também, para um novo edifício em projeto, obviamente seu amortecimento não pode ser medido. As taxas de

amortecimento modal para uma estrutura devem, portanto, ser estimadas usando dados medidos de estruturas semelhantes.

Cook *et al.* (1989) afirmam que, as taxas de amortecimento possuem valores em torno de 2% a 15% para estrutura de aço parafusada ou rebitada, e em concreto armado ou protendido. Newmark (1982) recomenda valores de amortecimento para diferentes tipos de estruturas para dois níveis de tensão. Na Tabela 3.1 alguns desses valores recomendados são apresentados.

**Tabela 3.1** Valores recomendados de amortecimento (Newmark e Hall, 1982)

Nível de Tensão	Tipo e condições da estrutura	Taxa de Amortecimento $\xi$ (%)
Tensão de trabalho, não mais do que cerca da metade da tensão de escoamento.	Estruturas de aço soldadas e concreto armado com pequenas fissuras	2 – 3
	Estruturas de concreto armado com fissuras consideráveis	3 – 5
	Estruturas de aço parafusadas e/ou rebitadas	5 – 7
Na tensão de escoamento ou logo abaixo dela	Estruturas de aço soldadas	5 – 7
	Estruturas de concreto armado	7 – 10
	Estruturas de aço parafusadas e/ou rebitadas	10 – 15

Segundo Chopra (1995), as taxas de amortecimento recomendadas por Newmark (1982) podem ser usadas diretamente para a análise linearmente elástica de estruturas com amortecimento clássico.

Butterworth, Lee e Davidson (2004) realizaram experimentos em um edifício de 11 andares, onde foram excitados quatro modos distintos, dois translacionais e dois torcionais, por meio de uma excitatriz de massa excêntrica giratória acionada por um motor elétrico. O amortecimento encontrado para os modos mais baixos foi de cerca de 1,5%, aumentando para aproximadamente 6% para o segundo modo de translação.

### 3.4 Análises Sísmicas

Uma das aplicações mais importantes da teoria da dinâmica de estruturas é a análise da resposta das estruturas sob movimento do solo causado por um terremoto, (Chopra, 1995).

Para a consideração de sismos na análise transiente de estruturas, dois processos foram implementados no presente trabalho. O primeiro processo relacionava-se com a geração de acelerogramas sintéticos com base na modificação de espectros de resposta de

acelerogramas de sismos reais para compatibilizá-los com prescrições de normas técnicas. O segundo processo consiste em uma estratégia para consideração dessas movimentações de solo na análise transiente da estrutura. Ambos os processos são descritos nas duas subseções a seguir.

### 3.4.1 Acelerogramas Sintéticos

Os acelerogramas artificiais são uma ferramenta muito útil para projetar estruturas resistentes a abalos sísmicos. Segundo Ferreira *et al.* (2020), a geração de acelerogramas compatíveis com espectros predefinidos em normas técnicas são uma aplicação importante na Engenharia de Terremotos, pois códigos sísmicos em todo o mundo adotam certos espectros de resposta como prescrição para projetos padrão. Os acelerogramas reais nem sempre possuem espectros de resposta compatíveis com essas prescrições de normas, evidenciando ainda mais a importância da geração de acelerogramas sintéticos.

Até o momento, vários métodos foram propostos na literatura para gerar acelerogramas compatíveis com o espectro. Ferreira *et al.* (2020), disponibilizou um código simples, escrito em MATLAB, para gerar um acelerograma compatível com espectros de resposta prescritos pelo Eurocódigo 8 – EC8, baseado na modificação de registros reais de sismos.

O código proposto determina, inicialmente, o espectro de resposta de um terremoto real e a sua transformada de Fourier, depois altera a transformada de Fourier com base na diferença entre os espectros de resposta e os espectros definidos pela norma. Para este código, foram considerados os espectros elásticos horizontais para diferentes tipos de solo e terremoto, conforme definido na seção 3.2.2.2 do EC8.

Para gerar o espectro elástico horizontal, é necessário fornecer alguns parâmetros como o tipo de solo, tipo de terremoto, amortecimento estrutural e a referência de aceleração de pico base. Os tipos de solo considerados no código são apresentados na Tabela 3.2. O tipo do terremoto pode ser de tipo 1, para terremoto de campo distante, e de tipo 2 para terremoto de campo próximo. O EC8 define como prática usual gerar terremotos artificiais para coincidir com os espectros de resposta elástica de amortecimento viscoso de 5%.

Para o presente trabalho, adaptou-se o código MATLAB disponibilizado por Ferreira *et al.* (2020) para a linguagem FORTRAN, onde foram necessárias a utilização de rotinas externas para realização de algumas operações. Para a operação de inversão de matriz

utilizaram-se rotinas LAPACK 'DGETRF' e 'DGETRI' (<http://www.netlib.org/lapack>), já para a operação de exponencial de matriz utilizou-se de a rotina 'ZGCHBV' do pacote Expokit (<https://www.maths.uq.edu.au/expokit>) desenvolvido pela Universidade do Queensland.

O código em FORTRAN para geração dos acelerogramas sintéticos compatíveis com o espectro elástico horizontal definido pelo Eurocódigo 8 e baseado na modificação do espectro de resposta de sismos reais é apresentado no Apêndice A.

**Tabela 3.2** Tipos de Solo (Adaptado de Eurocódigo 8, 2004)

Tipo de Solo	Taxa de Amortecimento
A	Rocha ou outra formação geológica do tipo rochoso
B	Depósitos de areia muito compacta, de seixo (cascalho) ou argila muito rija
C	Depósitos profundos de areia compactada ou mediantemente compactada, de seixo (cascalho) ou argila rija
D	Depósitos de solo não coesivos, de compactidade baixa a média
E	Um perfil de solo que consiste em uma camada superficial de aluvião

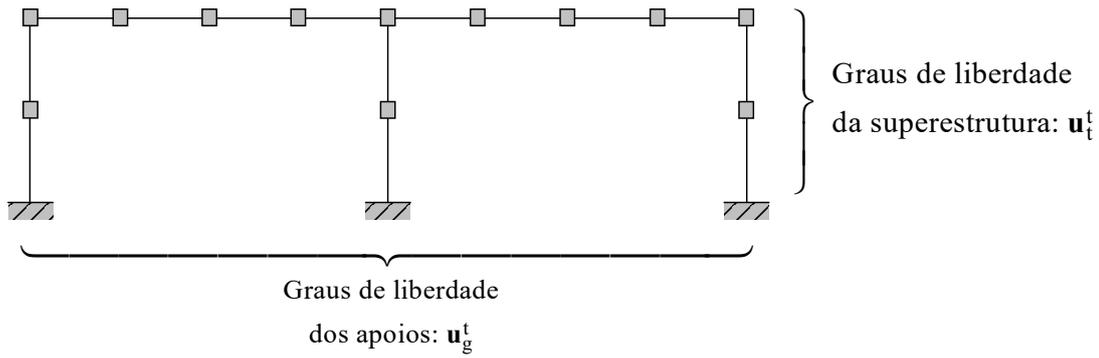
### 3.4.2 Excitação de base

Uma das aplicações importantes em dinâmica estrutural é prever como as estruturas respondem ao movimento de base induzido por terremotos. A consideração destas excitações na análise transiente da estrutura foi realizada por um processo proposto em Chopra (1995).

Considerando-se a estrutura genérica da Figura 3.7, onde separa-se aqui os graus de liberdade dos apoios (com deslocamentos, velocidades e acelerações prescritos) e os graus de liberdade livres da estrutura, o sistema de equações de equilíbrio dinâmico pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{M}_g \\ \mathbf{M}_g^T & \mathbf{M}_{gg} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_t \\ \ddot{\mathbf{u}}_g \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{C}_g \\ \mathbf{C}_g^T & \mathbf{C}_{gg} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_t \\ \dot{\mathbf{u}}_g \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{K}_g \\ \mathbf{K}_g^T & \mathbf{K}_{gg} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_t \\ \mathbf{u}_g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{p}_g(t) \end{Bmatrix}, \quad (3.18)$$

em que as variáveis com índice subscrito  $g$  estão associadas aos graus de liberdade dos apoios e as com índice subscrito  $t$  estão associadas aos graus de liberdade do restante da estrutura, não restringidos. O índice superescrito  $t$  indica o tempo atual da análise.



**Figura 3.7** – Definição dos Graus de Liberdade da Superestrutura e dos Apoios

Os deslocamentos da estrutura podem ser separados em duas partes, conforme apresenta-se na expressão:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_t^t \\ \mathbf{u}_g^t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_s^t \\ \mathbf{u}_g^t \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^t \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}, \quad (3.19)$$

onde  $\mathbf{u}_s^t$  é o vetor de deslocamentos da estrutura devido à aplicação estática dos deslocamentos prescritos de apoio para cada passo de tempo e  $\mathbf{u}^t$  é o vetor de deslocamentos dinâmicos da estrutura.

Os vetores  $\mathbf{u}_s^t$  e  $\mathbf{u}_g^t$  estão relacionados por meio de:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{K}_g \\ \mathbf{K}_g^T & \mathbf{K}_{gg} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_s^t \\ \mathbf{u}_g^t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{p}_{sg}^t \end{Bmatrix}, \quad (3.20)$$

onde  $\mathbf{p}_{sg}^t$  são as forças nos apoios necessárias para impor estaticamente os deslocamentos prescritos  $\mathbf{u}_g^t$  que variam com o tempo.

Da expressão (3.18), tem-se:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_t^t + \mathbf{M}_g \cdot \ddot{\mathbf{u}}_g^t + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{u}}_t^t + \mathbf{C}_g \cdot \dot{\mathbf{u}}_g^t + \mathbf{K} \cdot \mathbf{u}_t^t + \mathbf{K}_g \cdot \mathbf{u}_g^t = \mathbf{0}, \quad (3.21)$$

A aplicação da Equação (3.19) na Equação (3.21) resulta em:

$$\begin{aligned} & \mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_s^t + \mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{u}}^t + \mathbf{M}_g \cdot \ddot{\mathbf{u}}_g^t + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{u}}_s^t + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{u}}^t + \mathbf{C}_g \cdot \dot{\mathbf{u}}_g^t + \\ & + \mathbf{K} \cdot \mathbf{u}_s^t + \mathbf{K} \cdot \mathbf{u}^t + \mathbf{K}_g \cdot \mathbf{u}_g^t = \mathbf{0} \end{aligned}, \quad (3.22)$$

A equação anterior pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{u}}^t + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{u}}^t + \mathbf{K} \cdot \mathbf{u}^t = -\left(\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_s^t + \mathbf{M}_g \cdot \ddot{\mathbf{u}}_g^t\right) - \left(\mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{u}}_s^t + \mathbf{C}_g \cdot \dot{\mathbf{u}}_g^t\right) - \left(\mathbf{K} \cdot \mathbf{u}_s^t + \mathbf{K}_g \cdot \mathbf{u}_g^t\right), \quad (3.23)$$

Ou ainda na forma:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{u}}^t + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{u}}^t + \mathbf{K} \cdot \mathbf{u}^t = \mathbf{p}_{\text{eff}}(t), \quad (3.24)$$

onde  $\mathbf{p}_{\text{eff}}(t)$  é o vetor de cargas efetivo que varia em função do tempo e é dado pela expressão

$$\mathbf{p}_{\text{eff}}(t) = -\left(\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_s^t + \mathbf{M}_g \cdot \ddot{\mathbf{u}}_g^t\right) - \left(\mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{u}}_s^t + \mathbf{C}_g \cdot \dot{\mathbf{u}}_g^t\right) - \left(\mathbf{K} \cdot \mathbf{u}_s^t + \mathbf{K}_g \cdot \mathbf{u}_g^t\right) \quad (3.25)$$

Da Equação (3.20) tem-se que:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{u}_s^t + \mathbf{K}_g \cdot \mathbf{u}_g^t = \mathbf{0}, \quad (3.26)$$

de modo que a Equação (3.25) resulta em

$$\mathbf{p}_{\text{eff}}(t) = -\left(\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_s^t + \mathbf{M}_g \cdot \ddot{\mathbf{u}}_g^t\right) - \left(\mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{u}}_s^t + \mathbf{C}_g \cdot \dot{\mathbf{u}}_g^t\right) \quad (3.27)$$

Conhecidos os deslocamentos prescritos dos apoios  $\mathbf{u}_g^t$  devido a movimentação do solo provocado pelo terremoto, o vetor  $\mathbf{u}_s^t$  pode ser obtido a partir da solução da Equação (3.20). Os vetores  $\dot{\mathbf{u}}_s^t$  e  $\ddot{\mathbf{u}}_s^t$  podem ser obtidos a partir das expressões (3.28a) e (3.28b).

$$\dot{\mathbf{u}}_s^{t+\Delta t} = \frac{2}{\Delta t} \left[ \mathbf{u}_s^{t+\Delta t} - \mathbf{u}_s^t \right] - \dot{\mathbf{u}}_s^t, \quad (3.28a)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_s^{t+\Delta t} = \frac{2}{\Delta t} \left[ \dot{\mathbf{u}}_s^{t+\Delta t} - \dot{\mathbf{u}}_s^t \right] - \ddot{\mathbf{u}}_s^t, \quad (3.28b)$$

### 3.5 Solução do Problema Transiente

De acordo com a natureza do problema dinâmico a ser resolvido, a solução numérica pode ser buscada no domínio do tempo. Segundo Bathe (2016), os métodos de integração no tempo estão divididos em duas principais categorias: integração direta e superposição modal e sua escolha é determinada apenas por sua eficácia numérica.

Nos processos de integração direta, o sistema de equações de equilíbrio no tempo é integrado diretamente, sem a realização de transformações prévias, segundo uma estratégia

de marcha no tempo. Em essência, a integração numérica direta é baseada na ideia de satisfazer as equações de equilíbrio dinâmico em intervalos discretos de tempo,  $\Delta t$ , e uma variação de deslocamentos, velocidades e acelerações dentro de cada intervalo de tempo é adotada (Bathe, 2016).

Segundo Soares Jr. e Großholz (2018), os métodos de integração direta podem ser subdivididos em duas famílias, procedimentos explícitos e implícitos. Numa abordagem implícita, as variáveis constitutivas são expressas como funções do tempo atual de análise, já em abordagens explícitas, todas as variáveis constitutivas estão disponíveis a partir de cálculos em tempos anteriores.

Para Bathe (2016), ao analisar um problema de dinâmica estrutural, na maioria dos casos, uma integração de tempo implícita incondicionalmente estável é mais eficaz. Neste trabalho, para solução do problema transiente é adotado o método de Newmark, que é um método de integração direta implícito.

### 3.5.1 Método de Newmark

As equações básicas de integração para a velocidade final e deslocamento, para o método de Newmark, são expressos da seguinte forma:

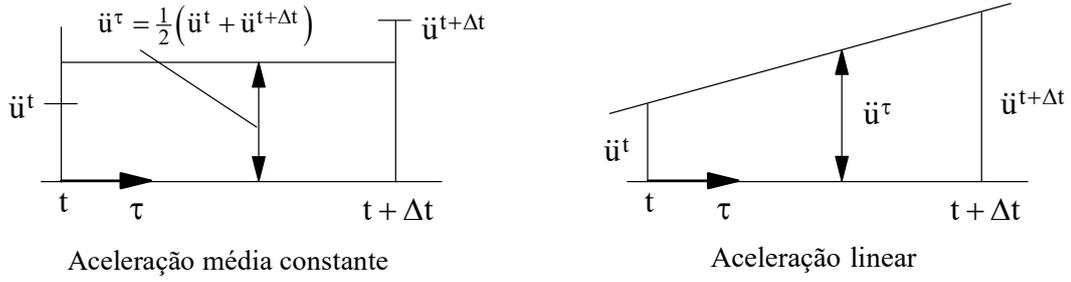
$$\dot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{u}}^t + \left[ (1 - \delta) \ddot{\mathbf{u}}^t + \delta \ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} \right] \Delta t, \quad (3.29a)$$

$$\mathbf{u}^{t+\Delta t} = \mathbf{u}^t + \dot{\mathbf{u}}^t \Delta t + \left[ \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) \ddot{\mathbf{u}}^t + \alpha \ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} \right] \Delta t^2, \quad (3.29b)$$

onde  $\mathbf{u}^t$ ,  $\dot{\mathbf{u}}^t$  e  $\ddot{\mathbf{u}}^t$  são, respectivamente, os vetores de deslocamento, velocidade e acelerações nodais no tempo anterior  $t$ . Já  $\mathbf{u}^{t+\Delta t}$ ,  $\dot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t}$  e  $\ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t}$  são os vetores de deslocamento, velocidade e acelerações nodais no tempo atual  $t+\Delta t$ . Por fim, os termos  $\alpha$  e  $\delta$  são parâmetros que podem ser determinados para obter precisão e estabilidade de integração.

De acordo com Clough e Penzien (2003), é evidente que o fator  $\delta$  fornece uma ponderação linearmente variável entre a influência das acelerações inicial e final na mudança de velocidade e o fator  $\alpha$  fornece de forma semelhante a ponderação das contribuições dessas acelerações inicial e final para a mudança de deslocamento.

Segundo Bathe (2016), Newmark propôs originalmente como um esquema incondicionalmente estável o método de aceleração média constante, em que  $\delta = 1/2$  e  $\alpha = 1/4$ . Quando  $\delta = 1/2$  e  $\alpha = 1/6$ , tem-se o método da aceleração linear.



**Figura 3.8** – Variação da Aceleração

Chopra (1995) afirma que, o método de aceleração média constante é incondicionalmente estável, enquanto o método de aceleração linear é condicionalmente estável para  $\Delta t \leq 0,051T_j$ , em que  $T_j$  é o período do último dos  $j$  primeiros modos de vibração mais relevantes da estrutura.

Para que sejam conhecidos os deslocamentos, velocidades e acelerações no tempo  $t+\Delta t$ , é necessário que as equações de equilíbrio, Equação (3.13), sejam satisfeitas nesse mesmo instante, ou seja

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{u}^{t+\Delta t} = \mathbf{f}^{t+\Delta t}, \quad (3.30)$$

Escrevendo  $\dot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t}$  e  $\ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t}$  em termos de  $\mathbf{u}^{t+\Delta t}$  a partir das Equações de (3.29a) e (3.29b), substituindo em (3.30), é estabelecido o equilíbrio dinâmico no instante  $t+\Delta t$  em função do deslocamento nesse instante, resultando em

$$\left( \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\delta}{\alpha \Delta t} \mathbf{C} + \mathbf{K} \right) \mathbf{u}^{t+\Delta t} = \mathbf{f}^{t+\Delta t} + \mathbf{M} \left[ \left( \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \right) \mathbf{u}^t + \left( \frac{1}{\alpha \Delta t} \right) \dot{\mathbf{u}}^t + \left( \frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \ddot{\mathbf{u}}^t \right] + \mathbf{C} \left[ \left( \frac{\delta}{\alpha \Delta t} \right) \mathbf{u}^t + \left( \frac{\delta}{\alpha} - 1 \right) \dot{\mathbf{u}}^t + \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\delta}{\alpha} - 2 \right) \ddot{\mathbf{u}}^t \right], \quad (3.31)$$

que, em uma forma simplificada, é escrita como

$$\hat{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{u}^{t+\Delta t} = \hat{\mathbf{f}}, \quad (3.32)$$

sendo  $\hat{\mathbf{K}}$  e  $\hat{\mathbf{f}}$ , respectivamente, a matriz de rigidez e o vetor de forças efetivos, expressos por:

$$\hat{\mathbf{K}} = \left( \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\delta}{\alpha \Delta t} \mathbf{C} + \mathbf{K} \right), \quad (3.33a)$$

$$\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{f}^{t+\Delta t} + \mathbf{M} \left[ \left( \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \right) \mathbf{u}^t + \left( \frac{1}{\alpha \Delta t} \right) \dot{\mathbf{u}}^t + \left( \frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \ddot{\mathbf{u}}^t \right] + \mathbf{C} \left[ \left( \frac{\delta}{\alpha \Delta t} \right) \mathbf{u}^t + \left( \frac{\delta}{\alpha} - 1 \right) \dot{\mathbf{u}}^t + \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\delta}{\alpha} - 2 \right) \ddot{\mathbf{u}}^t \right]. \quad (3.33b)$$

Nota-se que a matriz de rigidez efetiva,  $\hat{\mathbf{K}}$ , não depende do instante  $t+\Delta t$ , portanto, apenas o vetor de forças efetivo,  $\hat{\mathbf{f}}$ , deve ser obtido para solução do sistema de Equações (3.32) para cada passo de tempo. Conhecidos os deslocamentos no instante  $t+\Delta t$ , a aceleração nesse instante pode ser obtida a partir da manipulação da Equação (3.29b), resultando em

$$\ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} = \left(\frac{1}{\alpha\Delta t^2}\right)(\mathbf{u}^{t+\Delta t} - \mathbf{u}^t) - \left(\frac{1}{\alpha\Delta t}\right)\dot{\mathbf{u}}^t - \left(\frac{1}{2\alpha} - 1\right)\ddot{\mathbf{u}}^t, \quad (3.34)$$

Conhecida a aceleração nesse instante, a velocidade é obtida pela Equação (3.29a)

O procedimento de solução completo usando o método de Newmark, implementado nesta pesquisa, é descrito na Tabela 3.3 abaixo. Nesta pesquisa, utilizou-se do método de aceleração média constante, ou seja,  $\delta = 1/2$  e  $\alpha = 1/4$ .

**Tabela 3.3** Solução Método de Newmark (Bathe, 2016)

---

**A. Cálculos Iniciais**

1. Montagem das matrizes de rigidez  $\mathbf{K}$ , massa  $\mathbf{M}$  e amortecimento  $\mathbf{C}$
2. Definir as condições iniciais,  $\mathbf{u}^t$ ,  $\dot{\mathbf{u}}^t$  e  $\ddot{\mathbf{u}}^t$  para  $t = 0$
3. Escolha do passo de tempo  $\Delta t$  e dos parâmetros  $\alpha$  e  $\delta$
4. Calcular as constantes de integração

$$a_0 = \frac{1}{\alpha\Delta t^2}; \quad a_1 = \frac{\delta}{\alpha\Delta t}; \quad a_2 = \frac{1}{\alpha\Delta t}; \quad a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1;$$

$$a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1; \quad a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\delta}{\alpha} - 2 \right); \quad a_6 = \delta(1 - \delta); \quad a_7 = \delta\Delta t$$

5. Montagem da Matriz de Rigidez Efetiva  $\hat{\mathbf{K}}$

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{C}$$

6. Triangularizar  $\hat{\mathbf{K}}$

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{LDL}^T$$


---

**B. Para cada passo de tempo**

1. Calcular o vetor de forças efetivo,  $\hat{\mathbf{f}}$ , para o tempo  $t+\Delta t$

$$\hat{\mathbf{f}}^{t+\Delta t} = \mathbf{f}^{t+\Delta t} + \mathbf{M} \left( a_0\mathbf{u}^t + a_2\dot{\mathbf{u}}^t + a_3\ddot{\mathbf{u}}^t \right) + \mathbf{C} \left( a_1\mathbf{u}^t + a_4\dot{\mathbf{u}}^t + a_5\ddot{\mathbf{u}}^t \right)$$

2. Resolver os deslocamentos no tempo  $t+\Delta t$

$$\mathbf{LDL}^T\mathbf{u}^{t+\Delta t} = \hat{\mathbf{f}}^{t+\Delta t}$$

3. Calcular acelerações e velocidades no tempo  $t+\Delta t$

$$\ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} = a_0 \left( \mathbf{u}^{t+\Delta t} - \mathbf{u}^t \right) - a_2\dot{\mathbf{u}}^t - a_3\ddot{\mathbf{u}}^t$$

$$\dot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{u}}^t + a_6\ddot{\mathbf{u}}^t + a_7\ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t}$$


---

# Capítulo 4

## Aplicações

### 4.1 Introdução

O presente capítulo tem como objetivo a aplicação dos processos apresentados anteriormente na análise de sistemas estruturais em aço, concreto e mistos de aço e concreto. Situações envolvendo cargas harmônicas, de impacto e sismos são exploradas no decorrer deste capítulo no intuito de observar a eficiência da formulação proposta na obtenção da resposta desses sistemas estruturais no domínio do tempo.

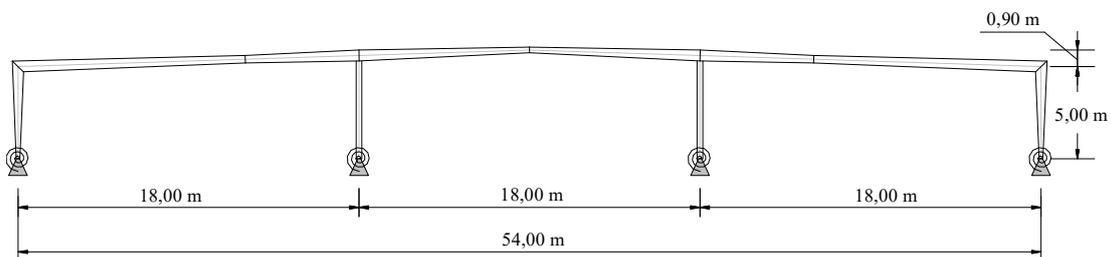
A primeira aplicação consiste na análise de um pórtico em aço destinado à construção de uma estrutura de galpão com ligações semirrígidas em seus apoios submetido à uma carga de impacto. A segunda aplicação consiste na análise de uma ponte mista de concreto e aço submetida à diversos tipos de cargas dinâmicas. Por fim, a terceira aplicação consiste em uma ponte em concreto submetida à um carregamento harmônico onde se avaliou a resposta no tempo com e sem a presença de atenuadores dinâmicos. Para essa mesma ponte em concreto, uma análise sísmica também foi realizada a fim de verificar a resposta da estrutura quando submetida à essa ação.

A validação dessas respostas, obtidas segundo as formulações propostas nesta dissertação, foi efetuada por meio de comparações de resultados de análises realizadas com os *softwares* SAP2000 e ANSYS. Para as análises com o SAP2000 utilizou-se a versão 16 cuja licença foi adquirida pela Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Ouro Preto. Já para o ANSYS, utilizou-se da versão 2020 R1 e 2021 R1 que é disponibilizada gratuitamente pelo desenvolvedor para universidades e estudantes. Para visualização dos modelos e respostas obtidos com as implementações dos

processos propostos, utilizou-se opções do *software* VisIt, livre, desenvolvido pelo Lawrence Livermore National Laboratory – LLNL (<http://www.llnl.gov/visit>).

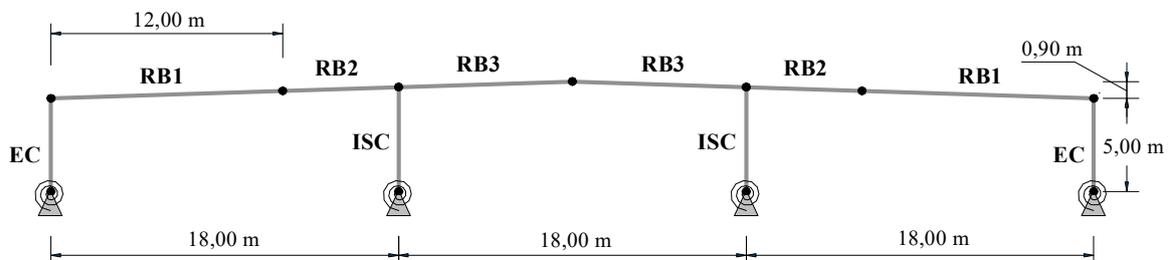
## 4.2 Galpão Industrial

A primeira aplicação consiste na análise de um galpão industrial em aço que possui três vãos de 18 metros cada, totalizando um comprimento de 54 metros. O galpão possui em todos os seus apoios, nas direções de x e y, restrições de deslocamento e ligação semirrígida para rotação, conforme Figura 4.1.



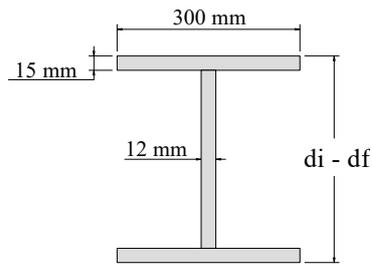
**Figura 4.1** – Pórtico Galpão Industrial: detalhamento da estrutura (Adaptado de Li e Li, 2002)

A estrutura possui trechos com características geométricas distintas, agrupadas em cinco categorias de elementos, quais sejam os pilares de extremidade (EC), os pilares internos (ISC) e os elementos de cobertura (RB1, RB2 e RB3), conforme Figura 4.2.



**Figura 4.2** – Pórtico Galpão Industrial: tipos de elementos

O galpão é constituído de perfis tipo “I” em que a largura e a espessura da mesa e espessura da alma são constantes. Para cada categoria de elementos mencionada acima, somente a altura da alma varia linearmente ao longo de seu comprimento, cujas medidas inicial e final são indicadas na Figura 4.3 e apresentadas na Tabela 4.1.

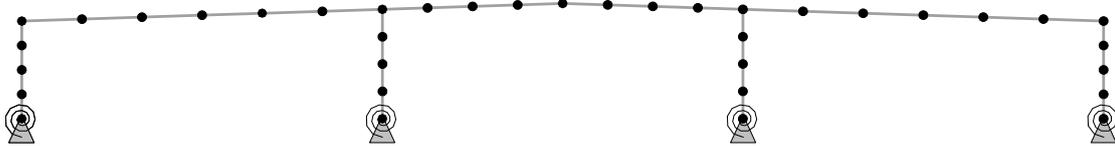


**Figura 4.3** – Pórtico Galpão Industrial: Dimensões da seção transversal

**Tabela 4.1** Pórtico Galpão Industrial: Alturas iniciais e finais das seções em milímetros

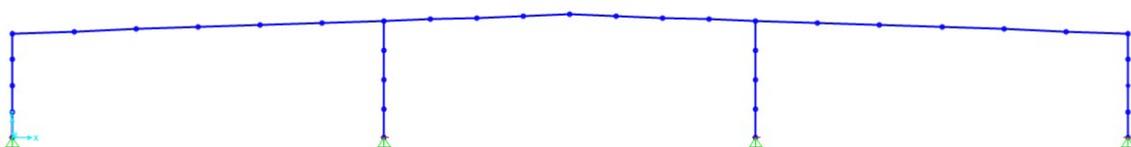
Tipo de seção	EC	ISC	RB1	RB2	RB3
Altura da seção (di - df)	200 - 600	300 - 300	600 - 400	400 - 600	600 - 300

O aço dos perfis que compõem o galpão possui um módulo de elasticidade longitudinal de 200 GPa, um coeficiente de Poisson igual 0,3 e uma massa específica de 7850 kg/m<sup>3</sup>. As ligações semirrígidas nas bases dos pilares funcionam como molas de rotação e possuem uma rigidez de 5 kN·m/rad. Conforme apresenta-se na Figura 4.4, para discretização da estrutura, os elementos dos tipos EC, ICS, RB1 e RB3 foram discretizados em 4 subelementos cada e os elementos do tipo RB2 foram divididos em 2 subelementos cada, totalizando 36 subelementos e 37 nós no modelo.



**Figura 4.4** – Pórtico Galpão Industrial: discretização em subelementos

Para validação dos resultados obtidos foram realizadas comparações com resultados de análises feitas com o *software* SAP2000, onde a estrutura foi modelada também com 37 nós e 36 elementos, conforme apresenta-se na Figura 4.5.



**Figura 4.5** – Pórtico Galpão Industrial: Modelo da estrutura no SAP2000

As frequências naturais de vibração dos primeiros modos foram obtidas em uma análise modal com o *software* SAP2000 e comparados com as obtidas com os processos propostos neste trabalho. As frequências dos quatro primeiros modos são apresentadas na Tabela 4.2 e as formas desses modos são mostradas nas Figuras 4.6, 4.7, 4.8 e 4.9.

**Tabela 4.2** Pórtico Galpão Industrial: Frequências de vibração dos primeiros 4 modos

Modo	Frequência (Hz)		Diferença (%)
	Presente Trabalho	SAP2000	
1	3,2598	3,3374	-2,33
2	6,3185	6,4098	-1,42
3	8,6120	8,9165	-3,42
4	10,5381	10,8227	-2,63

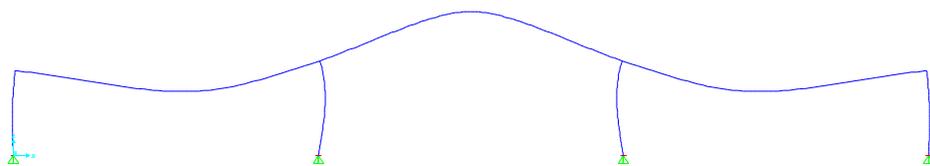


a) SAP2000

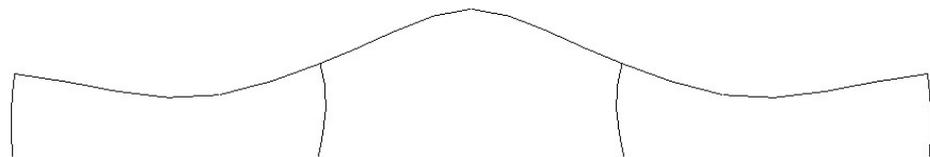


b) Presente Trabalho

**Figura 4.6** – Pórtico Galpão Industrial: Forma do 1º modo.

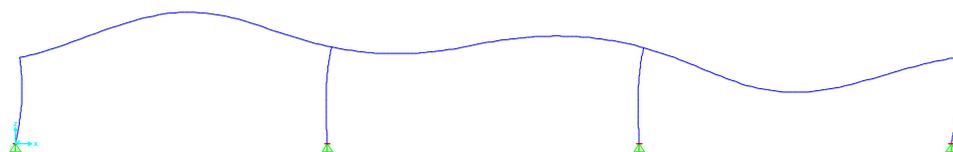


a) SAP2000

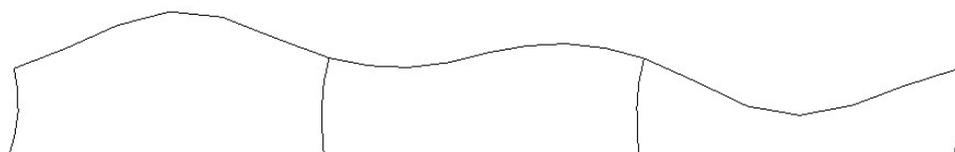


b) Presente Trabalho

**Figura 4.7** – Pórtico Galpão Industrial: Forma do 2º modo.

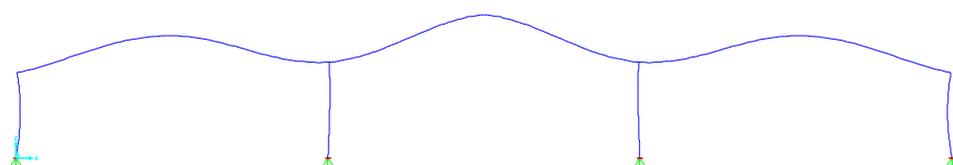


a) SAP2000

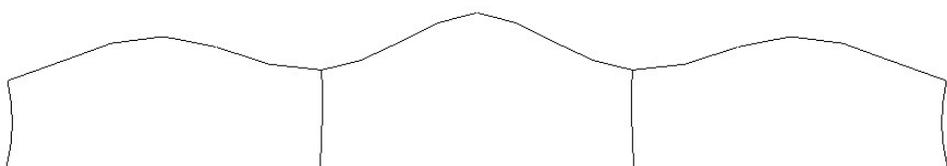


b) Presente Trabalho

**Figura 4.8** – Pórtico Galpão Industrial: Forma do 3º modo.



a) SAP2000



b) Presente Trabalho

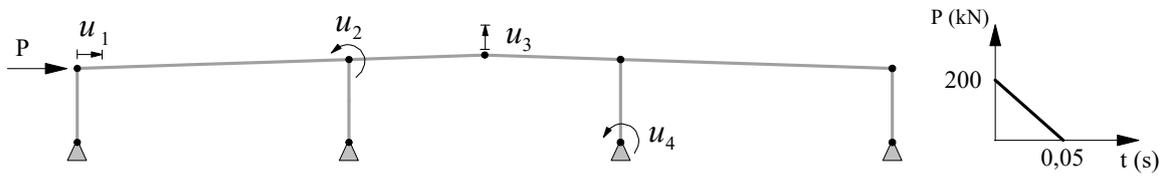
**Figura 4.9** – Pórtico Galpão Industrial: Forma do 4º modo.

É importante mencionar que em ambas as análises foram consideradas variações cúbicas do momento de inércia nos elementos. Nota-se também uma proximidade entre os valores de frequências naturais de vibração obtidas em ambos os casos.

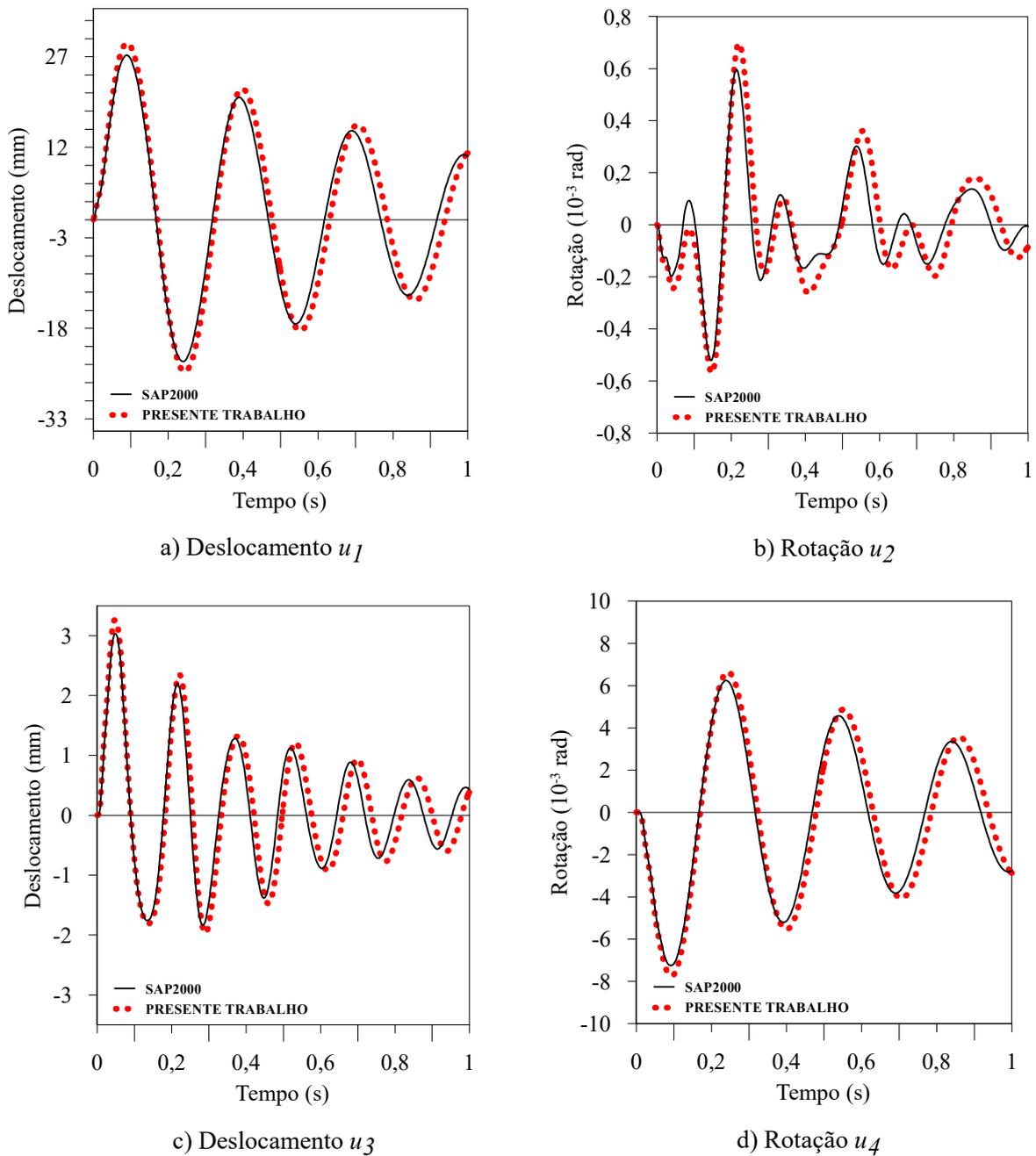
Foram comparadas também, as respostas no domínio do tempo dos deslocamentos e rotações de quatro pontos da estrutura com o intuito de verificar o desempenho dos processos implementados. Os pontos onde os deslocamentos e rotações foram analisados são apresentados na Figura 4.10.

Para essas análises no domínio do tempo considerou-se uma carga aplicada na direção horizontal na extremidade superior do elemento do tipo EC do lado esquerdo, conforme apresenta-se na Figura 4.10. A carga dinâmica aplicada é do tipo pulso triangular

com amplitude de 200 kN e duração de 0,05 s, conforme também se apresenta na Figura 4.10. Para a análise, considerou-se também um passo de tempo  $\Delta t = 0,002$  s e taxas de amortecimento  $\xi = 5\%$  para os modos 1 e 3.



**Figura 4.10** – Pórtico Galpão Industrial: Pontos para comparação de respostas



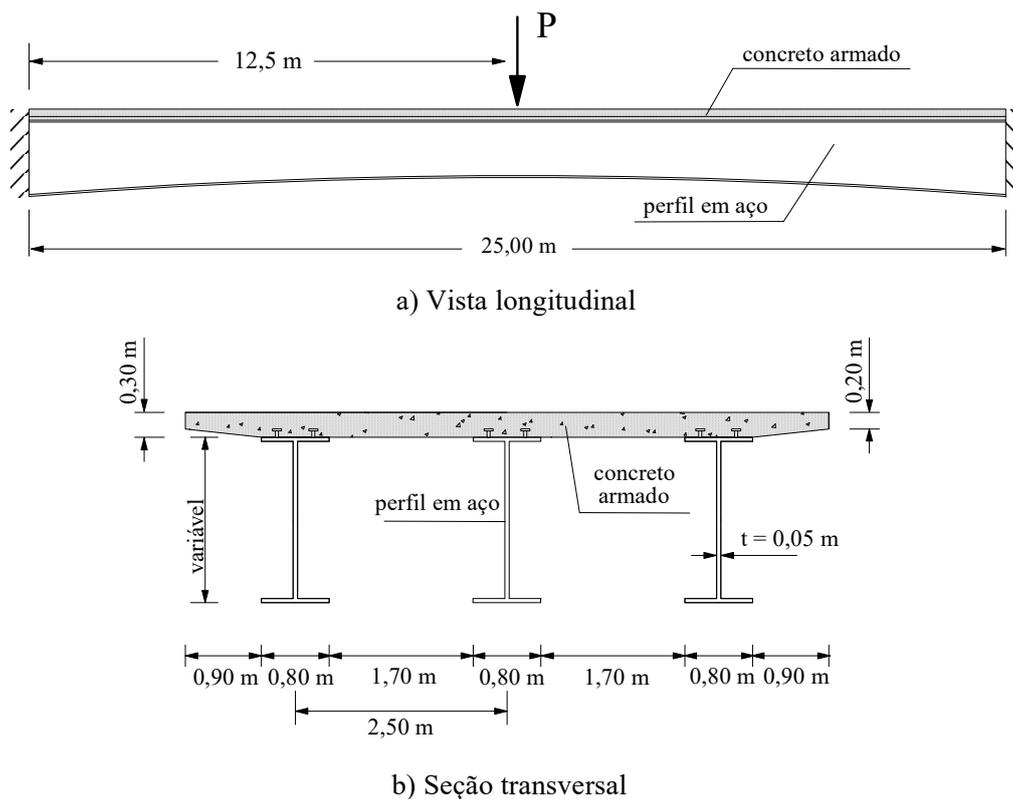
**Figura 4.11** – Pórtico Galpão Industrial: Histórico de deslocamentos

A variação dos deslocamentos e rotações  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  e  $u_4$  obtidos com os processos propostos nesse trabalho e com análise feita com o *software* SAP2000 ao longo do período de 1 segundo, são apresentados na Figura 4.11.

Nota-se um bom desempenho dos processos propostos para montagem das matrizes de propriedades estruturais devido à boa concordância entre os resultados obtidos se comparados com os obtidos na análises utilizando o *software* SAP2000.

### 4.3 Ponte Mista de Aço e Concreto

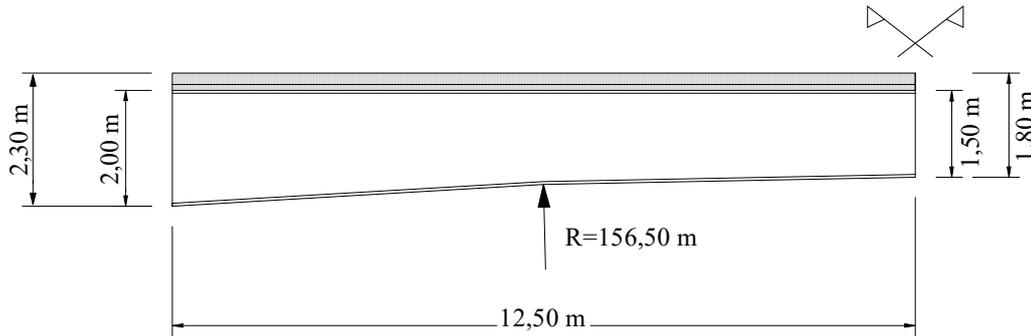
A segunda aplicação consiste na análise de uma ponte mista de aço e concreto de vão único com 25 metros de comprimento com suas extremidades engastadas, conforme Figura 4.12a. A ponte é composta por um tabuleiro em concreto armado apoiado sobre três vigas em aço do tipo “I”. Na Figura 4.12b apresentam-se os detalhes da seção transversal da ponte em questão.



**Figura 4.12** – Ponte Mista: detalhamento da estrutura

A altura das vigas varia ao longo do comprimento da estrutura segundo um semicírculo de raio de 156,5 metros, possuindo altura igual a 2 metros nas extremidades e 1,5 metros no meio do vão, conforme apresenta-se na Figura 4.13. A seção transversal do

tabuleiro de concreto armado se mantém constante ao longo do comprimento da ponte. As propriedades dos materiais considerados na análise são apresentadas na Tabela 4.3.

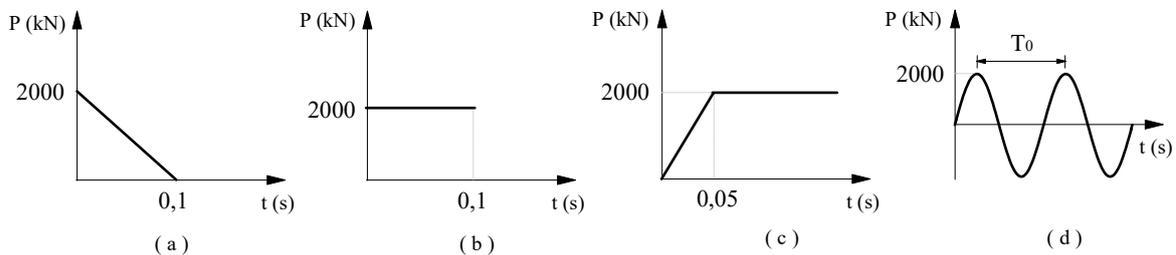


**Figura 4.13** – Ponte Mista: Variação longitudinal da seção

**Tabela 4.3** Ponte Mista: Propriedades dos Materiais

Material	Módulo de Young – E	Coefficiente de Poisson - $\nu$	Massa Específica – $\rho$
Concreto armado	30 GPa	0,2	2500 kg/m <sup>3</sup>
Aço	210 GPa	0,2	7850 kg/m <sup>3</sup>

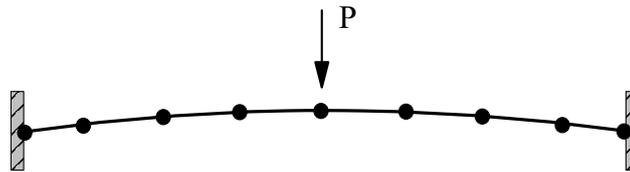
Com o intuito de verificar o desempenho dos processos implementados na obtenção da resposta da estrutura no domínio do tempo, foram aplicados quatro tipos diferentes de carregamentos dinâmicos que são apresentados na Figura 4.14 e descritos a seguir. O primeiro e segundo carregamento consistem em cargas de impacto, com intensidades máximas de 2.000 kN e que atuam durante um tempo de 0,1 s, conforme Figuras 4.14a e 4.14b. O terceiro carregamento consiste em uma carga que é aplicada gradualmente de maneira linear durante 0,05 s até a sua intensidade máxima de 2.000 kN e após a aplicação completa, a carga mantém-se constante, conforme Figura 4.14c. Por fim, o quarto carregamento consiste em uma carga harmônica senoidal com amplitude de 2.000 kN e frequência igual a 16 Hz, conforme Figura 4.14d.



**Figura 4.14** – Ponte Mista: Cargas Dinâmicas Aplicadas

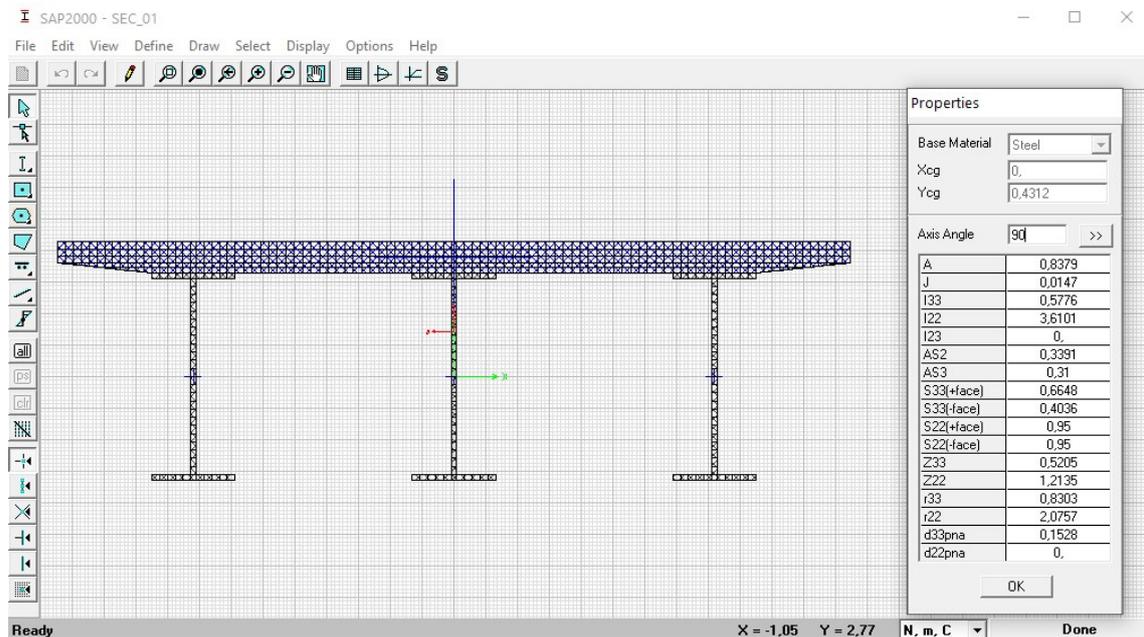
Os carregamentos apresentados foram aplicados no meio do vão da estrutura na direção vertical e com sentido indicado nas Figuras 4.12a e 4.15. Para as análises dinâmicas considerou-se um passo de tempo  $\Delta t = 0,001$  s e taxas de amortecimento  $\xi = 3\%$

para os modos 1 e 3. Conforme apresenta-se na Figura 4.15, para discretização da estrutura utilizou-se de 8 elementos finitos e 9 nós ao todo. Foram utilizadas variações parabólicas para as propriedades geométricas dos elementos.



**Figura 4.15** – Ponte Mista: Modelo com elementos reticulados

Para o modelo com elementos reticulados, foram utilizadas as propriedades de seções transversais obtidas com o auxílio do *software* SAP2000, conforme Figura 4.16. Devido a seção ser composta por dois materiais, foi necessário homogeneizar a seção, em que o material base adotado foi o aço. As propriedades fornecidas pelo processo de homogeneização do SAP2000, juntamente com as propriedades do material concreto, fornecem a mesma rigidez da seção composta por dois materiais, porém não fornece a mesma taxa de massa (kg/m).

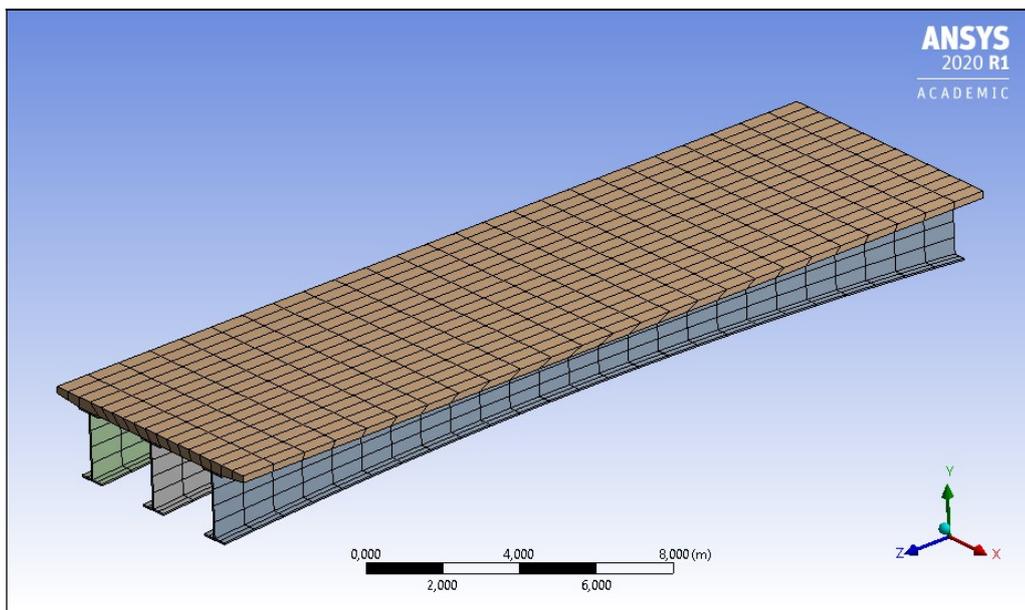


**Figura 4.16** – Ponte Mista: Modelagem das seções no SAP2000

Para corrigir a taxa de massa, uma nova massa específica, diferente para cada seção, precisou ser adotada. Isso foi possível pois a os processos propostos neste trabalho permitem, além da variação das propriedades geométricas da seção, também a variação das

propriedades do material ao longo do comprimento do elemento, neste caso variou-se apenas a massa específica.

Para validação dos resultados obtidos foram realizadas comparações com resultados de análises feitas com o *software* ANSYS, onde a estrutura foi modelada com 10.670 nós e 1.475 elementos do tipo SOLID186, que são elementos hexaédricos 3-D de 20 nós de ordem quadrática, conforme apresenta-se na Figura 4.17.

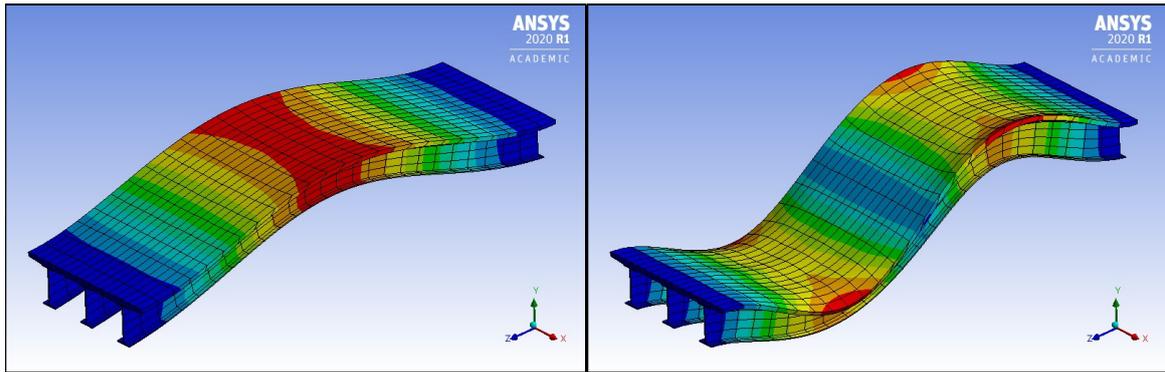


**Figura 4.17** – Ponte Mista: Discretização no ANSYS

As frequências naturais de vibração dos primeiros dois modos dessa estrutura, obtidos com os processos propostos neste trabalho, foram comparadas com as frequências dos modos correspondentes obtidos com o *software* ANSYS. Para a comparação dos resultados obtidos com o modelo tridimensional e com a formulação de elemento reticulado, foram descartados os modos que apresentavam distorções significativas na seção transversal ou deslocamentos predominantemente fora do plano. Os dados são apresentados na Tabela 4.4 e as formas desses dois modos são mostradas na Figura 4.18 e 4.19.

**Tabela 4.4** Ponte Mista: Frequências naturais de vibração dos modos 1 e 2

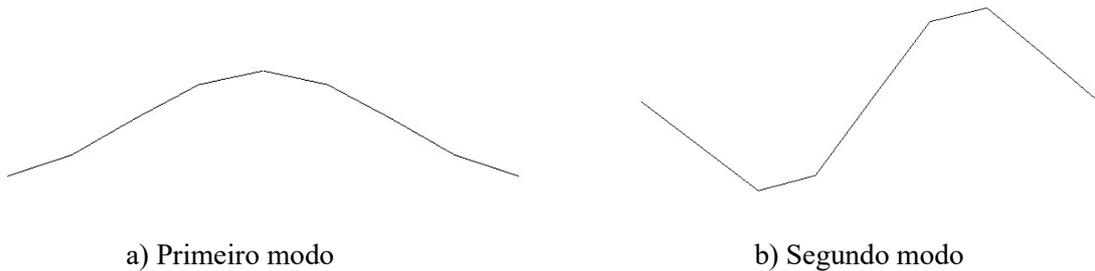
Modo	Frequência (Hz)		Diferença (%)
	Presente Trabalho	ANSYS	
1	15,98	15,90	0,51
2	38,55	37,29	3,38



a) Primeiro modo

b) Segundo modo

**Figura 4.18** – Ponte Mista: Forma dos dois primeiros modos no ANSYS.



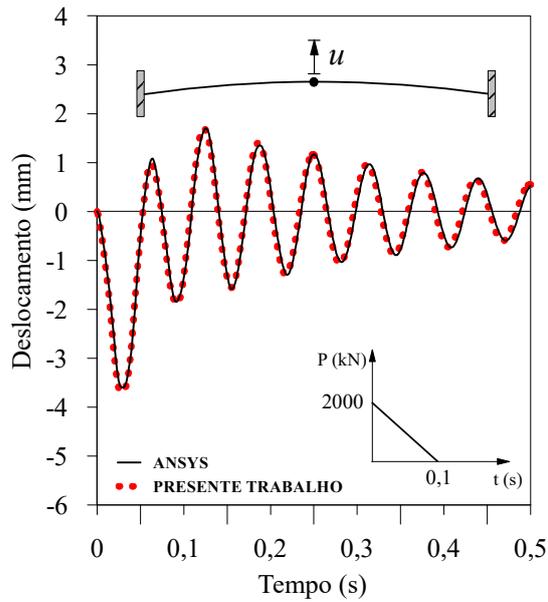
a) Primeiro modo

b) Segundo modo

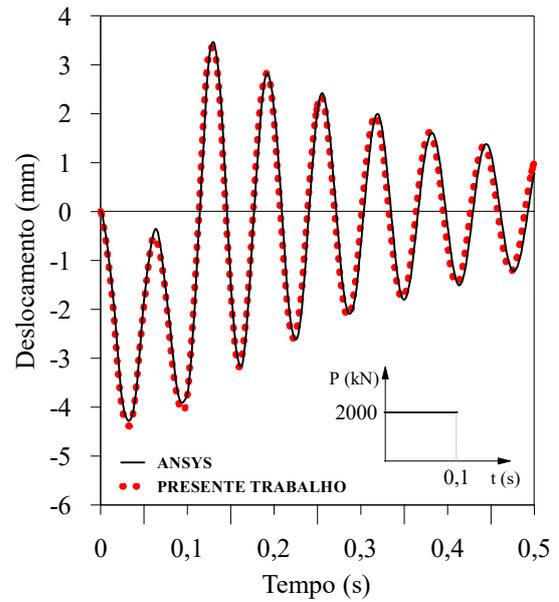
**Figura 4.19** – Ponte Mista: Forma dos dois primeiros modos no presente trabalho.

As Figuras 4.20, 4.21 e 4.22 fornecem, respectivamente, os históricos de deslocamento, velocidade e aceleração do ponto médio do vão na direção vertical, no mesmo nó e direção em que as cargas foram aplicadas, para cada caso de carregamento descritos anteriormente.

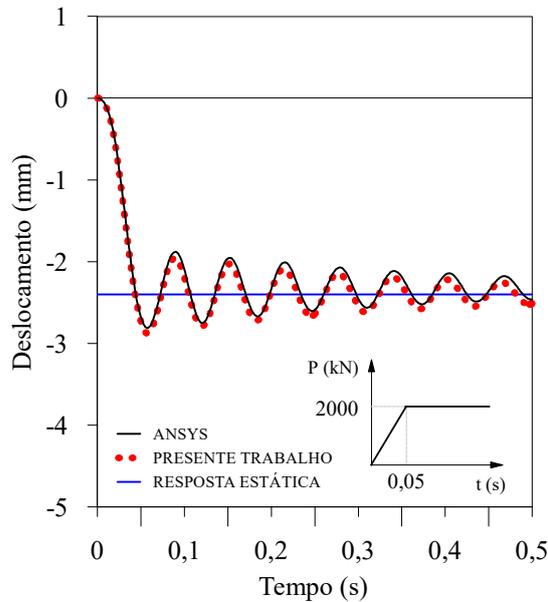
Nota-se uma boa concordância entre os resultados obtidos nas análises com os dois modelos quando comparados os históricos de deslocamento e velocidade para os quatro casos de carregamento apresentados e os históricos de aceleração para os carregamentos em rampa e harmônico. Para o carregamento aplicado gradualmente, observa-se que a oscilação, após a aplicação completa da carga, ocorre em torno da resposta estática para o carregamento. Para os dados de aceleração, as análises com cargas de impacto fornecerem comportamento semelhante para ambos os modelos, porém com amplitudes de aceleração diferentes durante o período em que as cargas atuaram. Após as cargas de impacto cessarem e a estrutura entrar em vibração livre amortecida, os valores de aceleração para ambos os modelos apresentaram boa concordância.



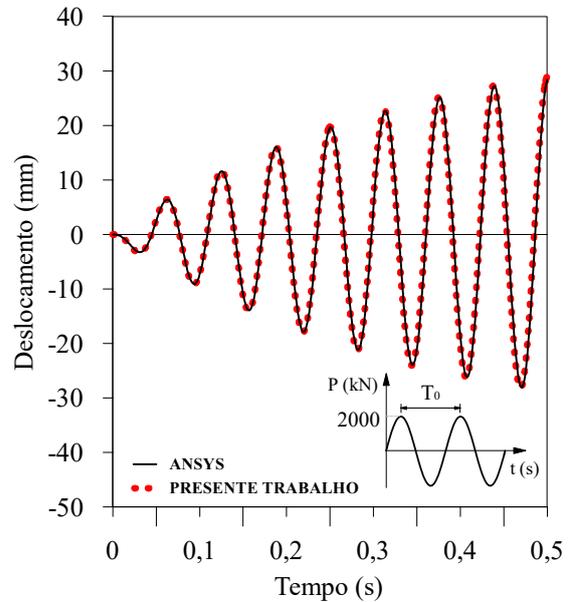
a) Pulso triangular



b) Pulso retangular

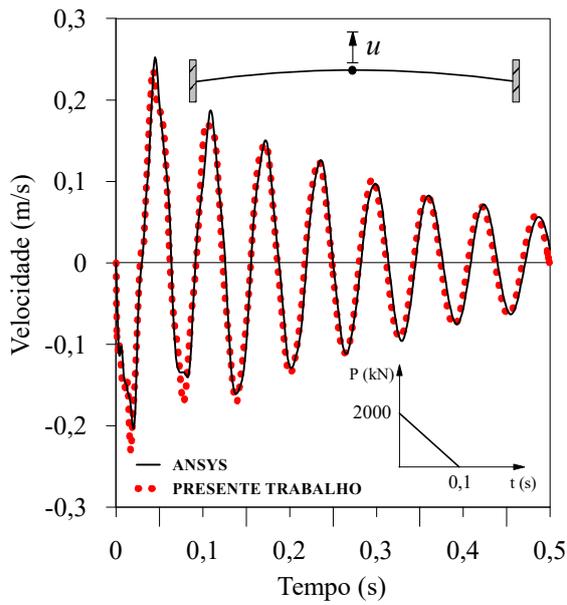


c) Carga aplicada gradualmente

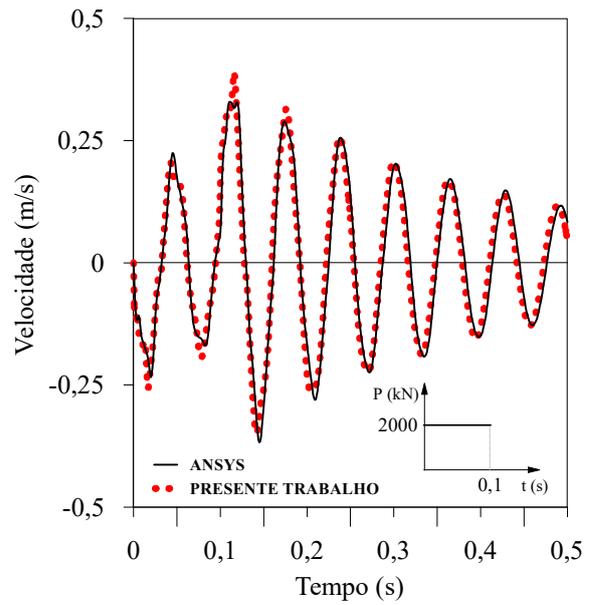


d) Carga harmônica senoidal

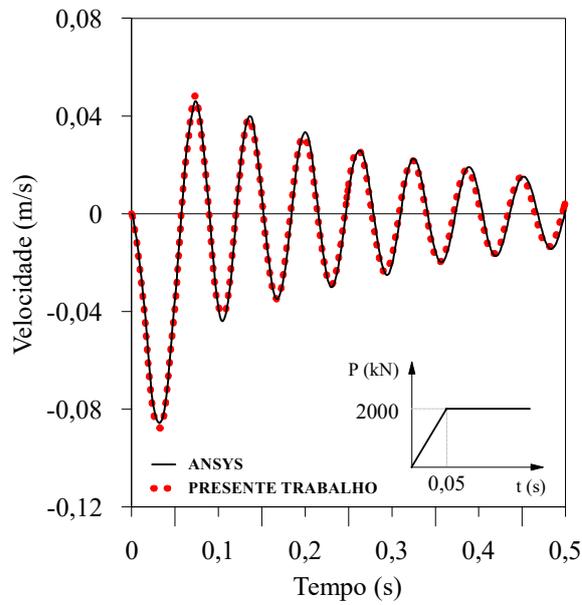
**Figura 4.20 – Ponte Mista: Históricos de Deslocamento**



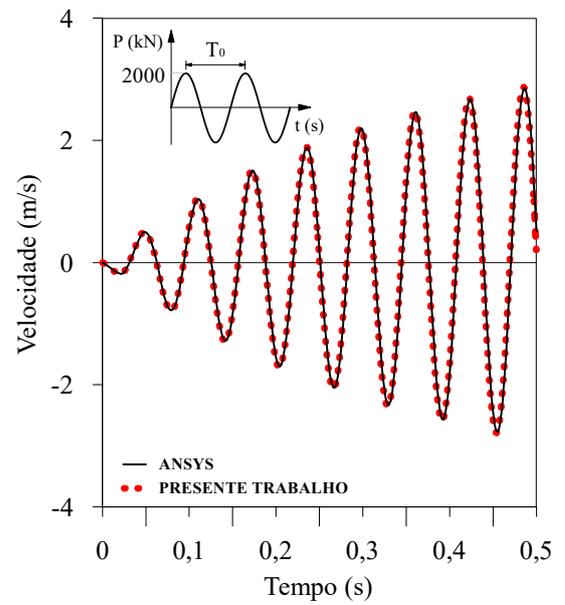
a) Pulso triangular



b) Pulso retangular

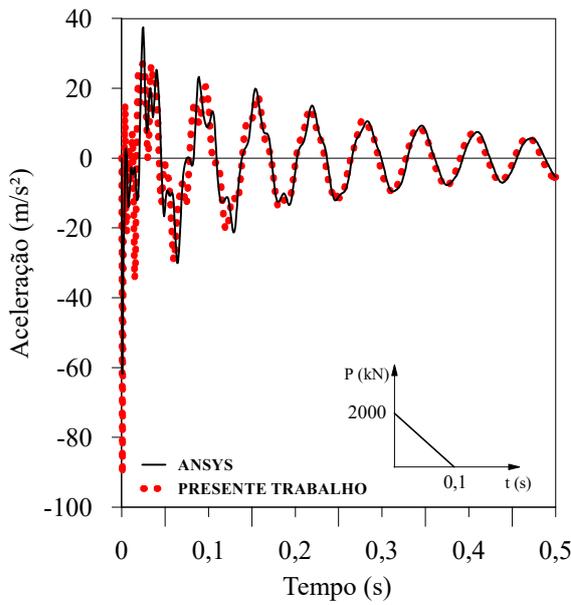


c) Carga aplicada gradualmente

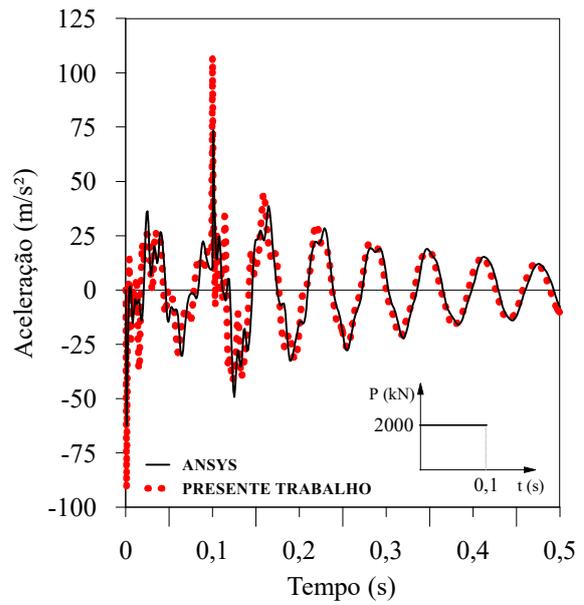


d) Carga harmônica senoidal

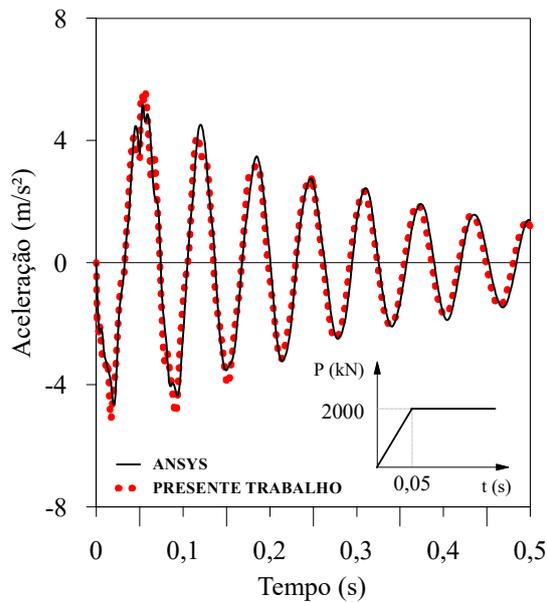
**Figura 4.21 – Ponte Mista: Históricos de Velocidade**



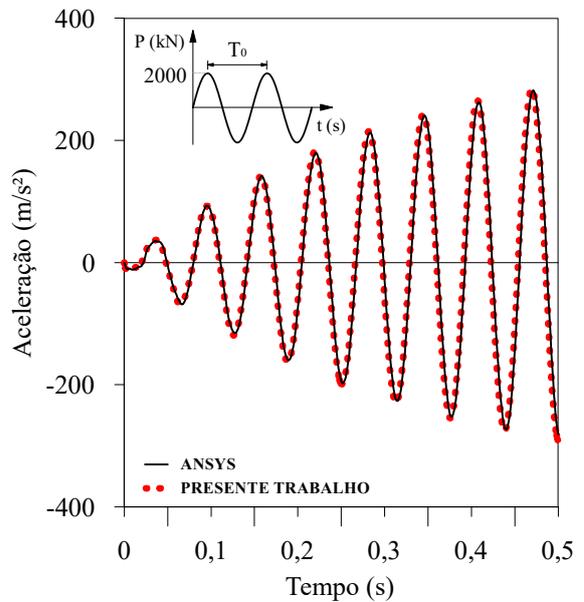
a) Pulso triangular



b) Pulso retangular



c) Carga aplicada gradualmente



d) Carga harmônica senoidal

**Figura 4.22 – Ponte Mista: Históricos de Aceleração**

## 4.4 Ponte em Concreto Armado

A terceira aplicação consiste na análise de uma ponte de concreto com 480 metros de comprimento. A estrutura analisada se baseia na Ponte Internacional Tancredo Neves, também conhecida como Ponte Internacional da Fraternidade, que ligam as cidades de Foz do Iguaçu, no Brasil à Puerto Iguazú, na Argentina, Figura 4.23. Para modelagem da

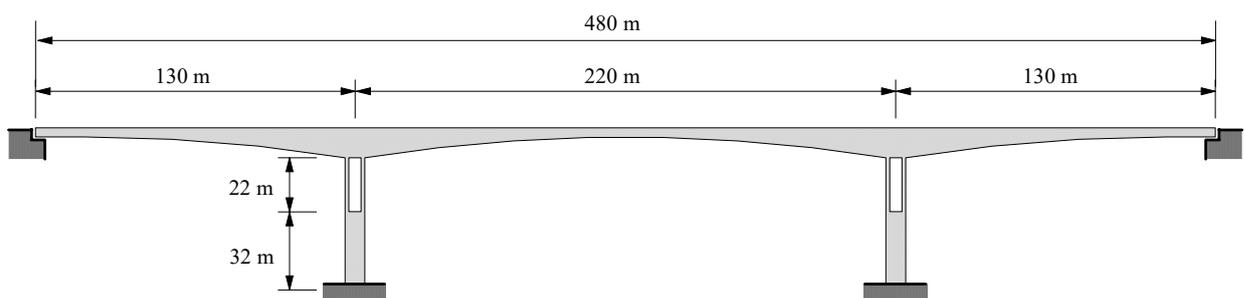
estrutura utilizou-se os detalhes e dimensões fornecidos por Caracciolo e Solaris (1983), as dimensões não fornecidas e necessárias para o modelo foram adotadas.



**Figura 4.23** – Ponte em Concreto: Fotografia da Ponte Internacional Tancredo Neves

Fonte: < <http://www.figueiredoferraz.com.br/br/portfolio/transportes/pontes-e-viadutos/item/30-ponte-tancredo-neves-ligacao-brasil-e-argentina/>>

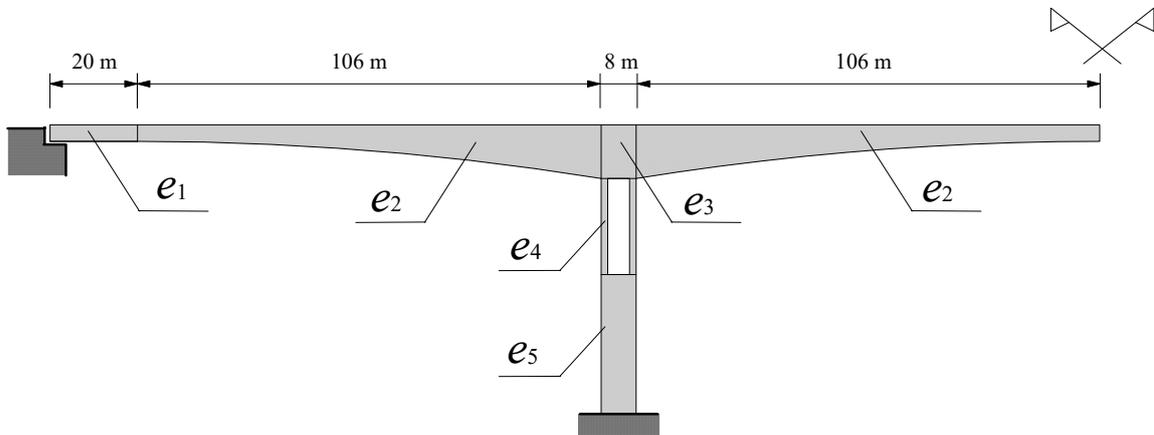
A ponte possui três vãos, dois deles com 130 metros e um vão central de 220 metros de comprimento. Nas extremidades, a ponte se apoia em cabeceiras que restringem os deslocamentos, mas permite a rotação das extremidades, apoios de segundo gênero. Dois pilares, também em concreto, compõem a ponte, eles possuem 54 metros de comprimento e são divididos em dois trechos com seções distintas, um com 22 e outro com 32 metros. Os pilares estão engastados em suas bases. Os detalhes gerais descritos acima são apresentados na Figura 4.24.



**Figura 4.24** – Ponte em Concreto: Detalhes da estrutura

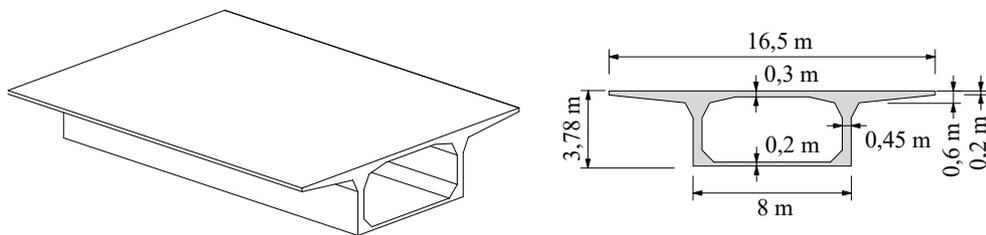
Para a estrutura, foi adotado um concreto com módulo de elasticidade longitudinal  $E = 30 \text{ GPa}$ , um coeficiente de Poisson  $\nu = 0,18$  e uma massa específica  $\rho = 2.500 \text{ kg/m}^3$ . As propriedades geométricas das seções foram obtidas utilizando integrais de contorno, onde a malha de contorno de cada seção precisou ser fornecida.

A estrutura possui trechos com características geométricas distintas que foram agrupadas em 5 categorias de superelementos, conforme Figura 4.25. Os superelementos dos tipos  $e_1$ ,  $e_2$  e  $e_3$  compõem a superestrutura da ponte e possuem seção transversal celular, já os pilares, são compostos por superelementos dos tipos  $e_4$  e  $e_5$ , conforme também se apresenta na Figura 4.25.

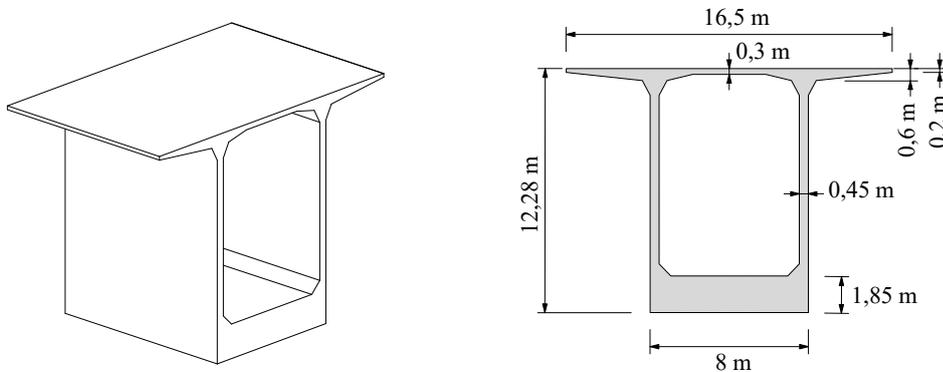


**Figura 4.25** – Ponte em Concreto: Categorias de superelementos

Os superelementos dos tipos  $e_1$  e  $e_3$  possuem comprimentos de 20 m e 8 m respectivamente, suas seções transversais são constantes ao longo do comprimento e seus detalhes são apresentados, respectivamente, pelas Figuras 4.26a e 4.26b.



a) superelemento tipo  $e_1$

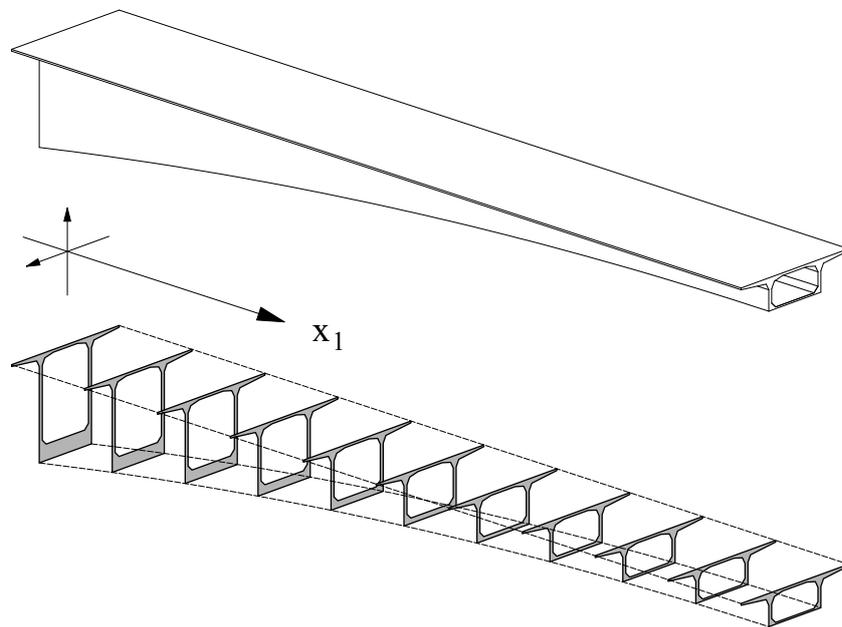


b) superelemento tipo  $e_3$

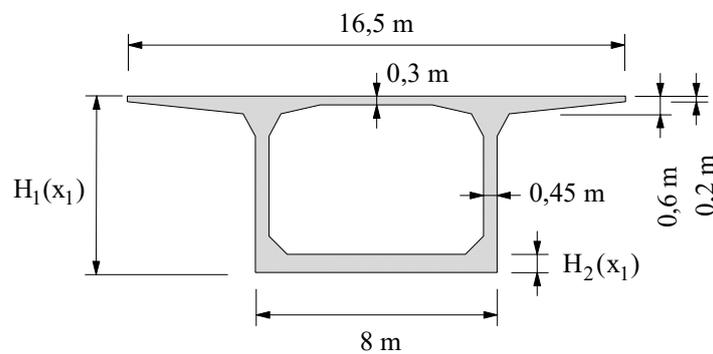
**Figura 4.26** – Ponte em Concreto: Superelementos tipo  $e_1$  e  $e_3$

Os superelementos do tipo  $e_2$  possuem 106 metros de comprimento e suas seções transversais variam ao longo do comprimento, conforme Figura 4.27a. Essa variação ocorre devido as mudanças de duas medidas da seção, a altura total e a espessura da parte inferior da seção, chamadas aqui de  $H_1$  e  $H_2$  respectivamente, conforme indicadas na Figura 4.27b.

A função de variação das propriedades geométricas dos superelementos do tipo  $e_2$  foi adotada como sendo de quarto grau e foi obtida a partir da interpolação das propriedades de 5 seções transversais igualmente espaçadas aos longo do comprimento do elemento. Os valores de  $H_1$  e  $H_2$  das 5 seções utilizadas na interpolação são apresentadas na Tabela 4.5 e as demais medidas da seção se encontram na Figura 4.27b.



a) variação da seção



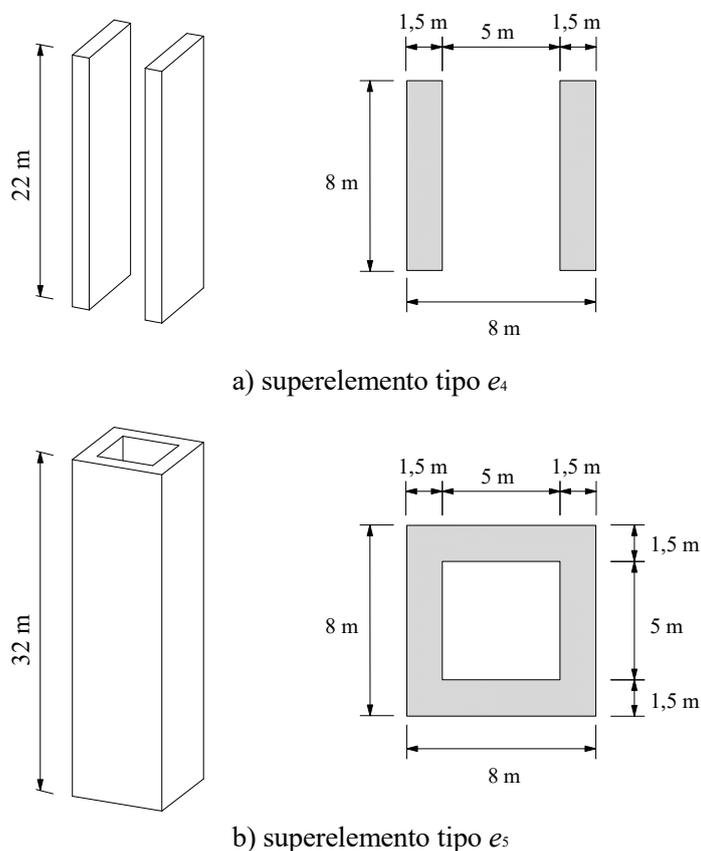
b) detalhes da seção

**Figura 4.27** – Ponte em Concreto: Superelementos tipo  $e_2$

**Tabela 4.5** Ponte em Concreto: Variação de  $H_1$  e  $H_2$  ao longo do comprimento

Medidas	$x_1$				
	0,00 m	26,50 m	53,00 m	79,50 m	106,00 m
$H_1$	12,28 m	8,55 m	5,89 m	4,31 m	3,78 m
$H_2$	1,85 m	1,12 m	0,61 m	0,30 m	0,20 m

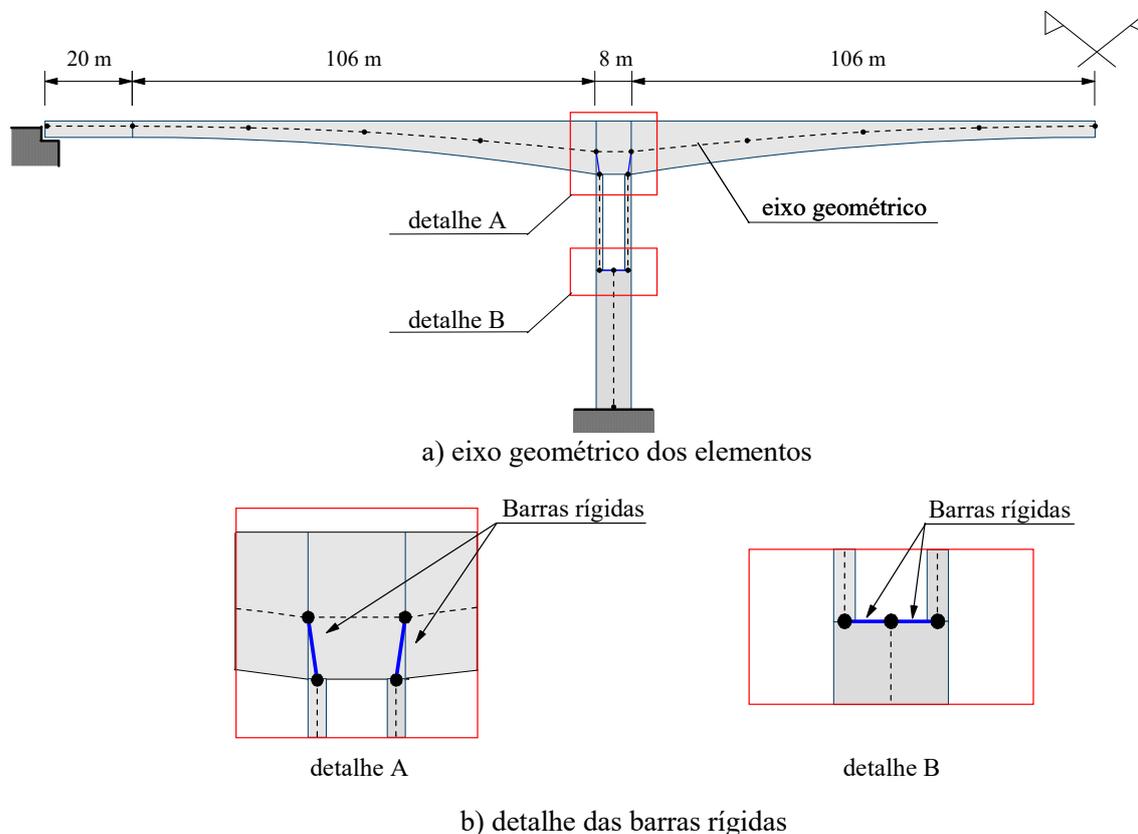
Os pilares são compostos por superelementos de seções constantes dos tipos  $e_4$  e  $e_5$ . O superelemento do tipo  $e_4$  possui 22 metros de altura e sua seção é composta por duas partes retangulares de 8 x 1,5 metros, distantes 5 metros uma da outra, os detalhes da seção são apresentados na Figura 4.28a. Por fim, o superelemento do tipo  $e_5$  possui 32 metros de altura e sua seção é do tipo caixão com medidas externas de 8 x 8 metros e a espessura de suas paredes mede 1,5 metro, os detalhes da seção são apresentados na Figura 4.28b.



**Figura 4.28** – Ponte em Concreto: Superelementos tipo  $e_4$  e  $e_5$

Na modelagem da estrutura com elementos reticulados, foram utilizados eixos retos para os superelementos de seção constante. Já para os superelementos do tipo  $e_2$ , devido a variação da geometria da seção transversal ao longo do comprimento, estes foram modelados inicialmente como elementos curvos quadráticos de três nós, acompanhando a

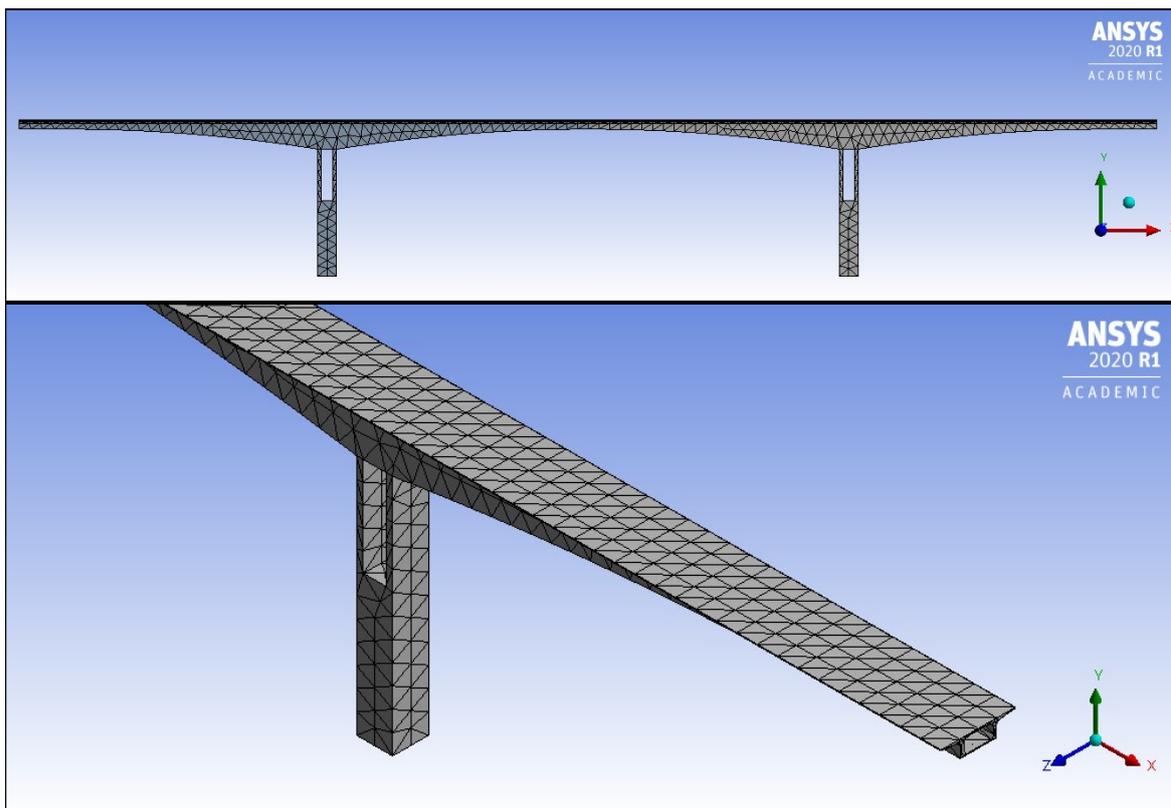
trajetória do eixo geométrico. Detalhes do eixo geométrico dos superelementos são apresentados na Figura 4.29a. Foram utilizadas também barras rígidas para conectar os eixos dos superelementos  $e_2$  e  $e_3$  aos dos superelementos  $e_4$  e dos superelementos  $e_4$  aos dos  $e_5$ , conforme indicado na Figura 4.29b.



**Figura 4.29** – Ponte em Concreto: Detalhes das barras rígidas

Para discretização do problema com elementos reticulados, foram considerados dois modelos. O primeiro modelo possui 27 nós e 28 elementos, onde apenas os superelementos dos tipos  $e_2$  e  $e_3$  foram divididos, cada um, em dois subelementos unidimensionais lineares. Já o segundo modelo possui 99 nós e 100 elementos, onde os superelementos do tipo  $e_1$ ,  $e_4$  e  $e_5$  foram divididos em 5 subelementos cada, os superelementos do tipo  $e_2$  foram divididos em 12 subelementos unidimensionais lineares cada e os superelementos do tipo  $e_3$  foram divididos em 2 subelementos cada. O objetivo da divisão dos superelementos do tipo  $e_3$ , tanto no primeiro quanto no segundo modelo, é criar um nó no ponto médio destes superelementos para avaliar a resposta de deslocamento ou rotação neste ponto.

Para validação dos resultados das análises, a ponte também foi modelada no *software* ANSYS com 21.070 nós e 10.931 elementos do tipo SOLID187, que são elementos tetraédricos 3-D de 10 nós de ordem quadrática, conforme apresenta-se na Figura 4.30.



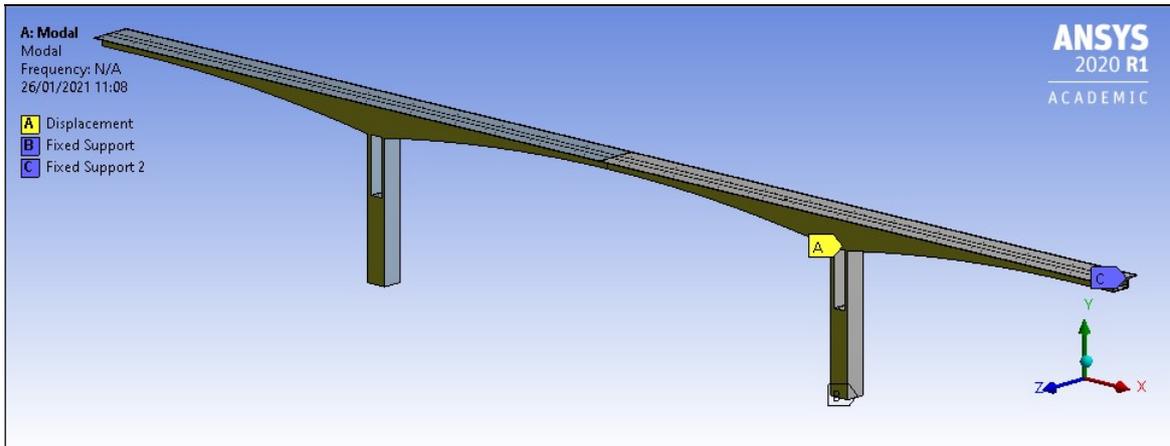
**Figura 4.30** – Ponte de Concreto: Malha de elementos do ANSYS

Para a ponte em questão, foram realizadas uma análise modal com o intuito de comparação das frequências naturais de vibração dos primeiros modos e análises no domínio do tempo de um abalo sísmico e de um carregamento harmônico, este último com o intuito de se verificar a influência de atenuadores dinâmicos na resposta da estrutura. Para as análises no domínio do tempo, considerou-se um passo de tempo  $\Delta t = 0,03$  s e taxas de amortecimento  $\xi = 3\%$  para os modos 1 e 3.

#### **4.4.1 Análise modal**

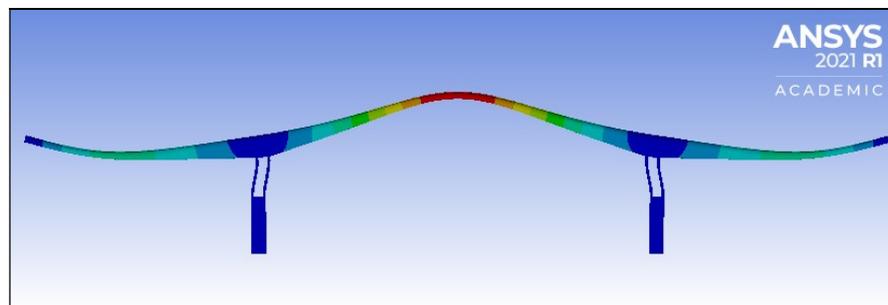
As frequências naturais de vibração dos primeiros modos foram obtidas em uma análise modal com o *software* ANSYS e comparados com as obtidas com os modelos reticulados utilizando dos processos propostos neste trabalho. Para que houvesse uma correspondência entre as frequências obtidas com os modelos de pórtico plano, na análise do modelo contínuo tridimensional foi considerado um deslocamento prescrito igual a zero na direção perpendicular ao plano XY (plano da estrutura), em uma das faces laterais da ponte. O

deslocamento prescrito mencionado foi aplicado na face destacada pela cor amarela da Figura 4.31.

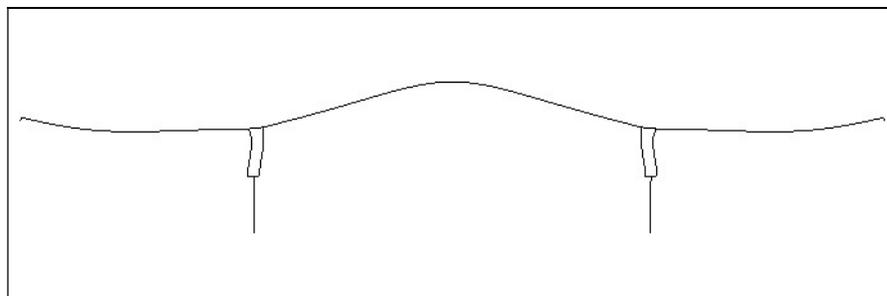


**Figura 4.31** – Ponte de Concreto: Deslocamento prescrito

As frequências dos quatro primeiros modos são apresentadas na Tabela 4.6 e os respectivos modos são mostradas nas Figuras 4.32, 4.33, 4.34 e 4.35. Nota-se uma boa concordância entre os resultados de frequências obtidos nas análises de elementos reticulados, considerando os modelos 1 e 2, em relação aos resultados obtidos com o ANSYS.

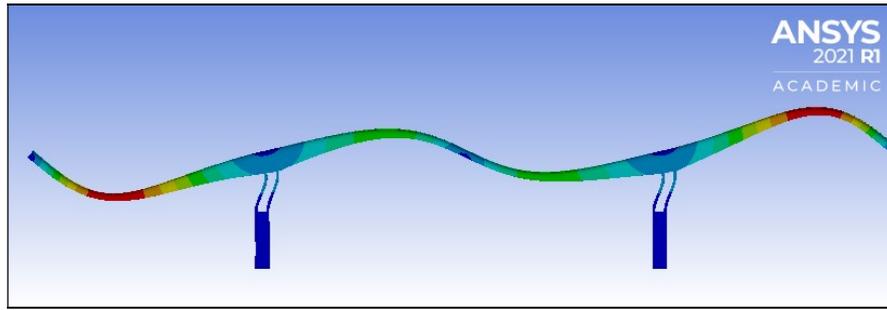


a) ANSYS

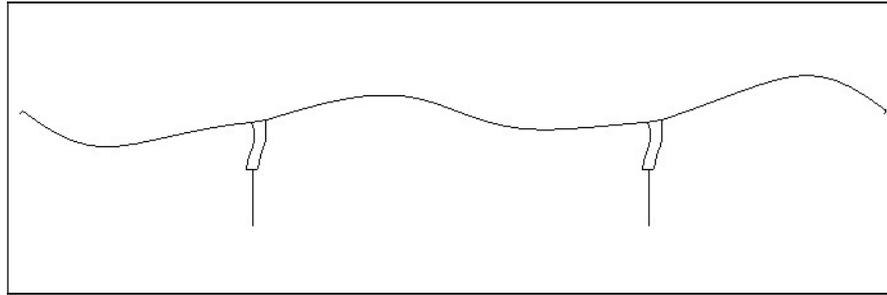


b) Presente Trabalho

**Figura 4.32** – Ponte de Concreto: Primeiro modo de vibração

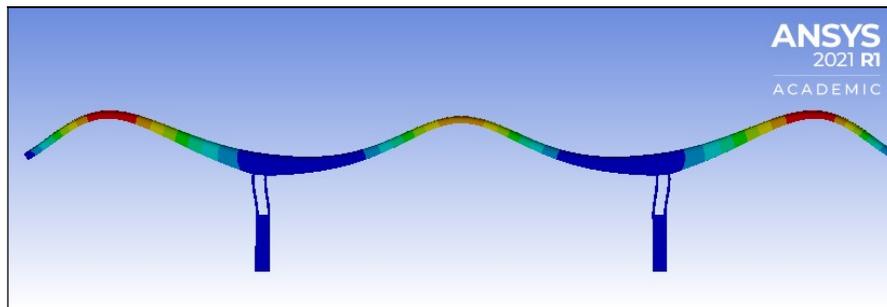


a) ANSYS

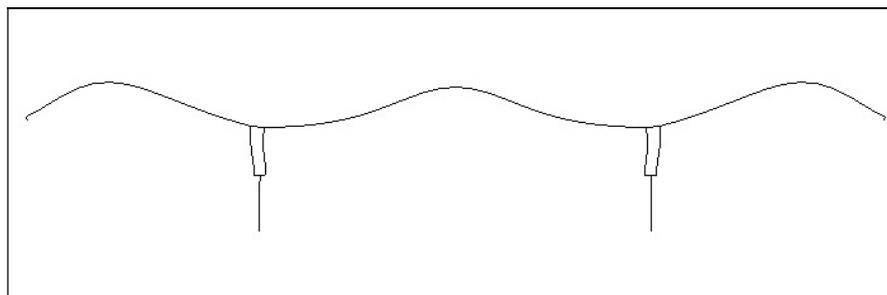


b) Presente Trabalho

**Figura 4.33** – Ponte de Concreto: Segundo modo de vibração

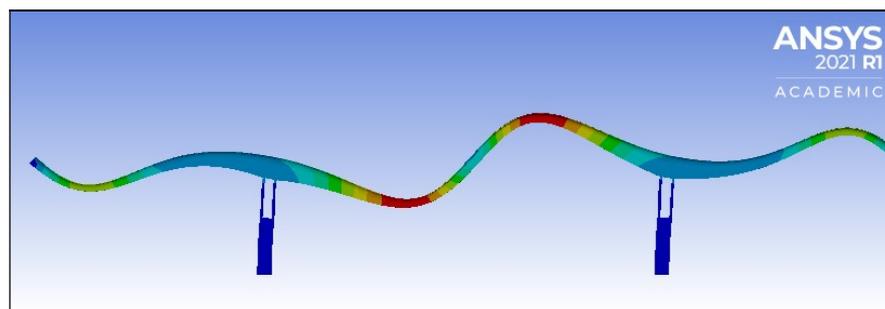


a) ANSYS

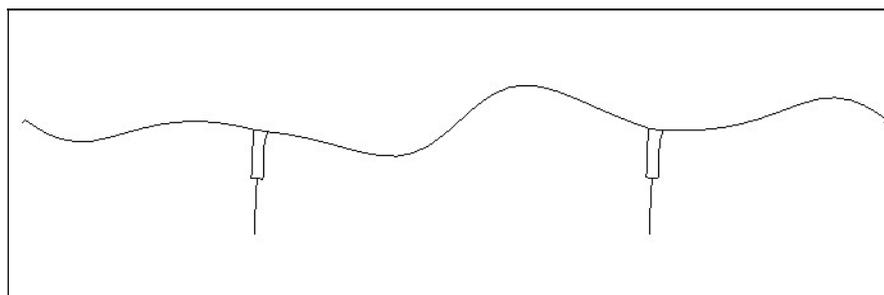


b) Presente Trabalho

**Figura 4.34** – Ponte de Concreto: Terceiro modo de vibração



a) ANSYS



b) Presente Trabalho

**Figura 4.35** – Ponte de Concreto: Quarto modo de vibração

**Tabela 4.6** Ponte em Concreto: Frequências dos primeiros 4 modos

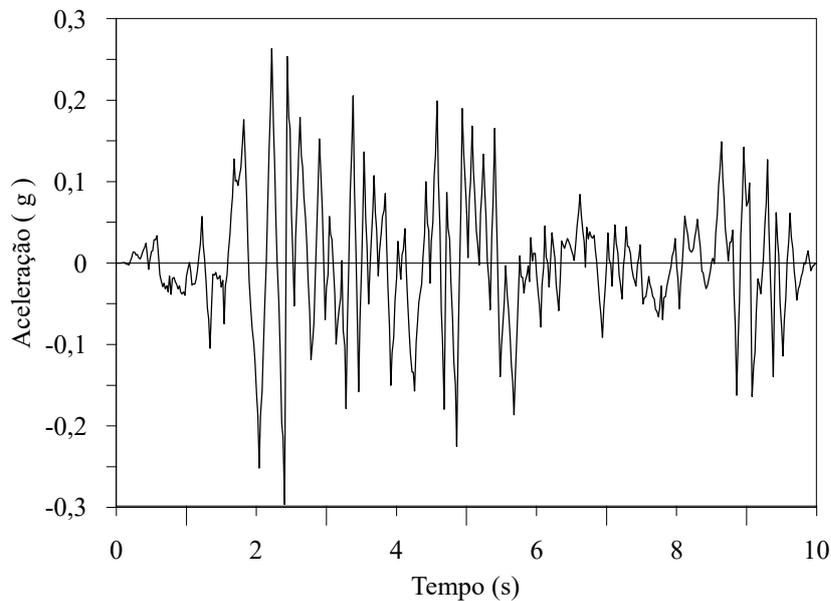
Modo	Frequência (Hz)		
	Presente Trabalho		ANSYS
	Modelo 1	Modelo 2	
1	0,6029	0,6026	0,6048
2	0,9552	0,9505	0,9510
3	1,3996	1,3982	1,3911
4	1,5772	1,5493	1,5603

#### 4.4.2 Análise sísmica

Este exemplo é proposto no intuito de avaliar o comportamento da ponte em questão sob ação sísmica. Novamente será verificada a eficiência dos processos apresentados e serão usados para comparação, dados obtidos com o *software* ANSYS, cujo modelo foi descrito anteriormente.

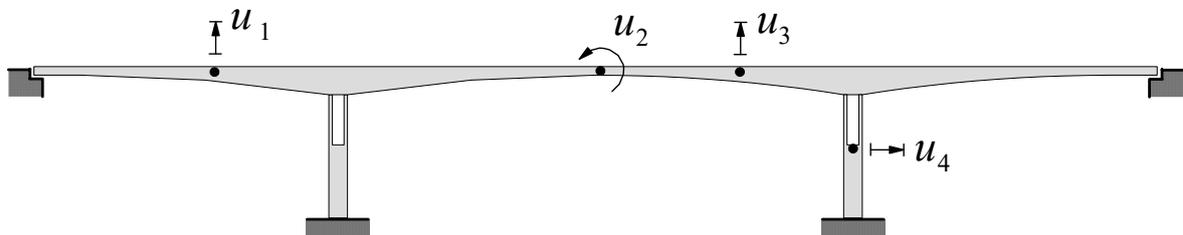
O acelerograma utilizado foi sintetizado com base no espectro de resposta do abalo sísmico El Centro de 1940, cujos dados utilizados foram fornecidos por Irvine (1998). O acelerograma sintético foi gerado com base em prescrições do Eurocódigo 8 onde considerou-se um terremoto do tipo 1, a classe de importância IV, uma aceleração de pico

de base igual a 0,2 g e o solo sob a ponte do tipo A. Para a análise transiente, o acelerograma utilizado foi gerado por um período de 10 s, e é apresentado na Figura 4.36.



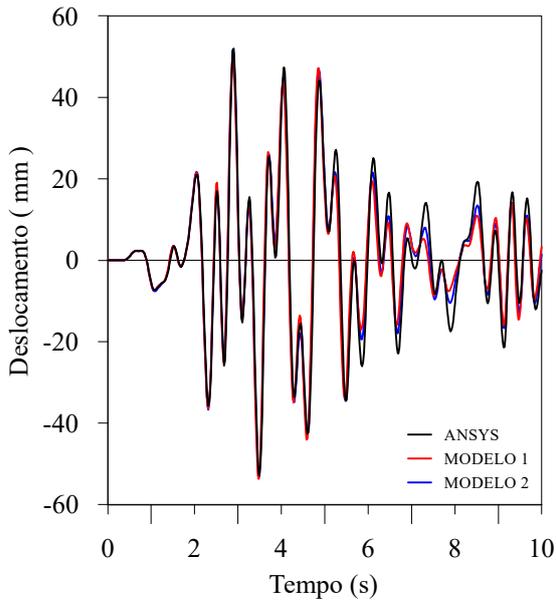
**Figura 4.36** – Ponte de Concreto: Acelerograma

As respostas em termos de deslocamentos e rotações ao longo do tempo foram avaliadas em quatro diferentes pontos da estrutura, conforme Figura 4.37.

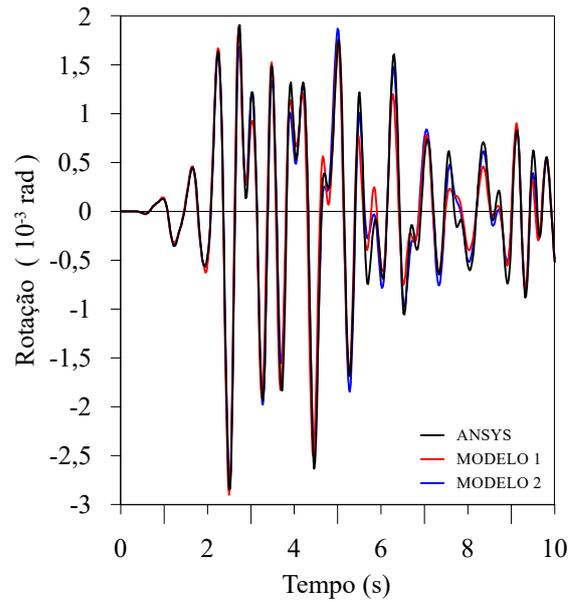


**Figura 4.37** – Ponte de Concreto: Pontos para comparação de respostas

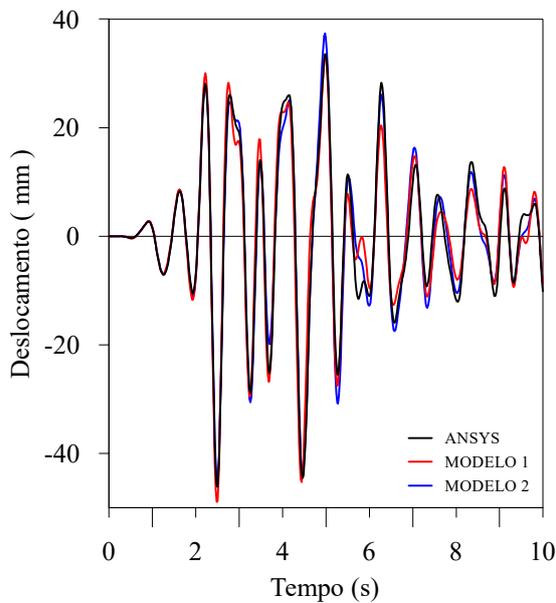
As respostas transientes para os pontos mencionados são apresentadas nas Figuras de 4.38a a 4.38d. Nota-se que as estruturas modeladas com elementos de pórtico plano forneceram, para ambos os modelos avaliados, uma boa concordância com as respostas obtidas com o *software* ANSYS. Nota-se também que para o modelo 2, que é mais refinado em relação ao modelo 1, as respostas se aproximaram ainda mais daquelas obtidas com o ANSYS.



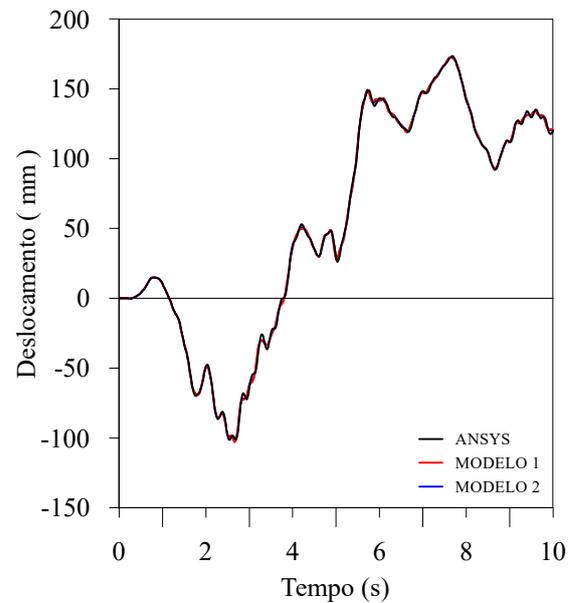
a) Deslocamento  $u_1$



b) Rotação  $u_2$



c) Deslocamento  $u_3$

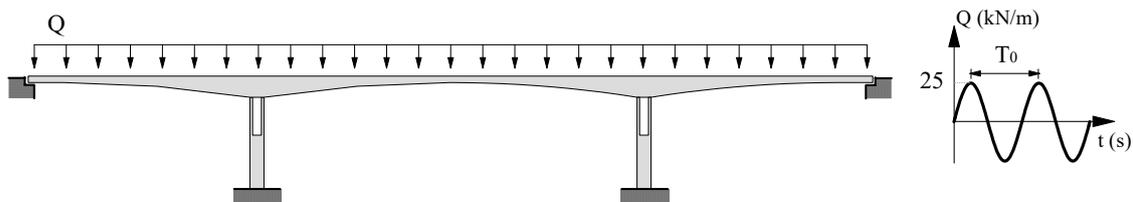


d) Deslocamento  $u_4$

**Figura 4.38** – Ponte de Concreto: Respostas da estrutura sob ação do sismo

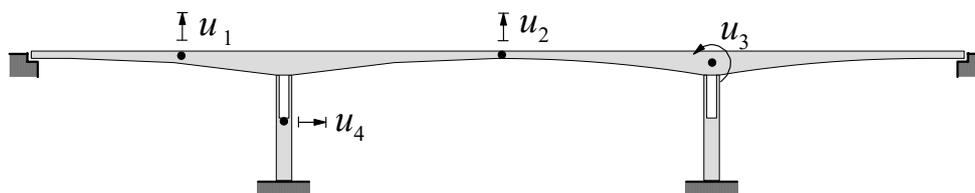
#### 4.4.3 Carregamento harmônico e atenuadores dinâmicos

O intuito desta análise é avaliar os processos apresentados para simulação de atenuadores dinâmicos. Inicialmente a estrutura foi submetida a um carregamento harmônico vertical de 25 kN/m, com frequência de 3,80 rad/s ou 0,6048 Hz, distribuído sobre a extensão da ponte, conforme indicado na Figura 4.39.



**Figura 4.39** – Ponte de Concreto: Carregamento harmônico distribuído

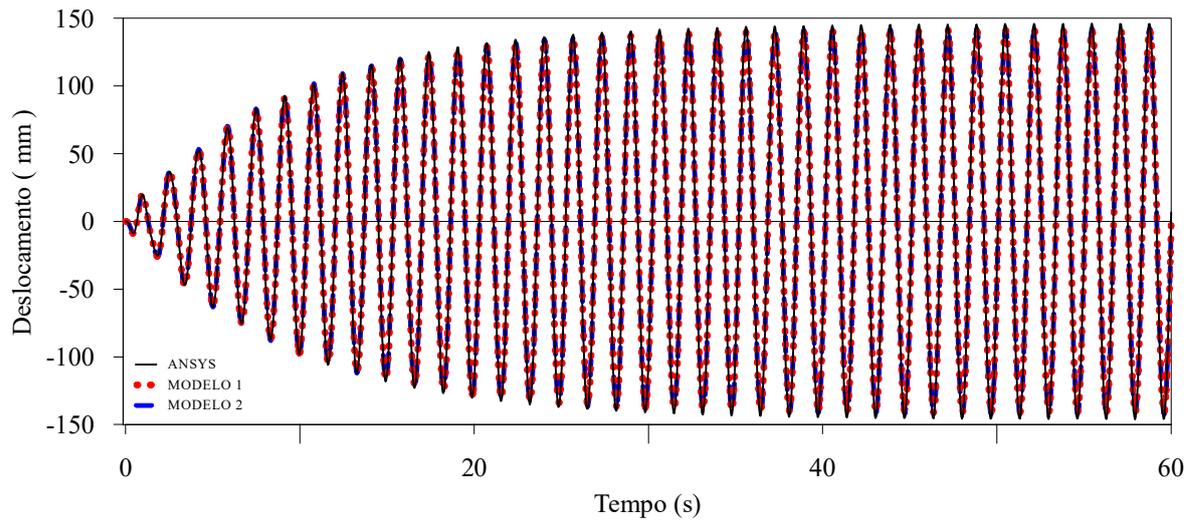
As respostas em termos de deslocamentos, velocidades e acelerações foram avaliadas em quatro diferentes pontos da estrutura, conforme Figura 4.40. A validação dos resultados foi feita com a comparação de dados de análises realizadas com o *software* ANSYS.



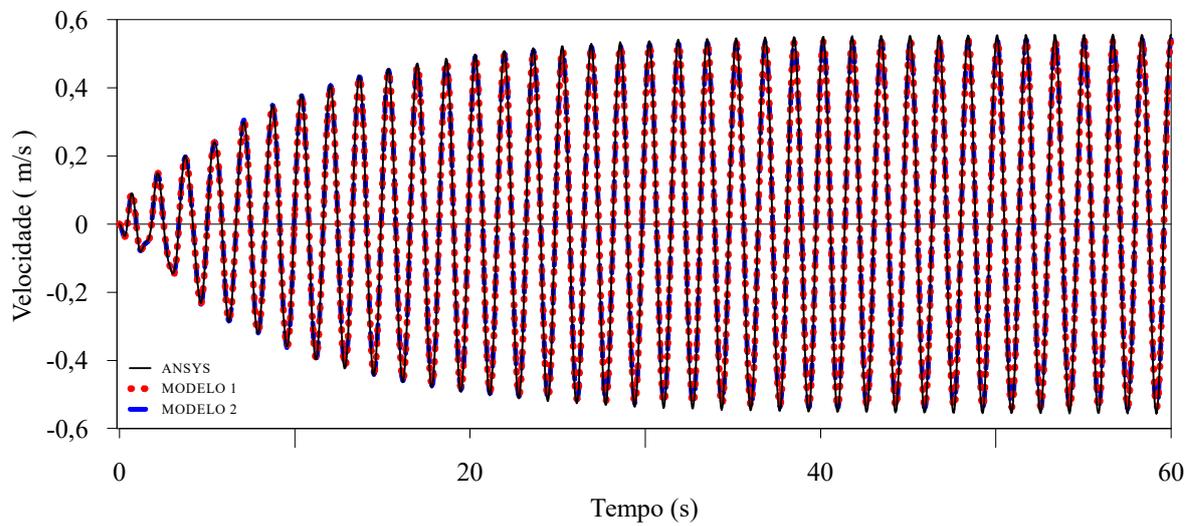
**Figura 4.40** – Ponte de Concreto: Pontos para comparação de respostas

As Figuras 4.41 a 4.44 apresentam os históricos de deslocamentos, velocidades e acelerações para os pontos mencionados. Nota-se aqui, novamente, uma boa concordância entre as respostas obtidas com os modelos 1 e 2 em relação aos dados obtidos com o *software* ANSYS. Apenas para a direção  $u_4$  os resultados de deslocamento, velocidade e rotação apresentaram picos maiores com os modelos de pórtico plano em relação ao modelo tridimensional.

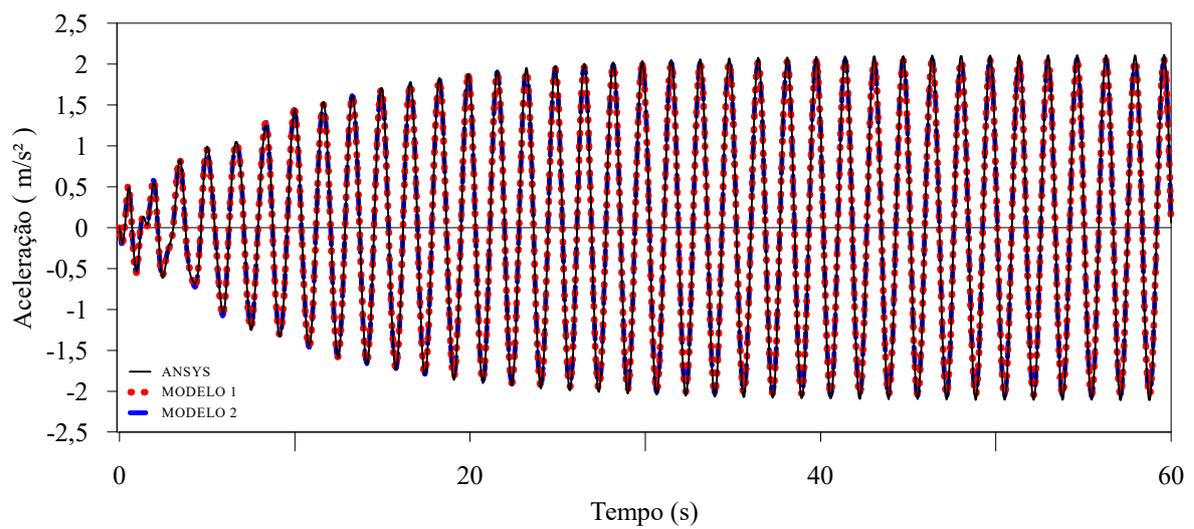
As respostas em termos de tensão normal foram estimadas a partir dos esforços solicitantes nos elementos da estrutura e foram avaliadas em três seções, conforme Figura 4.42a. Em cada uma das seções, mediu-se as tensões normais em uma fibra acima e uma abaixo do centro geométrico da seção, denominadas aqui de fibra superior e inferior, respectivamente. A localização de cada uma das fibras mencionadas é apresentada nas Figura 4.42b e 4.42c.



a) deslocamento

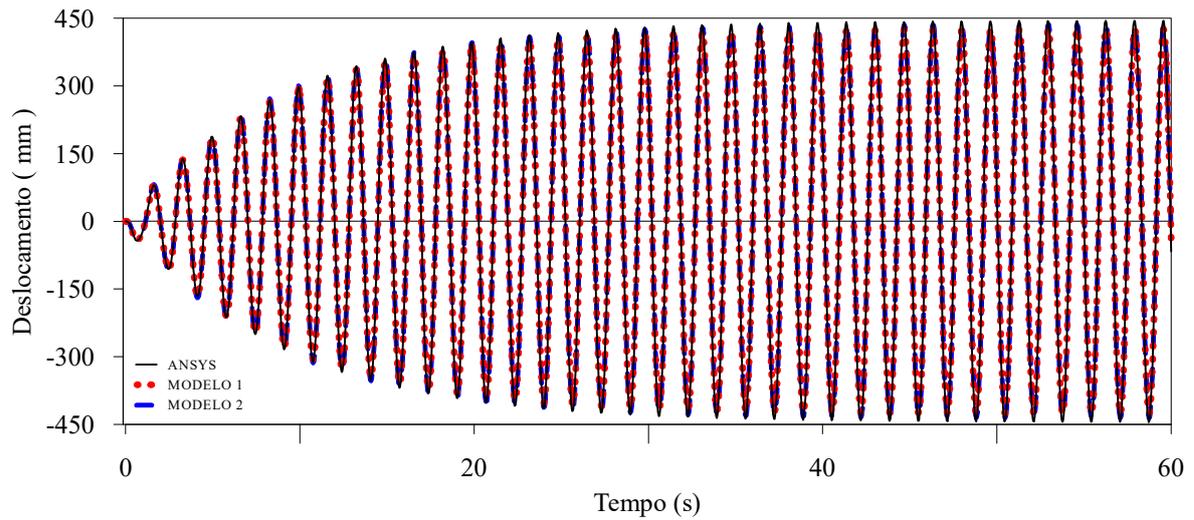


b) velocidade

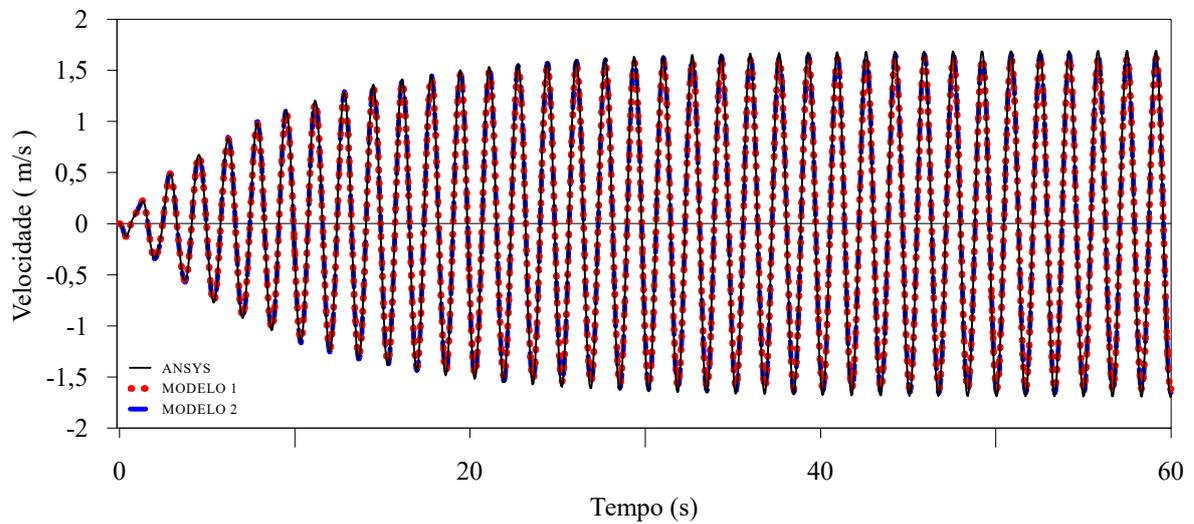


c) aceleração

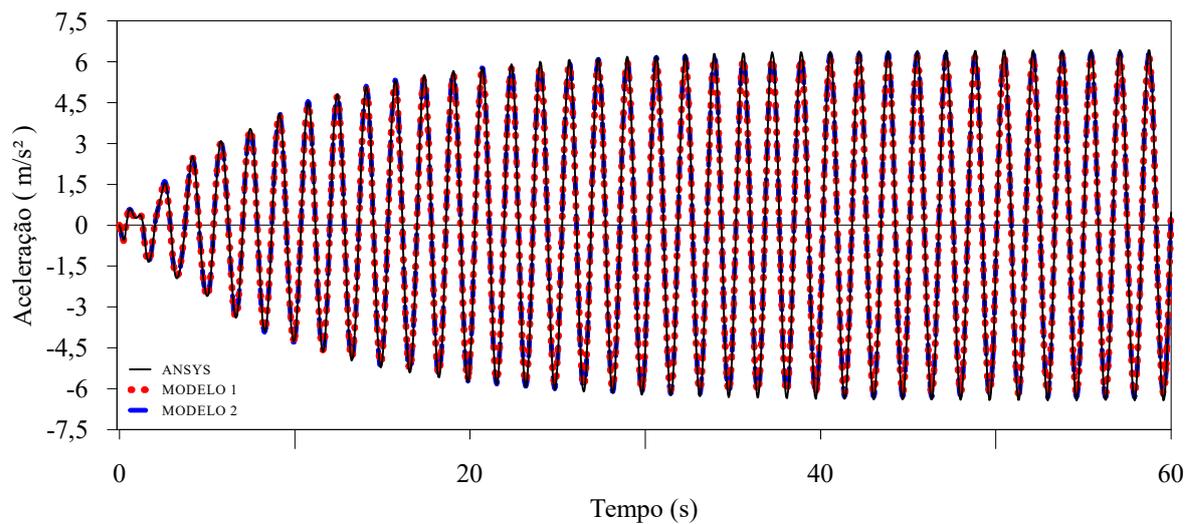
**Figura 4.41** – Ponte de Concreto: Carregamento harmônico – históricos da direção de  $u_1$



a) deslocamento

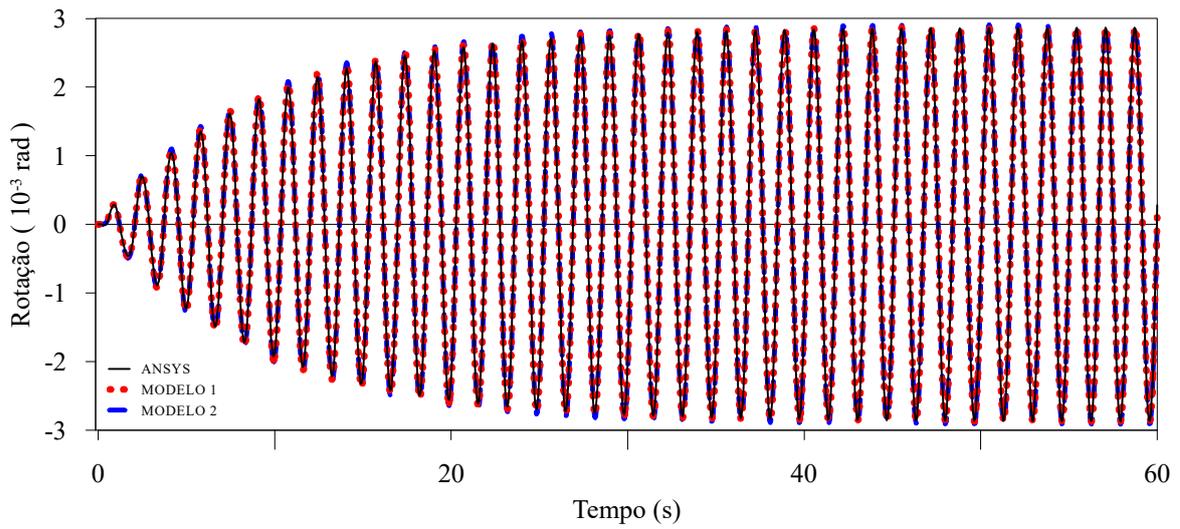


b) velocidade

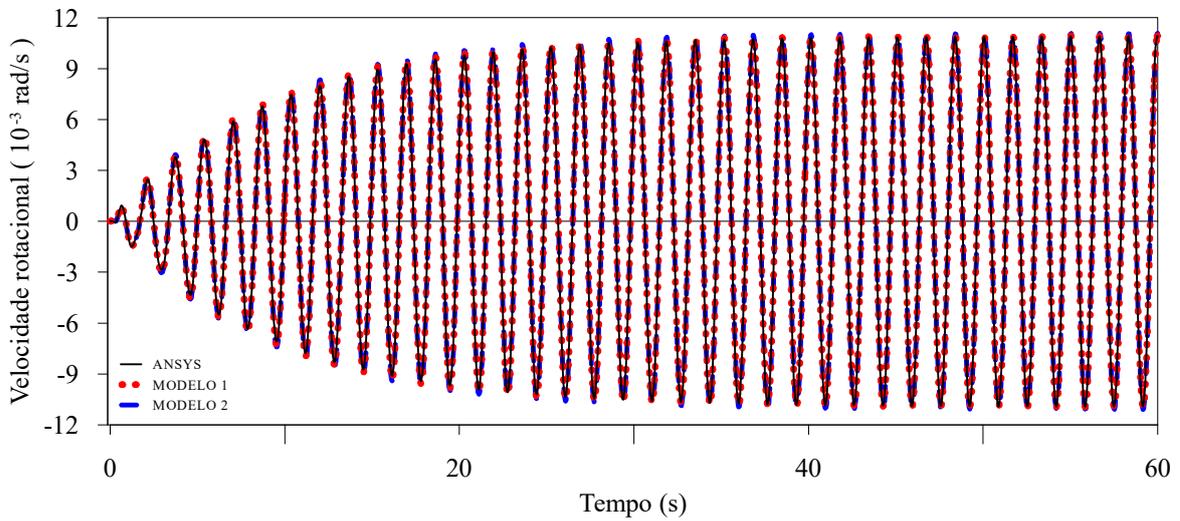


c) aceleração

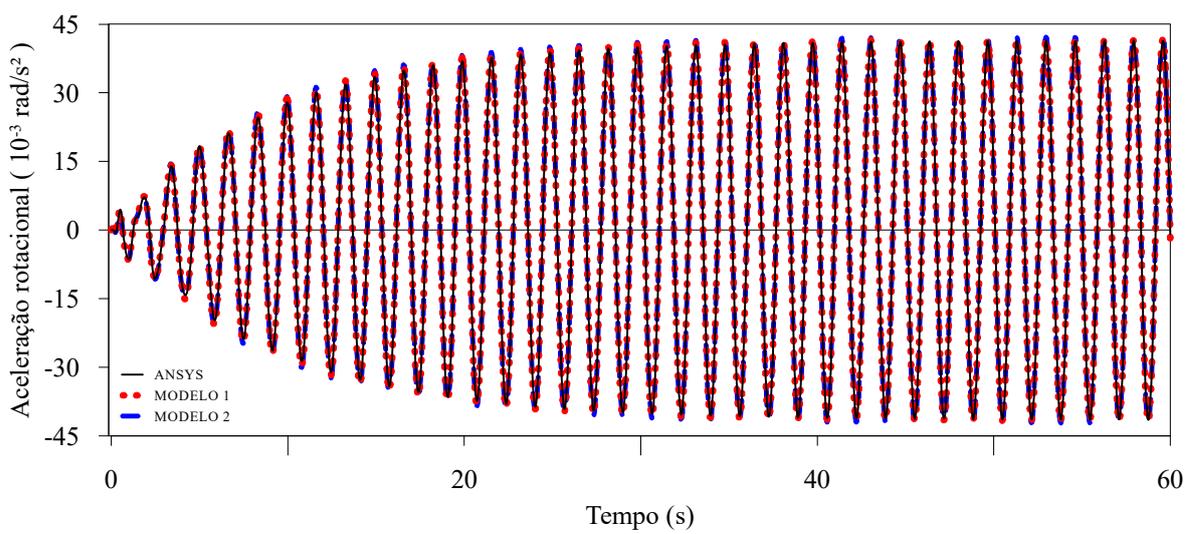
**Figura 4.42** – Ponte de Concreto: Carregamento harmônico – históricos na direção de  $u_2$



a) rotação

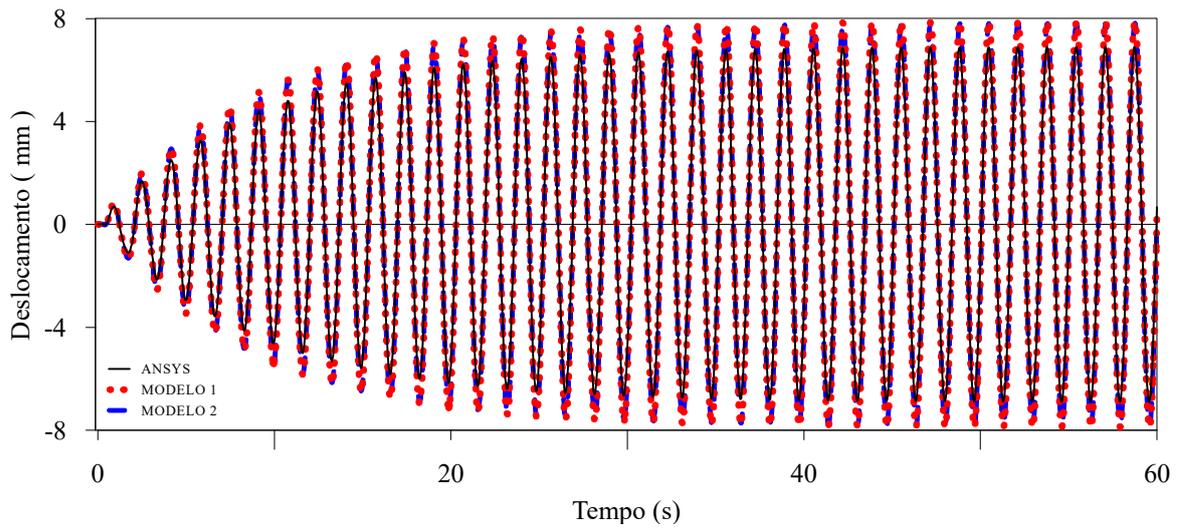


b) velocidade rotacional

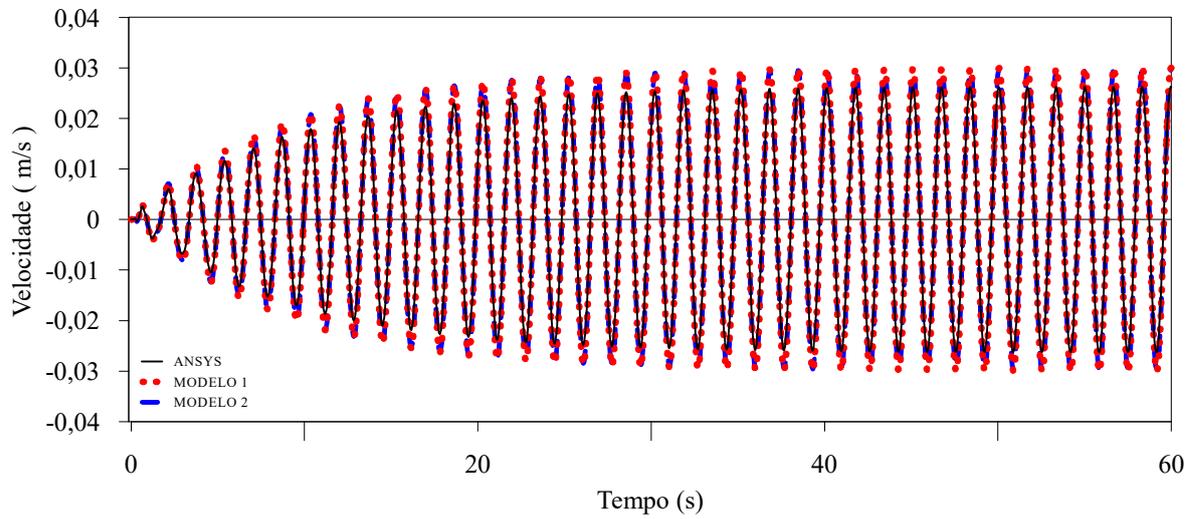


c) aceleração

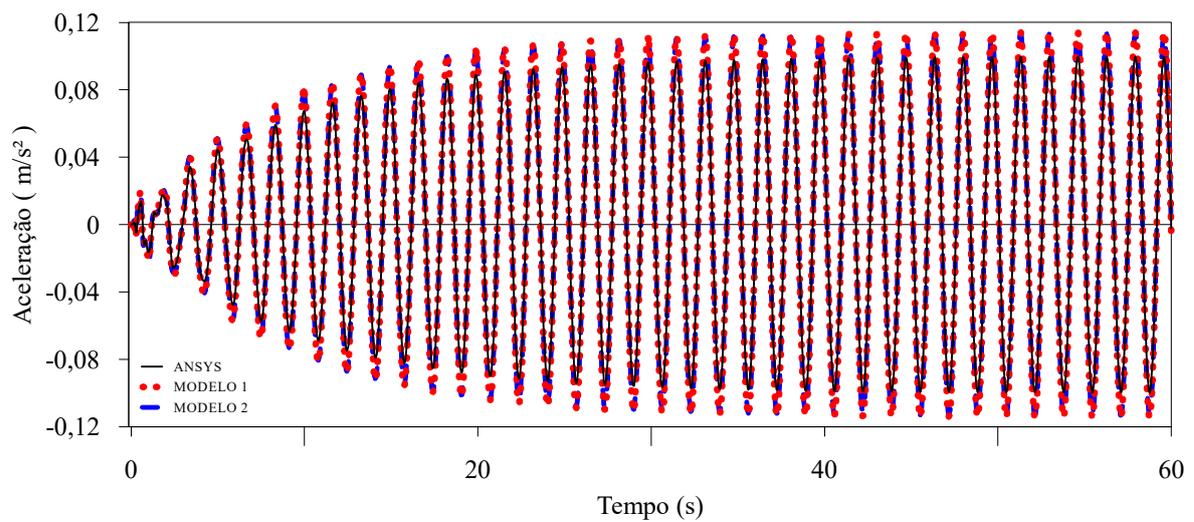
**Figura 4.43** – Ponte de Concreto: Carregamento harmônico – históricos na direção de  $u_3$



a) deslocamento

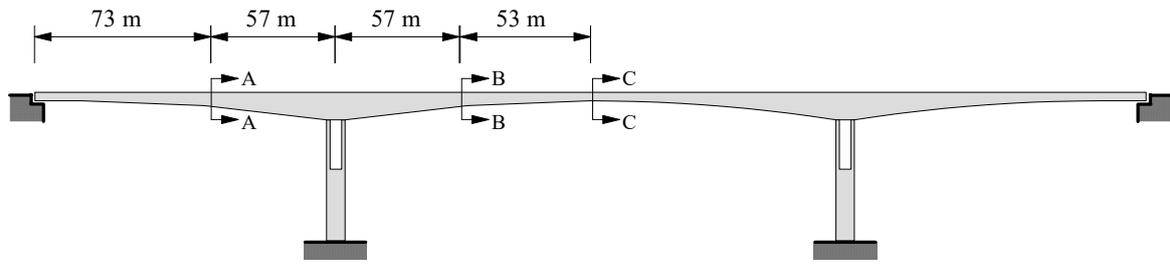


b) velocidade

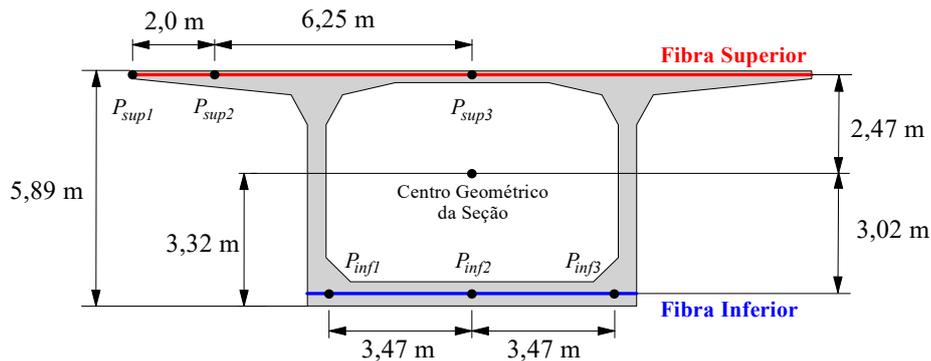


c) aceleração

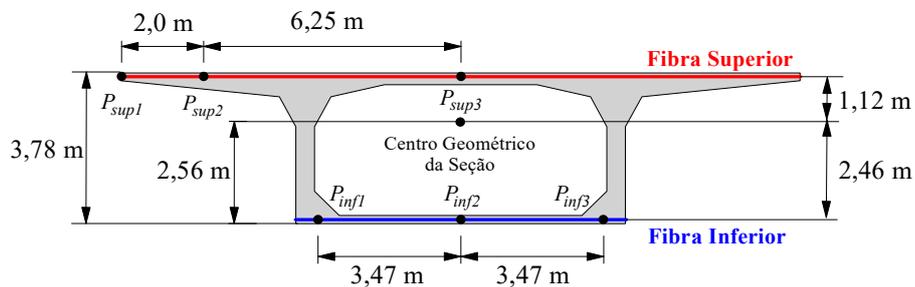
**Figura 4.44** – Ponte de Concreto: Carregamento harmônico – históricos na direção de  $u_4$



a) Seções para Análise de Tensões



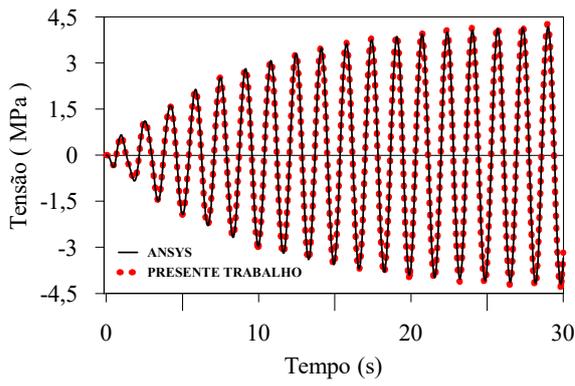
b) Detalhes das seções do Corte AA e BB



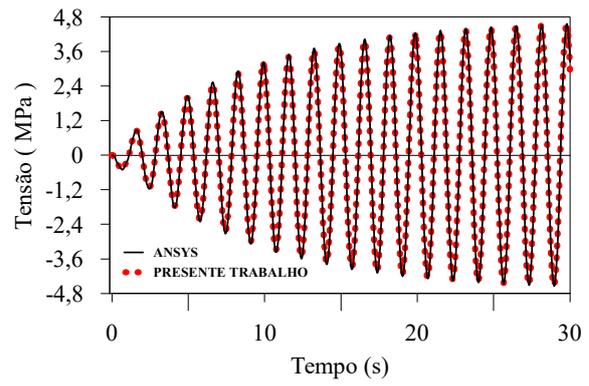
c) Detalhes da seção do Corte CC

**Figura 4.45** – Ponte de Concreto: Seções para Análises de Tensões

As Figuras 4.46 a 4.48 apresentam os históricos de tensões normais nas seções mencionadas para os primeiros 30 s. Nota-se aqui, que as resposta obtidas com o presente trabalho apresentam uma boa concordância relação aos dados obtidos com o *software* ANSYS. Com o ANSYS, a tensão normal média foi obtida dividindo pelo comprimento da fibra, o resultado da integral da função de distribuição de tensão normal ao longo da mesma. Essas funções foram obtidas a partir de interpolações quadráticas de tensões coletadas em três pontos sobre cada uma das fibras.

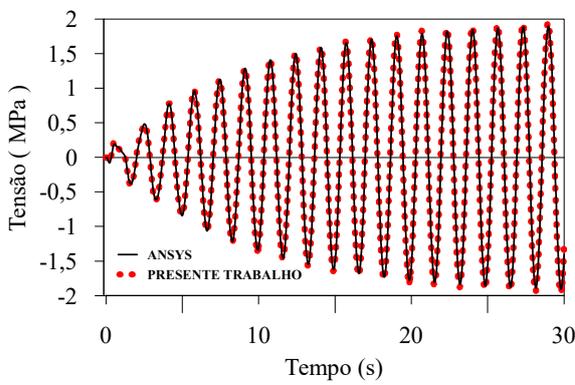


a) Fibra Superior

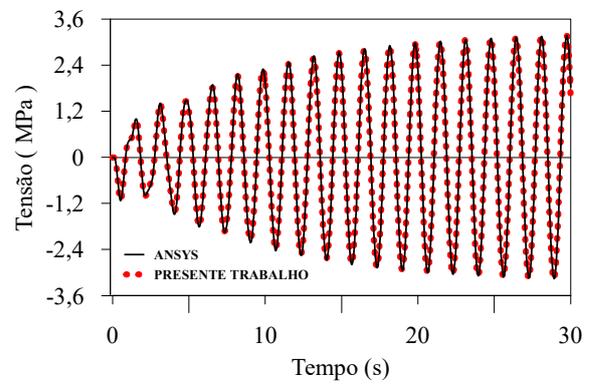


b) Fibra Inferior

**Figura 4.46** – Ponte de Concreto: Tensão Normal na Seção do Corte AA

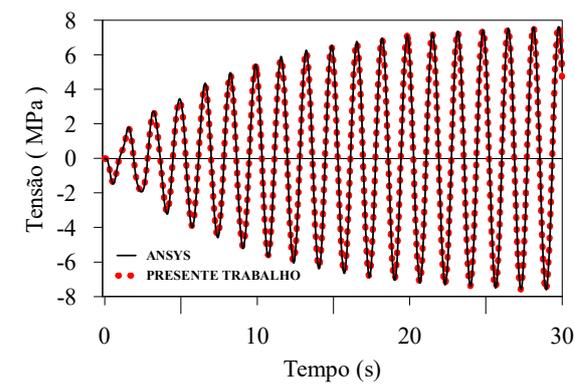


a) Fibra Superior

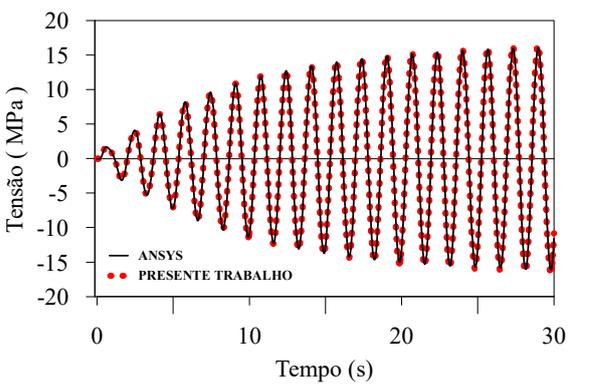


b) Fibra Inferior

**Figura 4.47** – Ponte de Concreto: Tensão Normal na Seção do Corte BB



a) Fibra Superior

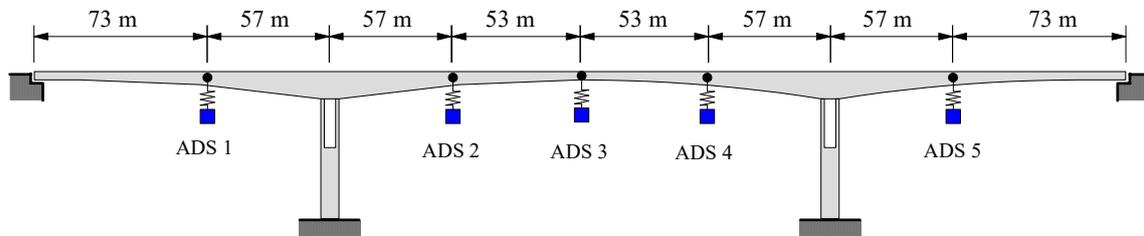


b) Fibra Inferior

**Figura 4.48** – Ponte de Concreto: Tensão Normal na Seção do Corte CC

O deslocamento vertical do ponto médio do vão central, deslocamento  $u_2$ , possui amplitudes consideráveis, chegando a 43,6 centímetros. Com o objetivo de reduzir as amplitudes dos deslocamentos da estrutura, em especial o do vão central, inseriu-se

atenuadores dinâmicos sintonizados à ponte. Ao todo foram 5 ADS's, sendo quatro deles posicionados no ponto médio dos superelementos do tipo  $e_2$  e um atenuador posicionado no ponto médio do vão central, conforme apresenta-se na Figura 4.49. Cada atenuador é composto por uma massa de 40 toneladas conectada à estrutura por meio de uma mola de rigidez igual a 570 kN/m, o sistema possui também um amortecimento de 1,80 kN·s/m.



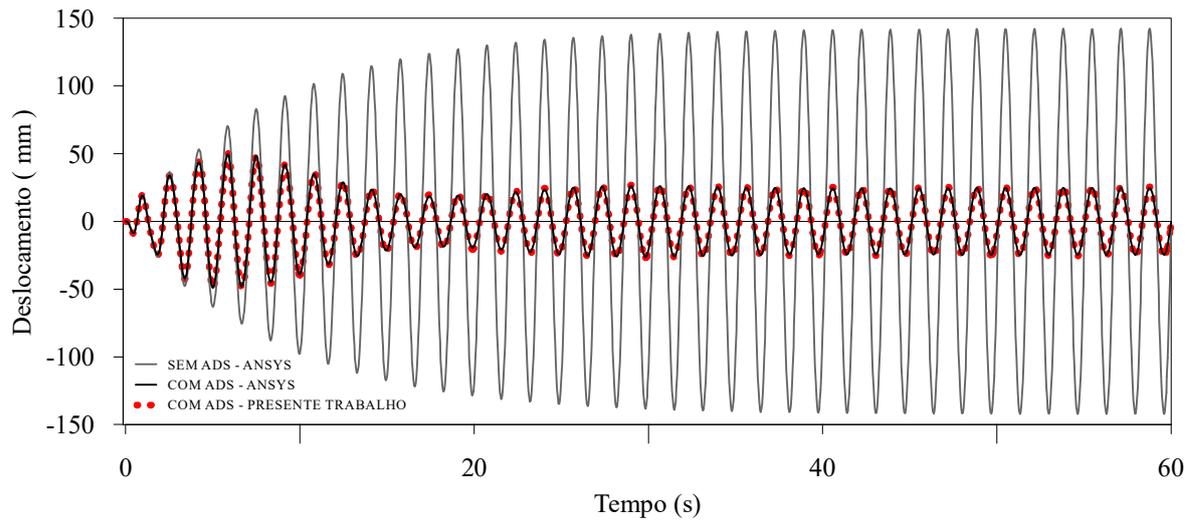
**Figura 4.49** – Ponte de Concreto: ADS's

O vão central da ponte possui uma massa de 9.818,65 toneladas, já os vãos laterais, possuem uma massa de 5.514,43 toneladas cada. A relação entre a massa de atenuadores e a massa dos vãos é de 0,01222 para o vão central e de 0,00725 para os vãos laterais.

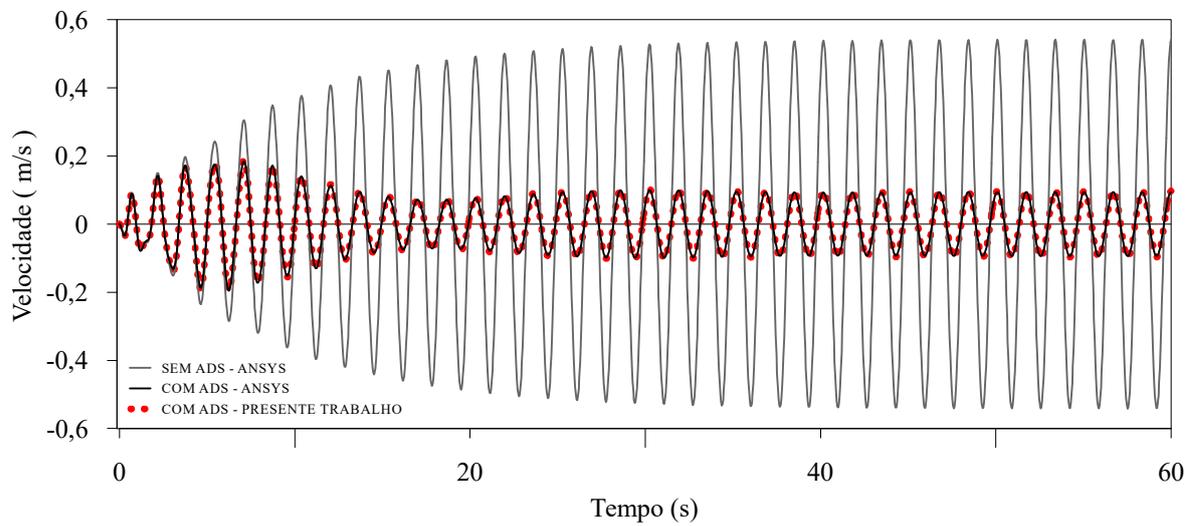
Para a análise da estrutura modelada com elemento reticulado de pórtico plano, utilizou-se apenas o modelo 2 descrito anteriormente. São apresentados os dados obtidos de análises do ANSYS com e sem o uso de atenuadores, a fim de se verificar a redução das amplitudes dos deslocamentos. A resposta no domínio do tempo dos deslocamentos, velocidades e acelerações nas direções de  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  e  $u_4$  das análises feitas com o uso de atenuadores são apresentadas nas Figura 4.50, 4.51, 4.52 e 4.53.

Mais uma vez, observa-se que os resultados de deslocamento, velocidade e aceleração obtidos nas análises com o modelo de elemento reticulado e com o modelo 3D do ANSYS apresentaram uma boa semelhança. Nota-se também, que o uso de ADS's reduziu significativamente as amplitudes dos deslocamentos em todos os nós em que as respostas foram avaliadas.

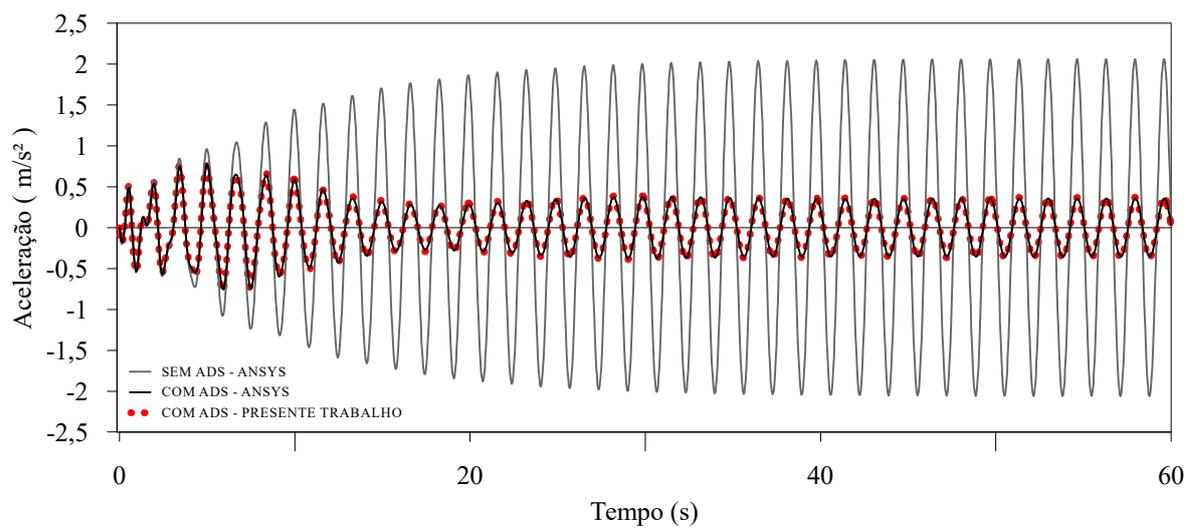
Para os deslocamentos no vão central, que antes chegavam a 43,59 cm, com a utilização de atenuadores a maior amplitude de deslocamento foi de 15,38 cm, uma redução de 64,70%. A partir dos 20 primeiros segundos da análise, a resposta em termos de deslocamentos na direção vertical do vão central para a estrutura com ADS's, estabiliza-se com uma amplitude de 8,55 cm, uma redução de 80,39% em relação a estrutura não atenuada.



a) deslocamento

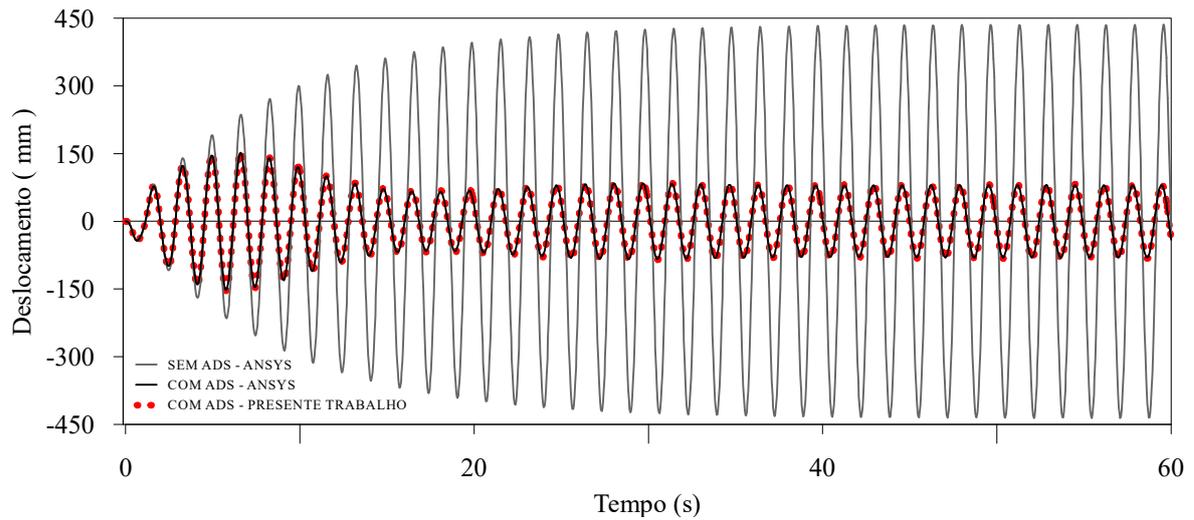


b) velocidade

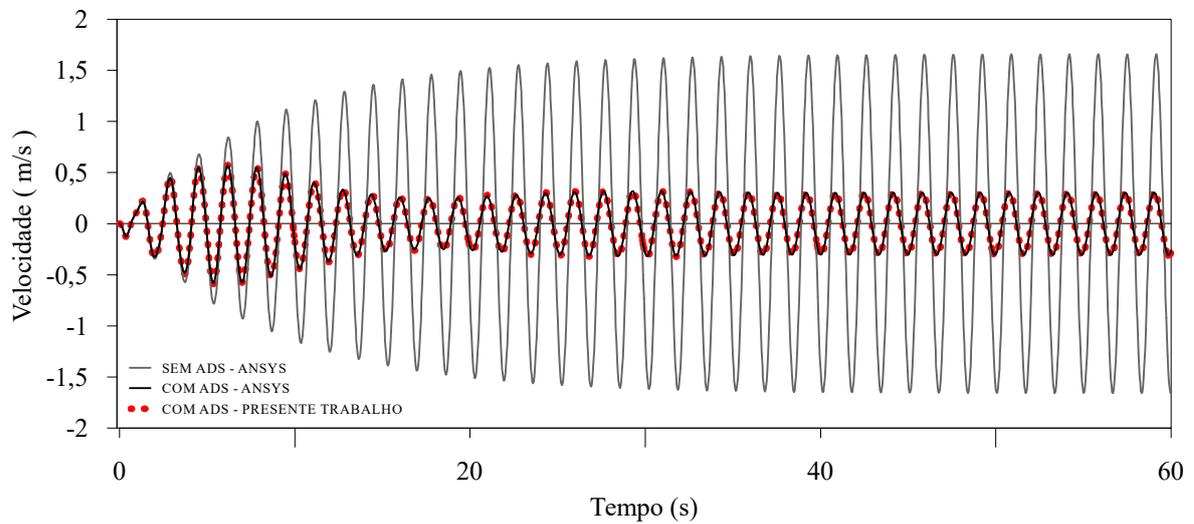


c) aceleração

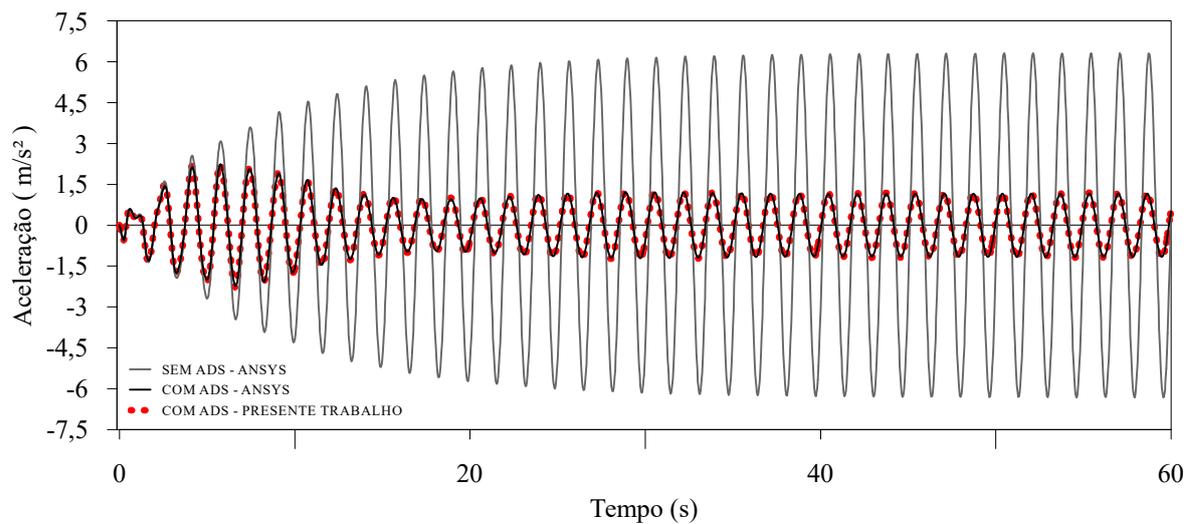
**Figura 4.50** – Ponte de Concreto: Estrutura com ADS's – históricos na direção de  $u_1$



a) deslocamento

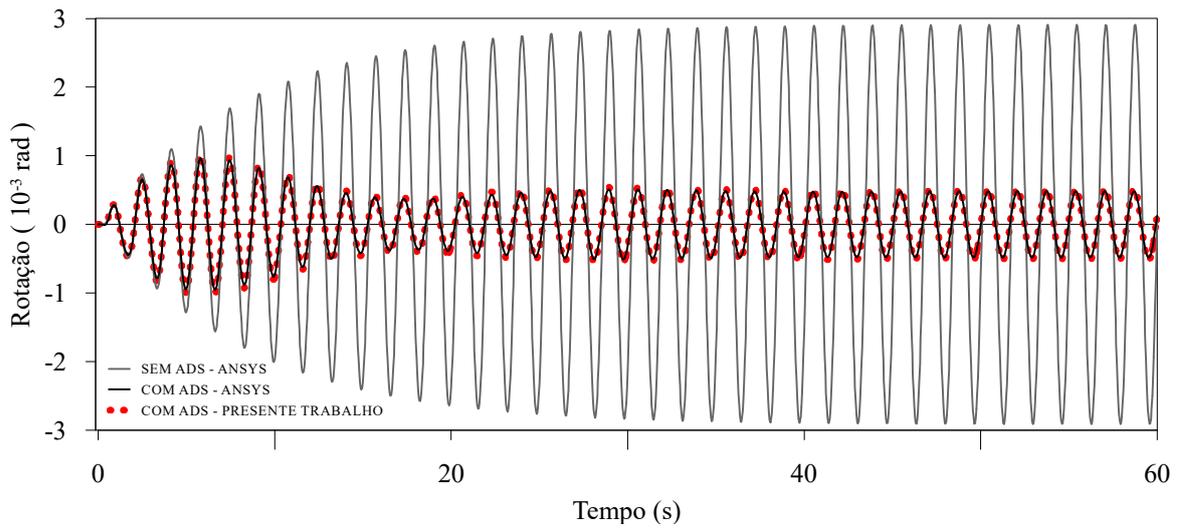


b) velocidade

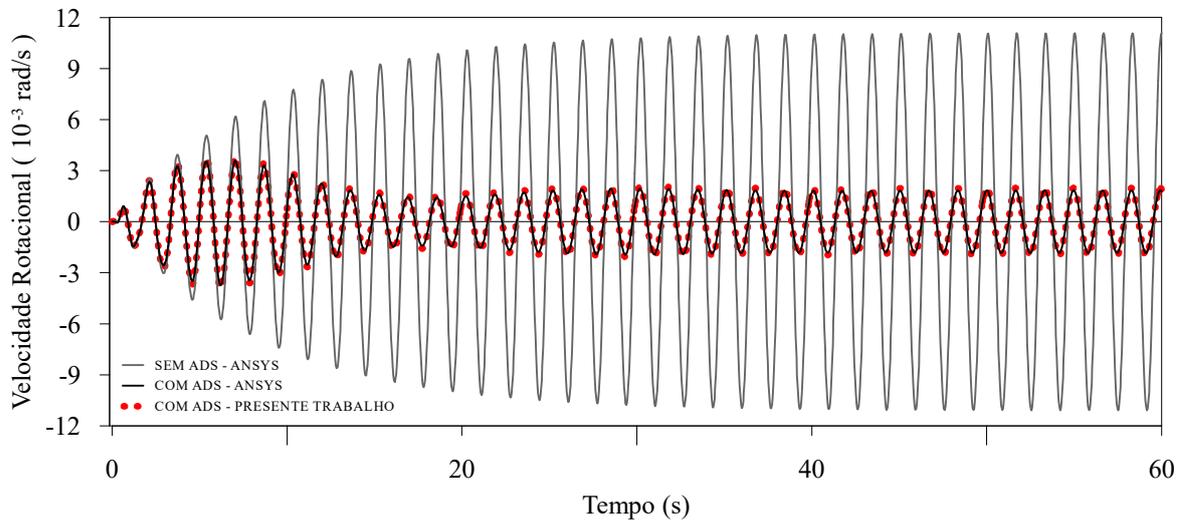


c) aceleração

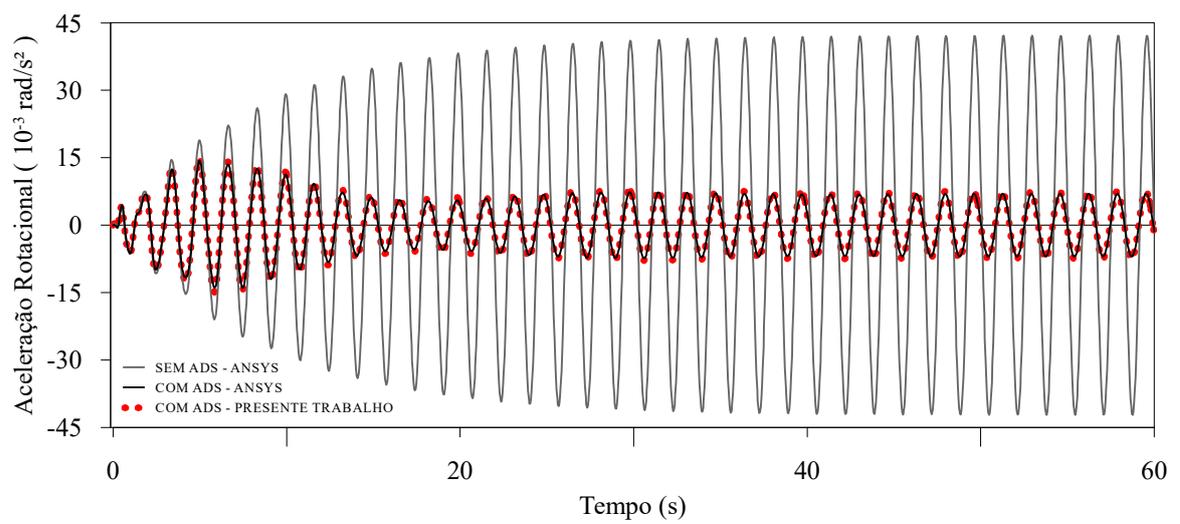
**Figura 4.51** – Ponte de Concreto: Estrutura com ADS's – históricos na direção de  $u_2$



a) rotação

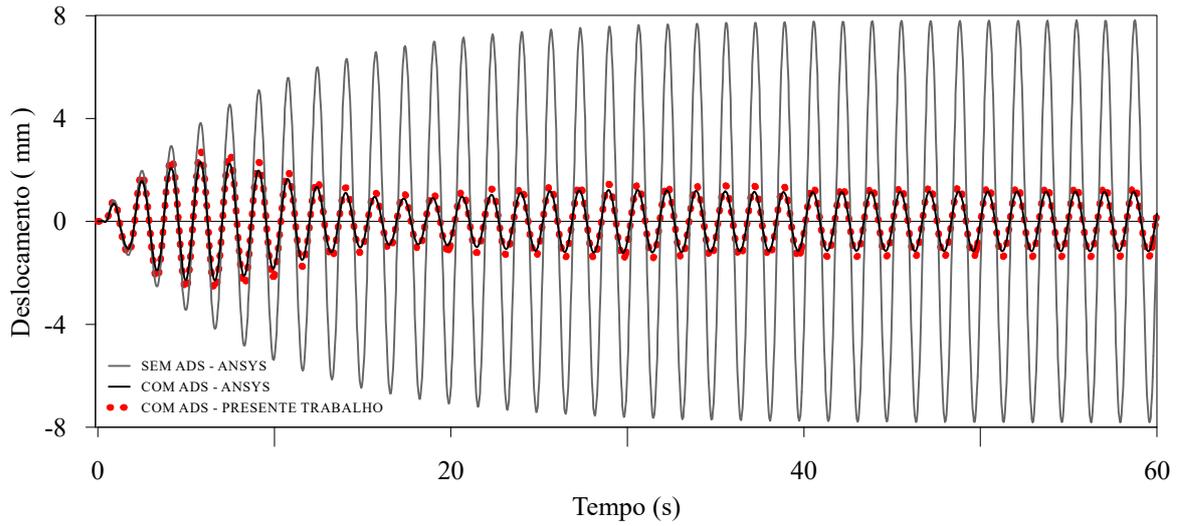


b) velocidade rotacional

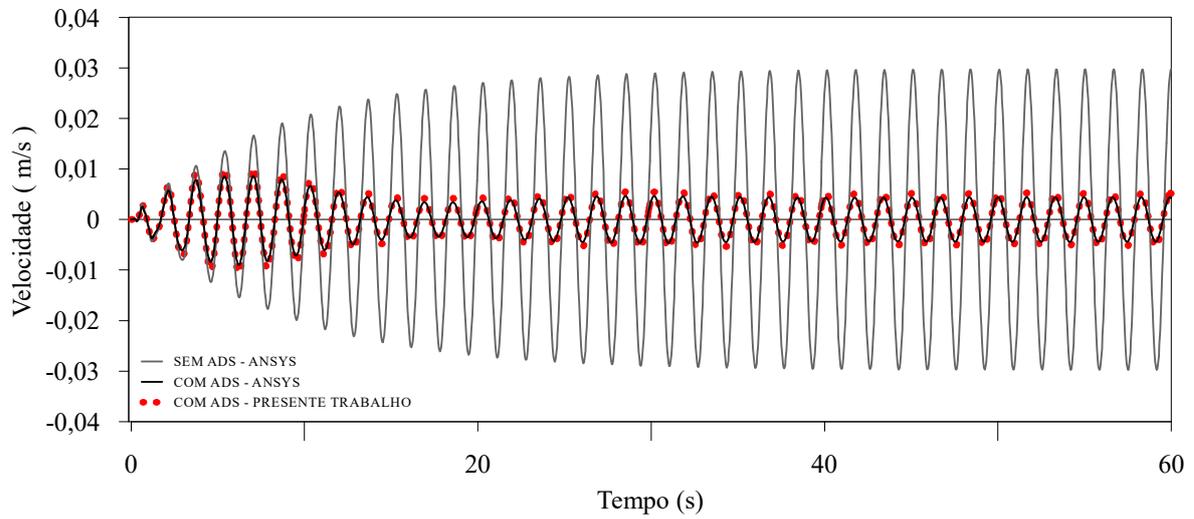


c) aceleração

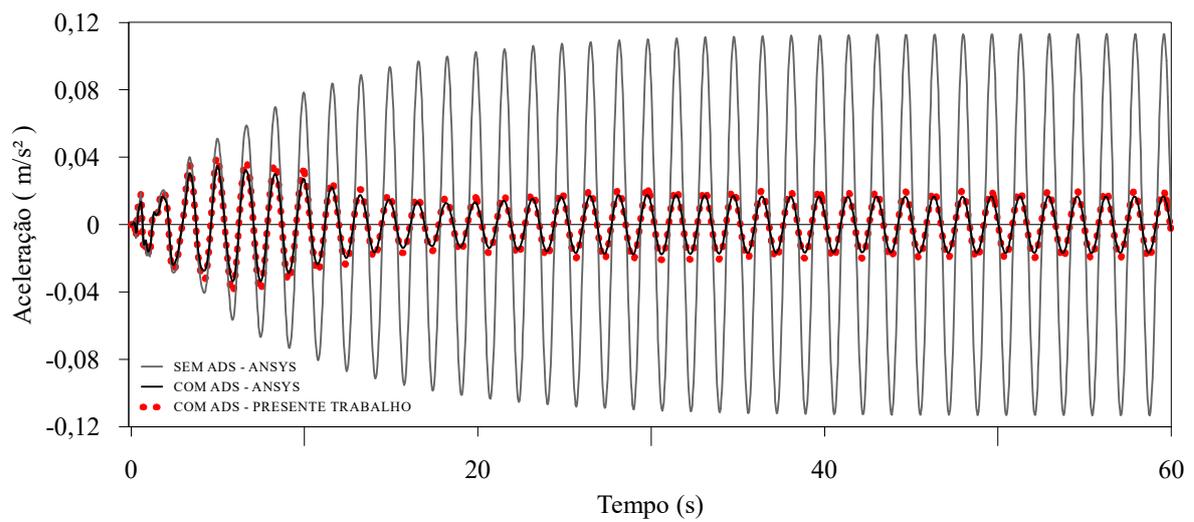
**Figura 4.52** – Ponte de Concreto: Estrutura com ADS's – históricos na direção de  $u_3$



a) deslocamento



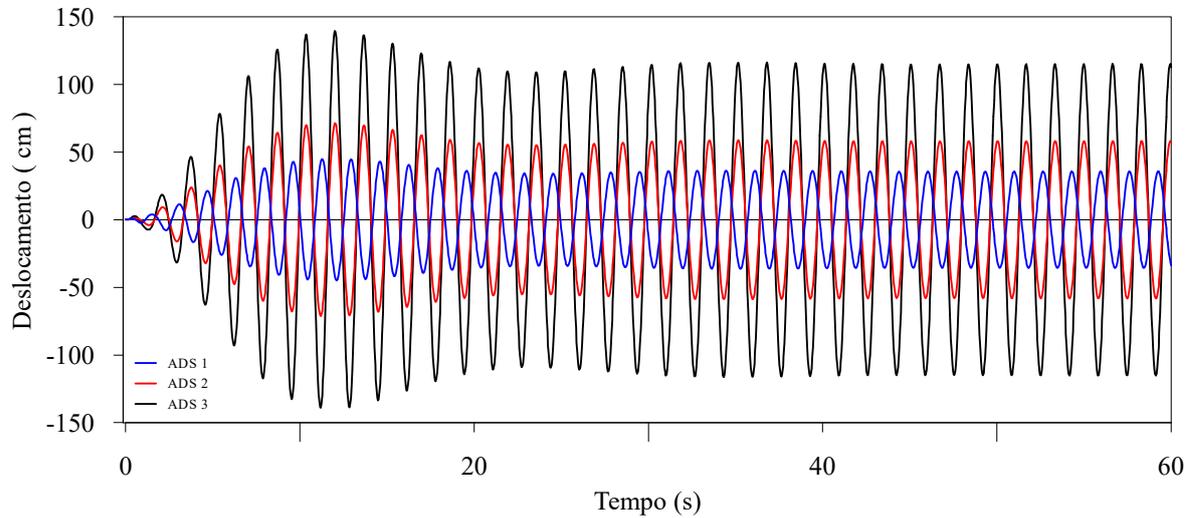
b) velocidade



c) aceleração

**Figura 4.53** – Ponte de Concreto: Estrutura com ADS's – históricos na direção de  $u_4$

Os deslocamentos das massas dos ADS's 1, 2 e 3, conforme numeração apresentada na Figura 4.49, em relação ao ponto em que se associam à estrutura também foram verificadas. O histórico dos deslocamentos relativos dos ADS's mencionados são apresentados no gráfico da Figura 4.54.



**Figura 4.54** – Ponte de Concreto: Deslocamento dos ADS's em relação a ponte

Para um melhor desempenho do uso de atenuadores, pode-se utilizar um número maior de dispositivos mais bem distribuídos ao longo do comprimento da ponte. Os ajustes de rigidez e massa de cada ADS podem ser feitos via algum algoritmo de otimização, como realizado na Ponte Rio-Niterói por Battista e Pfeil (2010).

# Capítulo 5

## Conclusões

Este trabalho teve como finalidade a análise dinâmica linear de sistemas estruturais, no domínio do tempo, modelados com elementos de pórtico plano cuja rigidez e distribuição de massa possam variar ao longo do comprimento segundo leis matemáticas quaisquer de variação. Com este propósito, utilizaram-se, em nível de elemento, equações de equilíbrio, de compatibilidade de deslocamentos e o Princípio das Forças Virtuais – PFV para a determinação dos coeficientes das matrizes de propriedades estruturais de elemento (rigidez, massa e cargas nodais equivalentes). Com os valores de rigidez de elemento, utilizou-se um processo genérico para a construção das funções de forma de elemento, designadas de funções de forma de Timoshenko, que contemplam tanto a inclusão de efeitos de cisalhamento como as características de variação de rigidez (Araújo e Ribeiro, 2020). Neste trabalho, ressalta-se que, uma vez que essas funções de forma foram construídas, tornou-se possível, adotar, além do processo unificado de determinação dos coeficientes da matriz de massa, mencionado acima, também o processo alternativo segundo o qual os coeficientes da matriz massa são determinados diretamente a partir da integração das funções de forma ao longo do comprimento do elemento (Clough e Penzien, 2003).

Especificamente foram consideradas, para variação de rigidez e distribuição de massa ao longo de seu eixo, leis de variação linear, parabólica, cúbica e quártica, e adotou-se o processo de integração segundo Gauss–Legendre para o cálculo numérico das integrais envolvidas. A implementação computacional também emprega processos baseados em integrais de contorno para a obtenção de propriedades geométricas de seções quaisquer (área, momento de inércia e fator de forma ao cisalhamento), usuais ou não, que

facilitam, enormemente, a geração dos modelos. Essa opção do programa computacional foi muito importante para facilitar a criação dos modelos de análise da ponte em concreto armado (seção 4.4), que é bastante complexo.

Implementou-se também um processo para consideração de ligações semirrígidas de comportamento linear-elástico, cujos coeficientes de rigidez que descrevem a ligação são fornecidos diretamente. Processos adicionais, seguindo a mesma técnica, foram também incorporados ao programa para incluir massas e amortecimentos concentrados no sistema estrutural, os quais possibilitam a simulação atenuadores dinâmicos sintonizados (ADS).

No contexto das implementações voltadas para análises dinâmicas, também merecem destaque tanto a estratégia para a inclusão de excitações genéricas de base, que incluem deslocamentos, velocidades e acelerações prescritas, tipicamente necessárias em análise estrutural sob atuação de sismos, como a técnica específica para a geração de sismogramas sintéticos compatíveis com normas técnicas.

Para validar as implementações deste trabalho e comprovar o desempenho computacional satisfatório dos processos propostos, foram realizadas análises dinâmicas no domínio do tempo de variadas estruturas submetidas a diversos carregamentos, onde utilizou-se o método de Newmark para solução do problema transiente.

Os resultados obtidos com o programa computacional desenvolvido nesta pesquisa foram comparados com soluções obtidas com a utilização dos *softwares* comerciais SAP2000 e ANSYS. A partir dos resultados obtidos das aplicações do Capítulo 4, observa-se que os processos apresentados forneceram boa concordância com as respostas obtidas pelos *softwares* comerciais mencionados, mesmo nos casos em que resultados obtidos com os modelos reticulados do presente trabalho foram comparados com modelos de elementos finitos contínuos tridimensionais (ANSYS 'SOLID186' e 'SOLID187'). Menciona-se ainda que, para a verificação de convergência das respostas obtidas com o programa da presente pesquisa, consideraram-se 2 modelos, na análise da ponte em concreto armado na seção 4.4. No primeiro, o modelo de análise possuía 27 nós e 28 elementos enquanto, no segundo, tinha 99 nós e 100 elementos. Como se vê dos respectivos gráficos que descrevem a reconstituição temporal de deslocamentos, velocidades e aceleração, há pouca variação entre as respostas com um e o outro modelo.

Tal observação permite afirmar que os processos propostos para obtenção das matrizes de propriedades estruturais são eficientes e podem ser utilizados para estudar o comportamento de estruturas complexas, de grande ordem, sujeitas a ações dinâmicas. É patente a precisão obtida com modelos de pórtico em relação ao modelos 3D, e ressalta-se

que, devido a ordem modelos, todas as análises realizadas com o programa desenvolvido na pesquisa são executadas em menos de 10 s enquanto as análises com o ANSYS levam várias horas. Nas análises, usou-se um notebook com processador 'Intel Core i7' e 16GB de RAM.

Ressalta-se que os processos implementados para simulação de ligações semirrígidas e de atenuadores dinâmicos sintonizados (ADS), fornecem resultados coerentes e eficazes, com exitosas validações realizadas também tendo como base resultados obtidos com os mesmos *softwares* SAP2000 e ANSYS. Por fim, como se vê da análise das técnicas propostas nesta dissertação referentes à análise de pórticos planos, a extensão destas a pórticos espaciais é imediata.

## **5.1 Sugestões para Futuras Pesquisas**

Algumas sugestões para trabalhos futuros são apresentadas a seguir:

- Expansão dos processos para obtenção das matrizes de propriedades estruturais para elementos de pórtico espacial e correspondente análise dinâmica no domínio do tempo desse tipo de estrutura;
- Inclusão de formulações que considerem não-linearidade física tanto nos elementos como nas ligações semirrígidas, em pórticos planos e espaciais;
- Inclusão de opções de análise não-linear geométrica em pórticos planos e espaciais;
- Consideração de elementos de pórticos planos e espaciais com seções heterogêneas quaisquer e eixos não-centroidais.

# Referências Bibliográficas

- Ansys® Academic Research Mechanical, Release 20.1, Help System, Coupled Field Analysis Guide, ANSYS, Inc.
- Araújo, F.C. e Pereira, R.A.T., 2017. Boundary-integral-based process for calculating stiffness matrices of space frame elements with axially varying cross section. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 77, pp. 61-69.
- Araújo, F.C., Ribeiro, I.S. e Silva, K.I., 2017. Geometric Nonlinear Analysis of Plane Frames with Generically Nonuniform Shear-deformable Members. *Structures*, vol. 12, pp. 179-187.
- Araújo, F.C., Hillesheim, M.J. e Soares, D., 2019. Revisiting the BE SBS algorithm and applying it to solve torsion problems in composite bars: Robustness and efficiency study. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 107, pp. 12-24.
- Araújo, F.C. e Ribeiro, I.S., 2020. A novel strategy to construct exact structural-property matrices for nonprismatic Timoshenko's frame elements. *Computers and Structures*, vol. 239, pp. 106325.
- Bathe, K.J., 1989. *Finite Element Procedures*, 2nd ed., Watertown, Prentice Hall, Pearson Education, Inc.
- Battista, R.C. e Pfeil, M.S., 2000. Reduction of vortex-induced oscillations of Rio-Niterói bridge by dynamic control devices. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, vol. 84, pp. 273-288.
- Battista, R.C. e Pfeil, M.S., 2005. Múltiplos atenuadores dinâmicos sincronizados para controle das oscilações induzidas pelo vento na Ponte Rio-Niterói. *Revista Sul-Americana de Engenharia Estrutural*, vol. 2, n. 1, pp. 73-95.

- Battista, R.C. e Pfeil, M.S., 2010. Control of wind oscillations of Rio-Niterói bridge, Brazil. *Structures and Buildings*, vol. 163, pp. 87-96.
- Butterworth, J., Lee, J.H. e Davidson, B., 2004. Experimental Determination of Modal Damping from Full Scale Testing, 13<sup>th</sup> World Conference on Earthquake Engineering, Vancouver, 1-6 August.
- Caracciolo, O.R. e Solari, J.F.J., 1983. El Puente Internacional sobre el río Iguazú. *Hormigón y acero*, vol. 149, pp. 107-120.
- Chopra, A.K., 1995. *Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*, 4th ed., Boston, Prentice Hall, Pearson Education International Edition.
- Clough, R.W. e Penzien, J., 2003. *Dynamic of Structures*, 3rd ed., Berkeley, Computer & Structures, Inc.
- Cook, R.D., Malkus, D.S., e Plesha, M.E., 1989. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 3rd ed., New York, John Wiley & Sons, Inc.
- Costa, M.M.A., 2014. *Análise do comportamento de estrutura utilizando múltiplos sistemas passivos de absorção*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- Eurocode 8, 1998. Design of structures for earthquake resistance – Part 1: General rules, seismic actions and rules for buildings. *European Committee for Standardization (CEN)*, Brussels, Belgium.
- Ferreira, F., Moutinho, C., Cunha, A. e Caetano, E., 2020. An artificial accelerogram generator code written in Matlab. *Engineering Reports*, e12129.
- Irvine, T., 1998. El Centro Earthquake. [online] [Vibrationdata.com](http://www.vibrationdata.com). Disponível em: <<http://www.vibrationdata.com/elcentro.htm>> [Acessado em 10 de janeiro de 2021].
- Karabalis, D.L. e Beskos, D.E., 1982. Static, Dynamic and Stability Analysis of Structures Composed of Tapered Beams. *Computers & Structures*, vol. 16, pp. 731-748.
- Krenk, S. e Høgsberg, J., 2014. Tuned Mass Absorber on a Flexible Structure. *Jornal of Sound and Vibration*, vol. 333, pp. 1577-1595.

- LAPACK (1999) Users' Guide. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA. 3th ed..
- Li, G.Q. e Li, J.J., 2020. A tapered Timoshenko-Euler beam element for analysis of steel portal frames. *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 58, pp. 1531-1544.
- Newmark, N.M. e Hall, W.J., 1978. Development of criteria for seismic review of selected nuclear power plants. U. S. Nuclear Regulatory Commission.
- Newmark, N.M., 1959. A Method of Computation for Structural Dynamics, *ASCE Journal of Engineering Mechanics Division*, vol. 85, pp. 67-94.
- Ochoa, J.D.A., 1991. Static, Stability and Vibration of Non-Prismatic Beams and Columns. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 162, pp. 441-455.
- Papageorgiou, A.V. e Gantes, C.J., 2008. Equivalent Uniform Damping. Eurosteel 2008, Graz, Austria, 3-5 September.
- Papageorgiou, A.V. e Gantes, C.J., 2010. Equivalent Modal Damping Ratios for Concrete/steel mixed structures. *Computer and Structures*, vol. 88, pp. 1124-1136.
- Paz, M. e Leigh, W., 2004. *Structural Dynamic: Theory and Computation*, 5th ed., Norwell, Kluwer Academic Publishers.
- Pereira, R.A.T., 2015. *Análise de Estruturas Reticuladas Espaciais com Barras de Seções Variáveis*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- SAP2000, 2013. Structural Analysis Program (SAP). Versão Ultimate 16.0.0. Computers and Structures, Inc.
- Sidje, R.B., 1998. Expokit: a software package for computing matrix exponentials. *ACM Transactions on Mathematical Software*, vol.24, no. 1, pp. 130-156.
- Silva, A.R.D., 2009. *Sistema Computacional para Análise Avançada Estática e Dinâmica de Estruturas Metálicas*. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, PROPEC/EM/UFOP, Ouro Preto/MG, Brasil.
- Soares Jr, D. e Großholz, G., 2018. Nonlinear structural dynamic analysis by a stabilized central difference method. *Engineering Structures*, vol. 173, pp. 383-392.

- Sun, Z., Zou, Z., Ying, X. e Li, X., 2020. Tuned Mass Dampers for Wind-Induced Vibration Control of Chongqi Bridge. *Journal of Bridge Engineering*, vol. 25, 05019014.
- Valipour, H.R. e Bradford, M.A., 2012. A new shape function for tapered three-dimensional beams with flexible connections. *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 70, pp. 43-50.
- Vieira, L.C.L.M., 2004. *Estudo de Algoritmos de Integração Elemento por Elemento para Análise Dinâmica não Linear de Estruturas*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Alagoas, Maceió/AL, Brasil.
- VisIt, 2020. Versão 3.1.0. Desenvolvido pelo Lawrence Livermore National Laboratory - LLNL <<http://www.llnl.gov/visit>>

# Apêndice A

## Código Fortran para geração de acelerogramas sintéticos

### A.1 Introdução

O objetivo deste Apêndice é fornecer o código escrito em linguagem Fortran, adaptado do código MATLAB apresentado por Ferreira *et al.* (2020), utilizado para gerar acelerogramas sintéticos compatíveis com espectros de resposta prescritos pelo Eurocódigo 8 – EC8, baseado na modificação de registros reais de sismos.

### A.2 Código Fortran

```
subroutine AAG(number_points,soil,tipo,importance,agr,art_sign,art_spec,Sa)
! =====
! ENTRADA (Eurocode 8 section 3.2.2.2) -----
! soil..... = 1 a 5 equivalente ao solo A a E
! tipo..... = Terremoto tipo=1 ou tipo=2
! importance..... = 0.8, 1, 1.2, 1.4 respectivamente para a classe de importância de I a IV
! agr..... = é a referência de aceleração de pico base
! SAÍDA -----
! art_sign..... = é o sinal artificial
! art_spec..... = é o espectro artificial
! =====
implicit none
!VARIÁVEIS DE ENTRADA
integer:: soil,tipo,number_points
```

```

real*8:: importance,agr
!VARIÁVEIS DE SAÍDA
real*8:: art_sign(3,number_points),art_spec(3,200),Sa(2,203),T(200)
! ainda não sei:: art_sign,art_spec,Sa
! VARIÁVEIS INTERNAS
integer:: i,j,jj
integer:: N_it,calculate_events(3)
real*8:: tt,z,S(8,200),Sa_T(2,200),interp1
real*8:: aux_vE(4,number_points),Real_Seismic_Events(4,number_points)
real*8:: Final_accelerogram(4,number_points),time(number_points)
! LEITURA DOS ACELEROGRAMAS DE TERREMOTOS CONHECIDOS
Real_Seismic_Events=0.00d+00
do i=1,number_points
    read(ieq,*)(Real_Seismic_Events(j,i),j=1,4)
enddo
! Real_Seismic_Events: 1ª linha é o vetor de tempo,
!           2ª linha do Terremoto ElCentro (1940)
!           3ª linha do Terremoto Gebze (1999)
!           4ª linha do Terremoto na Cidade do México (1985)
! Intervalo de período para definir espectros
tt=0.01d+00; T=0.00d+00
do i=1,200
    T(i)=tt
    tt=tt+0.02d+00
enddo
z=0.00d+00
z=0.05d+00 ! Valor de amortecimento de espectro pretendido z = 5% para EC8
N_it=8 ! número de iterações
calculate_events=0
do i=1,3
    calculate_events(i)=i ! se o usuário quiser usar apenas alguns eventos
enddo
! todos os terremotos são aparados em 40,96s com um dt = 0,005s (8192 pontos = 2^13)
! Definição de espectro elástico
call EC8elasticspectra(soil,tipo,importance,z,agr,Sa)
Sa_T=0.00d+00
do i=1,200
    call interpol(Sa(1,:),Sa(2,:),203,T(i),interp1,1)
    Sa_T(1,i)=T(i)
    Sa_T(2,i)=interp1

```

```

enddo
! Ciclo para gerar 3 acelerogramas artificiais
art_sign=0.00d+00; art_spec=0.00d+00; aux_vE=0.00d+00; time=0.00d+00
do i=1,number_points
    time(i)=Real_Seismic_Events(1,i)
    aux_vE(1,i)=Real_Seismic_Events(1,i)
enddo
do jj=1,3
    do i=1,number_points
        aux_vE(2,i)=0.00d+00
        aux_vE(2,i)=Real_Seismic_Events(jj+1,i)
    enddo
    call F_AAG(aux_vE,number_points,N_it,Sa_T,T,z,Final_accelerogram,S)
    do i=1,number_points
        art_sign(jj,i)=Final_accelerogram(2,i) !O acelerograma final é salvo
    enddo
    do i=1,200
        art_spec(jj,i)=S(N_it,i)
    enddo
enddo
endsubroutine
! FUNÇÕES AUXILIARES
! GERAR O ESPECTRO ELÁSTICO HORIZONTAL EUROCODE 8
subroutine EC8elasticspectra(soil,tipo,importance,z,agr,S_elastic)
!VARIÁVEIS DE ENTRADA
implicit none
integer:: soil,tipo
real*8:: importance,z,agr
!VARIÁVEIS DE SAÍDA
real*8:: S_elastic(2,203)
!VARIÁVEIS INTERNAS
integer:: division,Ttrim,i
real*8:: aux_Matrix(5,4),S,TB,TC,TD,ag,damping_modif,TC_TD(101),aux_TC_TD(101),TD_Ttrim(100)
real*8:: aux_TD_Ttrim(100)
!INÍCIO DA ROTINA
division=100
Ttrim=10 !Período acima do qual o espectro é aparado
aux_Matrix=0.00d+00
if (tipo==1) then
    ! S TB TC TD

```

```

!1.0, 0.15, 0.4, 2
aux_Matrix(1,1)=1.00; aux_Matrix(1,2)=0.15; aux_Matrix(1,3)=0.4; aux_Matrix(1,4)=2
!1.2, 0.15, 0.5, 2
aux_Matrix(2,1)=1.20; aux_Matrix(2,2)=0.15; aux_Matrix(2,3)=0.5; aux_Matrix(2,4)=2
!1.15, 0.2, 0.6, 2
aux_Matrix(3,1)=1.15; aux_Matrix(3,2)=0.20; aux_Matrix(3,3)=0.6; aux_Matrix(3,4)=2
!1.35, 0.2, 0.8, 2
aux_Matrix(4,1)=1.35; aux_Matrix(4,2)=0.20; aux_Matrix(4,3)=0.8; aux_Matrix(4,4)=2
!1.4, 0.15, 0.5, 2
aux_Matrix(5,1)=1.40; aux_Matrix(5,2)=0.15; aux_Matrix(5,3)=0.5; aux_Matrix(5,4)=2
elseif (tipo==2) then
  ! S TB TC TD
  !1.00, 0.05, 0.25, 1.2
  aux_Matrix(1,1)=1.00; aux_Matrix(1,2)=0.05; aux_Matrix(1,3)=0.25; aux_Matrix(1,4)=1.2
  !1.35, 0.05, 0.25, 1.2
  aux_Matrix(2,1)=1.35; aux_Matrix(2,2)=0.05; aux_Matrix(2,3)=0.25; aux_Matrix(2,4)=1.2
  !1.50, 0.10, 0.25, 1.2
  aux_Matrix(3,1)=1.50; aux_Matrix(3,2)=0.10; aux_Matrix(3,3)=0.25; aux_Matrix(3,4)=1.2
  !1.80, 0.10, 0.30, 1.2
  aux_Matrix(4,1)=1.80; aux_Matrix(4,2)=0.10; aux_Matrix(4,3)=0.30; aux_Matrix(4,4)=1.2
  !1.60, 0.05, 0.25, 1.2
  aux_Matrix(5,1)=1.60; aux_Matrix(5,2)=0.05; aux_Matrix(5,3)=0.25; aux_Matrix(5,4)=1.2
endif
S=0.00d+00
S=aux_Matrix(soil,1)
TB=0.00d+00
TB=aux_Matrix(soil,2)
TC=0.00d+00
TC=aux_Matrix(soil,3)
TD=0.00d+00
TD=aux_Matrix(soil,4)
ag=0.00d+00
ag=importance*agr
damping_modif=0.00d+00
damping_modif=max(sqrt(10/(5+100*z)),0.55)
TC_TD=0.00d+00
aux_TC_TD=0.00d+00
TD_Ttrim=0.00d+00
aux_TD_Ttrim=0.00d+00
do i=1,division

```

```

TC_TD(i)=TC+(i-1)*((TD-TC)/division)
aux_TC_TD(i)=ag*S*damping_modif*(2.5d+00)*(TC/TC_TD(i))
TD_Ttrim(i)=(TD+(4.00d+00-TD)/dfloat(division))+dfloat(i-1)*((Ttrim-TD)/dfloat(division))
aux_TD_Ttrim(i)=ag*S*damping_modif*(2.5d+00)*TC*(TD/(TD_Ttrim(i)*TD_Ttrim(i)))
enddo
TC_TD(division+1)=TD
aux_TC_TD(division+1)=ag*S*damping_modif*(2.5d+00)*(TC/TD)
!O resultado final possui pontos únicos na região linear
S_elastic(1,1)=0.00d+00
S_elastic(2,1)=S*ag
S_elastic(1,2)=TB
S_elastic(2,2)=S*ag*damping_modif*2.50d+00
do i=1,division
    S_elastic(1,2+i)=TC_TD(i)
    S_elastic(1,2+division+1+i)=TD_Ttrim(i)
    S_elastic(2,2+i)=aux_TC_TD(i)
    S_elastic(2,2+division+1+i)=aux_TD_Ttrim(i)
enddo
S_elastic(1,2+division+1)=TC_TD(division+1)
S_elastic(2,2+division+1)=aux_TC_TD(division+1)
endsubroutine
! ROTINA F_AAG
subroutine F_AAG(original_accel,number_points,N_iter,Sa_elastic,T,z,Final_accelerogram,Sa)
implicit none
! VARIÁVEIS DE ENTRADA
! original_accel é o acelerograma original a ser transformado:
! original_accel = [time; acceleration; velocity; displacement]
! N_iter é o número de iterações do algoritmo
! Sa_elastic é o espectro elástico a ser combinado
! T é o vetor de período
! z é o amortecimento estrutural
! ag é o pico objetivo da aceleração do solo (PGA)
integer:: N_iter,number_points
real*8:: z,Sa_elastic(2,200),T(200),original_accel(4,number_points)
!VARIÁVEIS DE SAÍDA
! Final_accelerogram é o acelerograma artificial final no formato:
! Final accelerogram = [time; acceleration; velocity; displacement]
! Sa é o espectro de resposta de aceleração em todas as iterações
! S (N_iter, :) é o espectro de resposta Final_accelerogram
real*8:: Sa(N_iter,200),Final_accelerogram(4,number_points)

```

```

!VARIÁVEIS INTERNAS
integer:: i,j,jj,L,NFFT,BB
real*8:: ag,sfac,dt,Fs,xx,yy,pi,maxval,imaginario,zero
real*8:: freq_spectra(200),Sa_design_interp(200),time(number_points),y(number_points),&
    & aux_var_1(2,4),aux_var_2(number_points),P_MODIF(N_iter,200),SCALE_factor(N_iter),&
    & S_aux(4,200),P_MODIF_aux(200),aux1(200),aux2(200),y_aux(N_iter,number_points),&
    & v_aux(N_iter,number_points),d_aux(N_iter,number_points),accelerogram(2,number_points)
real*8, allocatable:: f(:),y_recomposto_modif_aux(:),velo_recomposto_modif_aux(:),&
    & desl_recomposto_modif_aux(:)
real*8, allocatable:: MODIF_Y(:,:)
double complex, allocatable:: Yi(:),V_modif(:,:),Y_modif(:,:),D_modif(:,:),iY_modif(:),&
    & iV_modif(:),iD_modif(:)
parameter(pi=3.14159265359)
!INÍCIO DA ROTINA
ag=Sa_elastic(2,1) !Peak Ground Acceleration
freq_spectra=0.00d+00
Sa_design_interp=0.00d+00
do i=1,200
    freq_spectra(i)=((1.00d+00)/T(i))
    Sa_design_interp(i)=Sa_elastic(2,i)
enddo
! Escala do acelerograma original
sfac=0.85d+00 ! Dimensionamento na primeira iteração para que o PGA = sfac * ag
call maior(original_accel(2,:),number_points,maxval)
do i=1,number_points
    original_accel(2,i)=original_accel(2,i)*ag/maxval*sfac
    time(i)=original_accel(1,i)
    y(i)=original_accel(2,i)
enddo
dt=0.00d+00
dt=original_accel(1,2)-original_accel(1,1)
Sa=0.00d+00
aux_var_1=0.00d+00
aux_var_1(1,1)=0.00d+00; aux_var_1(1,2)=0.05d+00
aux_var_1(1,3)=0.95d+00; aux_var_1(1,4)=1.00d+00
aux_var_1(2,1)=0.00d+00; aux_var_1(2,2)=1.00d+00
aux_var_1(2,3)=1.00d+00; aux_var_1(2,4)=0.00d+00
aux_var_2=0.00d+00
do i=1,number_points
    xx=0.00d+00

```

```

xx=dfloat(i-1)*((1.00d+00)/dfloat(number_points-1))
call interpol(aux_var_1(1,:),aux_var_1(2,:),4,xx,aux_var_2(i),3)
enddo
P_MODIF=0.00d+00 ! fatores de modificação do acelerograma
SCALE_factor=0.00d+00 ! accelerogram scale factors
! espectro de resposta original_accel
accelerogram=0.00d+00
do i=1,number_points
    accelerogram(1,i)=time(i)
    accelerogram(2,i)=y(i)
enddo
S_aux=0.00d+00
call ARS(accelerogram,number_points,z,T,S_aux)
do i=1,200
    Sa(1,i)=S_aux(4,i)
    P_MODIF(1,i)=Sa_design_interp(i)/Sa(1,i)
    SCALE_factor(1)=SCALE_factor(1)+((P_MODIF(1,i))/(200))
enddo
do i=1,200
    P_MODIF(1,i)=P_MODIF(1,i)/SCALE_factor(1)
enddo
! Transformada de Fourier (FFT) do acelerograma
Fs=((1.00d+00)/dt)
L=number_points
call nextpow2(L,BB)
NFFT=2**BB
allocate(Yi(NFFT),f(NFFT))
Yi=0.00d+00
!Yi = fft(y,NFFT)/L;
do i=1,number_points
    Yi(i)=y(i)
enddo
call fft(Yi,NFFT)
!call fft(Yi,-1.00d+00,BB)
do i=1,NFFT
    Yi(i)=Yi(i)/L
enddo
f=0.00d+00
do i=0,NFFT-1
    f(i+1)=Fs*dfloat(i)*(1.00d+00/dfloat(NFFT-1))

```

```

enddo
! Modificação do acelerograma FFT para corresponder ao espectro objetivo
allocate(MODIF_Y(N_iter-1,NFFT),Y_modif(N_iter-1,NFFT), &
& V_modif(N_iter-1,NFFT),D_modif(N_iter-1,NFFT), &
& y_recomposto_modif_aux(NFFT),velo_recomposto_modif_aux(NFFT), &
& desl_recomposto_modif_aux(NFFT),iY_modif(NFFT),iV_modif(NFFT), &
& iD_modif(NFFT))
MODIF_Y=0.00d+00; Y_modif=0.00d+00; V_modif=0.00d+00; D_modif=0.00d+00
y_aux=0.00d+00; v_aux=0.00d+00; d_aux=0.00d+00
do i=1,L
  y_aux(1,i)=original_accel(2,i)
  v_aux(1,i)=original_accel(3,i)
  d_aux(1,i)=original_accel(4,i)
enddo
do j=2,N_iter
  P_MODIF_aux=0.00d+00
  do i=1,200
    P_MODIF_aux(i)=P_MODIF(j-1,i)*SCALE_factor(j-1)
  enddo
  do jj=1,(NFFT/2)
    if (f(jj)>=freq_spectra(200).and.f(jj)<=freq_spectra(1)) then
      xx=0.00d+00; aux1=0.00d+00; aux2=0.00d+00
      xx=f(jj)
      do i=1,200
        aux1(i)=freq_spectra(201-i)
        aux2(i)=P_MODIF_aux(201-i)
      enddo
      call interpol(aux1,aux2,200,xx,yy,4)
      MODIF_Y(j-1,jj)=yy
    else
      MODIF_Y(j-1,jj)=1.00d+00
    endif
  enddo
enddo
do i=1,(NFFT/2)
  ! Manutenção de aliasing
  MODIF_Y(j-1,NFFT-(i-1))=MODIF_Y(j-1,i)
enddo
if (j==2)then ! 1° iteração
  do i=1,NFFT
    Y_modif(j-1,i)=Yi(i)*MODIF_Y(j-1,i)

```

```

    imaginario=0.00d+00
    !imaginario=(Y_modif(j-1,i)/(2*pi*f(i)))
    imaginario=(1.00d+00/(2*pi*f(i)))
    zero=0.00d+00
    V_modif(j-1,i)=cplx(zero,imaginario)
    V_modif(j-1,i)=-Y_modif(j-1,i)*V_modif(j-1,i)
    D_modif(j-1,i)=-Y_modif(j-1,i)/((2*pi*f(i))**2)
enddo
else
do i=1,NFFT
    Y_modif(j-1,i)=Y_modif(j-2,i)*MODIF_Y(j-1,i)
    imaginario=0.00d+00
    !imaginario=(Y_modif(j-1,i)/(2*pi*f(i)))
    imaginario=(1.00d+00/(2*pi*f(i)))
    zero=0.00d+00
    V_modif(j-1,i)=cplx(zero,imaginario)
    V_modif(j-1,i)=-Y_modif(j-1,i)*V_modif(j-1,i)
    D_modif(j-1,i)=-Y_modif(j-1,i)/((2*pi*f(i))**2)
enddo
endif
D_modif(j-1,1)=0.00d+00 ! primeira frequência = 0 não deve ser considerada
V_modif(j-1,1)=0.00d+00
! Determinação do acelerograma modificado
y_recomposto_modif_aux=0.00d+00
velo_recomposto_modif_aux=0.00d+00
desl_recomposto_modif_aux=0.00d+00
iY_modif=0.00d+00
iV_modif=0.00d+00
iD_modif=0.00d+00
do i=1,NFFT
    iY_modif(i)=Y_modif(j-1,i)
    iV_modif(i)=V_modif(j-1,i)
    iD_modif(i)=D_modif(j-1,i)
enddo
call ifft(iY_modif,NFFT)
call ifft(iV_modif,NFFT)
call ifft(iD_modif,NFFT)
do i=1,NFFT
    y_recomposto_modif_aux(i)=real(iY_modif(i)*L)
    velo_recomposto_modif_aux(i)=real(iV_modif(i)*L)

```

```

    desl_recomposto_modif_aux(i)=real(iD_modif(i)*L)
enddo
do i=1,L
    y_aux(j,i)=y_recomposto_modif_aux(i)*aux_var_2(i)
    v_aux(j,i)=velo_recomposto_modif_aux(i)
    d_aux(j,i)=desl_recomposto_modif_aux(i)-desl_recomposto_modif_aux(1)
enddo
! Espectro de resposta do acelerograma modificado
accelerogram=0.00d+00
do i=1,L
    accelerogram(1,i)=time(i)
    accelerogram(2,i)=y_aux(j,i)
enddo
call ARS(accelerogram,L,z,T,S_aux)
do i=1,200
    Sa(j,i)=S_aux(4,i)
enddo
do i=1,200
    P_MODIF(j,i)=Sa_design_interp(i)/Sa(j,i)
enddo
do i=1,200
    SCALE_factor(j)=SCALE_factor(j)+(P_MODIF(j,i)/200)
enddo
do i=1,200
    P_MODIF(j,i)=P_MODIF(j,i)/SCALE_factor(j)
enddo
enddo
! Amp=[abs(Y);abs(Y_modif)] ! variáveis úteis
! FFT_iter=[P;Amp]
Final_accelerogram=0.00d+00
do i=1,L
    Final_accelerogram(1,i)=time(i)
    Final_accelerogram(2,i)=y_aux(N_iter,i)
    Final_accelerogram(3,i)=v_aux(N_iter,i)
    Final_accelerogram(4,i)=d_aux(N_iter,i)
enddo
endsubroutine
! DETERMINE O ESPECTRA DE RESPOSTA DO ACELEROGRAMA (ARS)
subroutine ARS(accelerogram,number_points,z,T,S)
! Função para determinar o espectro elástico linear de um oscilador SDOF

```

```

implicit none
! INPUT
! T é o vetor de períodos do oscilador (s)
! z é o amortecimento do oscilador
! acelerograma é a excitação de entrada: [time; acceleration]
integer:: number_points
real*8:: z,T(200),accelerogram(2,number_points)
! OUTPUT
! S é o espectro de resposta, na forma:
! S= [period; (displacement, velocity and acceleration response spectra)]
real*8:: S(4,200)
! VARIÁVEIS INTERNAS
integer::i,j,jj,iwsp(2),iflag,IPIVM(2),INFOM
real*8::w(200),dt,time(number_points),Forces(number_points), &
& dForces_dt(number_points-1),aux_ acel(2),pi,B(2,1),Ai(2,2), &
& WORK(2),Ide(2,2),Kb(2,2),Kf(2,2),KfB(2,1),KdfB(2,1), &
& x(2,number_points),acel(number_points)
parameter(pi=3.14159265359)
complex*16:: A(2,2),AB(2),wsp(32)
!INÍCIO DA ROTINA
S=0.00d+00
w=0.00d+00
do i=1,200
  S(1,i)=T(i)
  w(i)=(1.00d+00/T(i))*2*pi
enddo
! Total_time=accelerogram(1,end);
dt=0.00d+00
dt=accelerogram(1,2)-accelerogram(1,1)
time=0.00d+00
Forces=0.00d+00
do i=1,number_points
  time(i)=accelerogram(1,i)
  call interpol(accelerogram(1,:),accelerogram(2,:),number_points,time(i),Forces(i),5)
enddo
dForces_dt=0.00d+00
do i=1,number_points-1
  dForces_dt(i)=Forces(i+1)-Forces(i)
enddo
do jj=1,200

```

```

! Matrizes de equações diferenciais de espaço de estado
A=0.00d+00
B=0.00d+00
A(1,1)=0.00d+00
A(1,2)=1.00d+00
A(2,1)=-w(jj)**2.00d+00
A(2,2)=-2.00d+00*z*w(jj)
B(1,1)=0.00d+00
B(2,1)=1.00d+00
! Solucionador de etapas de tempo analítico de espaço de estados
wsp=0.00d+00
Kb=0.00d+00
AB=0.00d+00; AB(1)=1.00d+00; AB(2)=0.00d+00
call ZGCHBV(2,dt,A,2,AB,wsp,iwsp,iflag)
Kb(1,1)=real(AB(1)); Kb(2,1)=real(AB(2))
AB=0.00d+00; AB(1)=0.00d+00; AB(2)=1.00d+00
call ZGCHBV(2,dt,A,2,AB,wsp,iwsp,iflag)
Kb(1,2)=real(AB(1)); Kb(2,2)=real(AB(2))
do i=1,2
  do j=1,2
    Ai(i,j)=real(A(i,j))
  enddo
enddo
call DGETRF(2,2,Ai,2,IPIVM,INFOM)
call DGETRI(2,Ai,2,IPIVM,WORK,2,INFOM)
Ide=0.00d+00; Ide(1,1)=1.00d+00; Ide(2,2)=1.00d+00
Kf=0.00d+00
Kf=matmul(Ai,(Kb-Ide))
KfB=0.00d+00
KfB=matmul(Kf,B)
do i=1,2
  do j=1,2
    Kf(i,j)=Kf(i,j)/dt
  enddo
enddo
KdfB=0.00d+00
KdfB=matmul(matmul(Ai,(Kf-Ide)),B)
! Solucionador de equação diferencial
x=0.00d+00 ! 1ª linha - deslocamento; 2ª linha - velocidade
acel=0.00d+00 ! aceleração

```

```

aux_ acel=0.00d+00
aux_ acel(1)=-w(jj)**2.00d+00)
aux_ acel(2)=-2.00d+00*z*w(jj)
do j=1,number_points-1
  !x(:,j+1)=matmul(Kb,x(:,j))+KfB*Forces(1,j)+KdfB*dForces_dt(j)
  do i=1,2
    x(i,j+1)=Kb(i,1)*x(1,j)+Kb(i,2)*x(2,j)+KfB(i,1)*Forces(j)+KdfB(i,1)*dForces_dt(j)
  enddo
  acel(j+1)=aux_ acel(1)*x(1,j+1)+aux_ acel(2)*x(2,j+1)
enddo
! Displacement, velocity and acceleration response spectra
call maior(x(1,:),number_points,S(2,jj))
call maior(x(2,:),number_points,S(3,jj))
call maior( acel(:),number_points,S(4,jj))
enddo
endsubroutine

```

